[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

8.12.2021

Занятие № 14

Уравнения в полных дифференциалах

Интегрирование уравнений в полных дифференциалах

Уравнения

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует функция $u(x,y)$, для которой $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y)=C, \qquad (2)$$

где C – произвольная постоянная. Будем считать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области D (односвязная область, в которой рассматривается уравнение). Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, является выполнение тождества

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (3)$$

Задача решения уравнения в полных дифференциалах сводится к классической задаче математического анализа о *восстановлении функции двух переменных по ее дифференциалу.* Т.е. следует найти функцию, для которой:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y). \tag{4}$$

№ 186 [Ф]: $2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$ (186.1)

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x,$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Следовательно, уравнение (186.1) является уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 - y^2. \tag{186.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y) = x^2 y + \varphi(y), \tag{186.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (186.3) во второе условие системы (186.2), будем иметь

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2. \tag{186.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = -y^2, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c,$$

где c – произвольная постоянная. Однако, при нахождении функции $\varphi(y)$ можно полагать $c = 0$. Итак, получили

$$u(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3,$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x^2 y - \frac{1}{3}y^3 = C \quad \text{или} \quad 3x^2 y - y^3 = C, \quad C \in R.}$

№ 190 [Ф]: $$\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0. \qquad (190.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{6x^2}{y^3}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{6x^2}{y^3},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{3x^2+y^2}{y^2}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{2x^3+5y}{y^3}. \qquad (190.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\varphi(y), \qquad (190.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (190.3) во второе условие (190.2), будем иметь

$$-\frac{2x^3}{y^3}+\varphi'(y)=-\frac{2x^3+5y}{y^3}. \qquad (190.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=-\frac{5}{y^2}, \quad \varphi(y)=\frac{5}{y}+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (190.3). В результате получим

$$u(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\frac{5}{y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C.}$

№ 191 [Ф]: $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$ (191.1)

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right), \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\sqrt{x^2-y}. \tag{191.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}+\varphi(y), \tag{191.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (191.3) во второе условие (191.2), будем иметь

$$-\sqrt{x^2-y}+\varphi'(y)=-\sqrt{x^2-y}. \tag{191.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=0, \quad \varphi(y)=c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c=0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (191.3). В результате получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Замечание. Если интегрировать по y второе уравнение системы (191.2), то получим:

$$u(x,y)=\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}+\psi(x), \tag{191.3'}$$

где функция $\psi(x)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (191.3') в первое уравнение системы (191.2), будем иметь

$$2x\sqrt{x^2-y}+\psi'(x)=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right). \qquad (191.4')$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\psi(x)$:

$$\psi'(y)=2x, \qquad \psi(x)=x^2+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\psi(x)$ выражение в (191.3'). В результате получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}=C.}$

№ 194 [Ф]: $$\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0. \qquad (194.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{x\cos y}{\sin^2 y}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{2x\cos y}{\cos 2y-1}=-\frac{x\cos y}{\sin^2 y},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{x}{\sin y}+2, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}=-\dfrac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}. \end{cases} \qquad (194.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2\sin y}+2x+\varphi(y), \qquad (194.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (194.3) во второе условие (194.2), будем иметь

$$-\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y}+\varphi'(y)=-\frac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}. \qquad (194.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=-\frac{\cos y}{2\sin^2 y}, \quad \varphi(y)=\frac{1}{2\sin y}+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (194.3). В результате получим

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2\sin y}+2x+\frac{1}{2\sin y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{\frac{x^2}{2\sin y}+2x+\frac{1}{2\sin y}=C \quad \text{или} \quad x^2+1=2(C-2x)\sin y.}$

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **187, 189, 193**.

Выполнить задания 1–4 примерного варианта Контрольной работы № 1 (часть2) **«Интегрирование уравнений линейных, в полных дифференциалах, уравнений Бернулли и Риккати»**

Контрольная работа – 22.12.2021

15.12.2021

Занятие № 15

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Пусть уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

не является уравнением в полных дифференциалах. Дифференцируемая функция $\mu = \mu(x,y) \neq 0,$ после умножения на которую уравнение (1) становится уравнением в полных дифференциалах, называется **интегрирующим множителем** этого уравнения. Чтобы уравнение

$$\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial[\mu P(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu Q(x,y)]}{\partial x}. \tag{3}$$

Соотношение (3) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\mu(x,y)$. Это уравнение является линейным уравнением с частными производными первого порядка, которое можно записать в виде

$$Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} - P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда достаточно легко найти решение уравнения (4), а, следовательно, и интегрирующий множитель уравнения (1).

Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель вида $\mu(x,y) = \mu(\omega(x,y)),$ где $\omega(x,y)$ - известная функция, если дробь

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q \cdot \dfrac{\partial \omega}{\partial x} - P \cdot \dfrac{\partial \omega}{\partial y}}$$

является функций от $\omega(x, y)$, т.е.

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q \cdot \dfrac{\partial \omega}{\partial x} - P \cdot \dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = f(\omega(x,y)). \qquad (5)$$

Тогда для нахождения интегрирующего множителя получим уравнение[1]:

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \mu(\omega) \cdot f(\omega),$$

которое имеет решение

$$\mu(\omega) = C \cdot e^{\int f(\omega) d\omega}. \qquad (6)$$

Полагая, $C = 1$, получим интегрирующий множитель уравнения (1).
В частности,

если выполнено условие,	то интегрирующий множитель является функцией
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x)$	$\mu = \mu(x)$
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = f(y)$	$\mu = \mu(y)$

[1] Следует из (4), так как по правилу дифференцирования сложной функции имеем: $\dfrac{\partial \mu(\omega(x,y))}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{d\omega} \cdot \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \mu(\omega(x,y))}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{d\omega} \cdot \dfrac{\partial \omega}{\partial y}$.

$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q-P}=f(x+y)$	$\mu=\mu(x+y)$
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{yQ-xP}=f(xy)$	$\mu=\mu(xy)$

Необходимо следить за тем, чтобы умножение уравнения (1) на интегрирующий множитель не приводило к потере решений и появлению посторонних решений.

№ 354 [М]: $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)dy=0.$ (354.1)

Уравнение определено при $y\neq 0$ и не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}+1\right)=-\frac{x}{y^2}\neq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}-1\right)=\frac{1}{y}.$$

В этом случае

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{-P}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)\cdot\frac{1}{-\left(\dfrac{x}{y}+1\right)}=\frac{1}{y}=f(y).$$

Следовательно, интегрирующий множитель является функцией y и находится по формуле (6):

$$\mu(y)=Ce^{\int\frac{1}{y}dy}=C\,|\,y\,|.$$

Уравнение определено в совокупности полуплоскостей $y>0$ и $y<0$. В полуплоскости $y>0$ удобно взять $C=1$, а в полуплоскости $y<0$

$C = -1$. Тогда для обеих полуплоскостей $\mu(y) = y$. После умножения на этот множитель уравнение (354.1) примет вид

$$(x+y)dx + (x-y)dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = x + y, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x - y. \tag{354.2}$$

Из первого равенства найдем

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y). \tag{354.3}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства (354.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = -y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (354.3). В результате получим

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 + 2xy = C.$$

Ответ: $\boxed{x^2 - y^2 + 2xy = C.}$

Замечание. Уравнение (354.1) является однородным уравнением. С помощью замены $x = uy$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$(u+1)ydu + (u^2 + 2u - 1)dy = 0.$$

№ 355 [M]: $(x^2 + y)dx - xdy = 0.$ (355.1)

Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q} = -\frac{2}{x},$$

то интегрирующий множитель является функцией x и находится по формуле (6), считая $C = 1$:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Прежде, чем умножить заданное уравнение на $\mu(x)$, заметим, что $\boxed{x = 0}$ является решением уравнения (355.1). После умножения на интегрирующий множитель уравнение (355.1) примет вид

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{x}. \tag{355.2}$$

Из второго равенства найдем

$$u(x,y) = -\frac{y}{x} + \varphi(x). \tag{355.3}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства (355.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(x)$ выражение в (355.3). В результате получим

$$u(x,y)=x-\frac{y}{x}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$x-\frac{y}{x}=C$$

который с ранее выделенным решением x = 0 дает ответ.

Ответ: $\boxed{x-\frac{y}{x}=C;\quad x=0.}$

Замечание. Уравнение (355.1) является линейным относительно y. При $dx \neq 0$ уравнение можно привести к виду $xy' = y + x^2$ и решить, например, с помощью метода Лагранжа (метода вариации произвольной величины).

№ 358 [М]: $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0.$ (358.1)

Здесь $P(x,y)=x\sin y + y\cos y,\quad Q(x,y)=x\cos y - y\sin y.$

Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q}=(x\cos y+\cos y-y\sin y-\cos y)\cdot\frac{1}{x\cos y-y\sin y}=1,$$

то интегрирующий множитель является функцией x и находится по формуле (6), считая C = 1:

$$\mu(x)=e^{\int 1dx}=e^x.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (358.1) примет вид

$$e^x(x\cos y - y\sin y)dy + e^x(x\sin y + y\cos y)dx$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^x (x\sin y + y\cos y), \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = e^x (x\cos y - y\sin y). \end{cases} \tag{358.2}$$

Из первого равенства системы найдем

$$u(x,y) = e^x (x\sin y + y\cos y - \sin y) + \varphi(y). \tag{358.3}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = e^x (x\cos y - y\sin y) + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства системы (358.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (358.3). В результате получим

$$u(x,y) = e^x (x\sin y + y\cos y - \sin y).$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^x (x\sin y + y\cos y - \sin y) = C.$$

Ответ: $\boxed{e^x (x\sin y - \sin y + y\cos y) = C.}$

Домашнее задание

[Матвеев] № 356:

№ 356 $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$

[Матвеев] № 354 (решить как однородное уравнение),
[Матвеев] № 355 (решить как линейное уравнение).

Контрольная работа – 22.12.2021