



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.



[Занятие № 6](#)

[№ 7](#)

[№ 8](#)

13.10.2021

Занятие № 6 (часть 2)

Однородные уравнения

[Интегрирование однородных уравнений](#)

Определение 1. Функция $F(x, y)$ называется **однородной**, если $\forall \lambda > 0$ справедливо тождество $F(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^k F(x, y)$. Число k называют **порядком** (или **степенью**) однородной функции.

Примеры

$\frac{x}{y}, \frac{x+2y}{3x-y}, \frac{x^2+4y^2}{x^2}$ – однородные функции нулевого порядка, $k = 0$

$x+y, \frac{2x^2-y^2}{x+2y}, \frac{3xy}{x-5y}$ – однородные функции порядка $k = 1$

$x^2-4xy, \frac{2x^3-2xy^2}{x+y}$ – однородные функции порядка $k = 2$

Определение 2. Уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

в котором правая часть $f(x, y)$ является однородной функцией ну-

левого порядка, называют **однородным**.

Уравнение в дифференциалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

будет **однородным**, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными одного и того же порядка.

При $x \neq 0$, полагая $\lambda = \frac{y}{x}$, уравнение (1) приводится к виду

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1')$$

а уравнение (2) – к виду:

$$m\left(\frac{y}{x}\right)dx + n\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0. \quad (2')$$

Здесь $g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, $m\left(\frac{y}{x}\right) = M\left(1, \frac{y}{x}\right)$, $n\left(\frac{y}{x}\right) = N\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Уравнения (1') и (2') с помощью замены

$$z = \frac{y}{x} \quad (\text{т.е. } y = zx) \quad (3)$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Действительно. Так как $y' = z + xz'$, то уравнение (1') при замене (3) приводится к виду:

$$z + xz' = g(z) \Leftrightarrow xz' = g(z) - z. \quad (4)$$

Так как $dy = zdx + xdz$, то уравнение (2') при замене (3) приводится к виду

$$m(z)dx + n(z)(zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow (m(z) + zn(z))dx + xn(z)dz = 0. \quad (5)$$

(4) и (5) – уравнения с разделяющимися переменными.

№ 101 [Ф]: $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

(101.1)

Уравнение (101.1) является однородным, так как для функций $M(x, y) = x + 2y$ и $N(x, y) = -x$ имеем

$$\begin{aligned}M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x + 2\lambda y = \lambda(x + 2y) = \lambda M(x, y), \\N(\lambda x, \lambda y) &= -\lambda x = \lambda N(x, y).\end{aligned}$$

Функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ – однородные 1-го порядка.

Легко установить, что $x = 0$ является решением заданного уравнения.

Поделив уравнение (101.1) на x , получим

$$\left(1 + \frac{2y}{x}\right)dx - dy = 0. \quad (101.2)$$

Замена $y = zx$ в полученном уравнении дает:

$$(1 + 2z)dx - (zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow (1 + z)dx - xdz = 0. \quad (101.3)$$

Одним из решений уравнения (101.3) является $z = -1$.

Найдем остальные решения уравнения (101.3). Разделив переменные в уравнении (101.3), будем иметь

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad \ln|1+z| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Полученный общий интеграл уравнения (101.3) можно преобразовать следующим образом:

$$|1+z| = e^C |x|, \quad C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1+z = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (101.3) будет

$$z = Cx - 1, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (101.4)$$

(решение $z = -1$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (101.4), получим общее решение уравнения (101.2).

Ответ:

$$\begin{aligned}x &= 0, \\y &= x(Cx - 1), \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\text{№ 103 [Ф]: } (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0. \quad (103.1)$$

Функции $M(x, y) = y^2 - 2xy$ и $N(x, y) = x^2$ являются однородными порядка 2. Следовательно, заданное уравнение – однородное.

Одним из решений уравнения (103.1) является $x = 0$.

При $x \neq 0$ поделив уравнение (103.1), получим:

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 2 \frac{y}{x} \right) dx + dy = 0. \quad (103.2)$$

Выполнив замену $y = zx$, будем иметь:

$$(z^2 - 2z)dx + xdz + zdx = 0, \quad z(z-1)dx + xdz = 0. \quad (103.3)$$

Очевидно, $z = 0$ и $z = 1$ являются решениями уравнения (103.3).

Разделяя переменные в (103.3), найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{z(z-1)} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right) dz = -\int \frac{1}{x} dx + \ln |C|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\ln \left| \frac{z-1}{z} \right| = -\ln |x| + \ln |C|, \quad \frac{z-1}{z} = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Получили все решения уравнения (103.3):

$$z = 0, \quad \frac{1}{z} = 1 - \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (103.4)$$

(решение $z = 1$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (103.4), получим все решения уравнения (103.2):

$$y = 0, \quad x^2 = y(x - C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0, \\ x^2 &= y(x - C), \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Домашнее задание

[Ф] №№ 102, 104, 108, 325.

14.10.2021

Занятие № 7



№ 82 [Ф]: Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

Обозначим:

$x(t)$ – температура куска металла через t минут после помещения в печь;

$y(t)$ – температура печи через t минут после начала повышения температуры.

Для $y(t)$ имеем:

$$y(t) = \alpha t + \beta, \quad y(0) = a, \quad y(60) = b \Rightarrow y(t) = a + \frac{b-a}{60} \cdot t.$$

Тогда для $x(t)$ будем иметь:

$$\begin{cases} x'(t) = k(y(t) - x(t)), \\ y(t) = a + \frac{b-a}{60} \cdot t, \\ x(0) = a. \end{cases} \quad (1)$$

Задача (1) имеет решение $x(t) = a + \frac{b-a}{60} \cdot \left(t - \frac{1-e^{-kt}}{k} \right)$.

Тогда $x(60) = b - \frac{b-a}{60k}(1 - e^{-60k})$.

Однородные уравнения

$$\text{№ 107 [Ф]: } xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad (107.1)$$

Заметим, что $x \neq 0$. При этом уравнение (107.1) можно привести к виду:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad (107.2)$$

Уравнение (107.2) является однородным. Выполним в нем замену $y = zx$. В результате получим

$$z + xz' = z + \operatorname{tg} z, \quad xz' = \operatorname{tg} z. \quad (107.3)$$

Решая уравнение $\operatorname{tg} z = 0$, найдем решения уравнения (107.3)

$$z = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

которые можем потерять при разделении переменных:

$$x \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} z, \quad \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln |\sin z| = \ln |x| + \ln |C|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\sin z = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Так как $\sin z = 0 \Rightarrow z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то общим решением уравнения (107.3) является следующее $\sin z = Cx, C \in \mathbb{R}$. Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\sin \frac{y}{x} = Cx, C \in \mathbb{R}.$

$$\text{№ 109 [Ф]: } xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}. \quad (109.1)$$

Область определения уравнения описывает неравенство $\frac{x + y}{x} > 0$.

Поделив правую и левую часть уравнения (109.1) на x , получим

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x} \ln \frac{x+y}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln \left(1 + \frac{y}{x}\right). \quad (109.2)$$

Следовательно, уравнение (109.1) является однородным. Полагая $y = zx$, для уравнения (109.2) будем иметь

$$z'x + z = z + (1+z) \ln(1+z) \Leftrightarrow xz' = (1+z) \ln(1+z). \quad (109.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = 0$ является решением уравнения. Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dz}{(1+z) \ln(1+z)} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{(1+z) \ln(1+z)} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln |\ln(1+z)| = \ln |x| + C, \quad |\ln(1+z)| = C_1 |x|, \quad C_1 > 0,$$

$$\ln(1+z) = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (109.3) будет

$$\ln(1+z) = Cx, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (109.4)$$

(решение $z = 0$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (109.4), получим общее решение уравнения (109.1).

Ответ: $\ln \frac{x+y}{x} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$

Замечание. Так как $\lim_{z \rightarrow -1^-} (z+1) \ln(1+z) = 0$, то, если доопределить нулем правую часть уравнения (109.3) при $z = -1$, решением уравнения (109.3) будет и $z = -1$. Тогда и $y = -x$ будет решением уравнения (109.1).



Домашнее задание

[Ф] №№ 110, 115, 91.



Уравнения, приводящиеся к однородному

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y - c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (*)$$

если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, с помощью подстановки $y = u + \beta$, $x = v + \alpha$,

где α, β – решение системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$$

приводится к однородному уравнению

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1v + b_1u}{a_2v + b_2u}\right).$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, и для уравнения (*) будем

иметь:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y - c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = g(a_1x + b_1y). \quad (**)$$

Если $b_1 \neq 0$, то, выполнив в уравнении (**) замену $z = a_1x + b_1y$,
придем к уравнению

$$\frac{1}{b_1} \cdot \left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = g(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = b_1g(z) + a_1.$$

$$\text{№ 114 [\Phi]: } (2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0. \quad (114.1)$$

С помощью замены $z = 2x + y$, $y = z - 2x$, уравнение (114.1) приводится к виду:

$$5(z-1)dx - (2z-3)dz = 0. \quad (114.2)$$

Очевидно, $z = 1$ является решение. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$5dx - \frac{2z-3}{z-1} dz = 0, \quad \int 5dx - \int \frac{2z-3}{z-1} dz = C,$$

$$5x - \int \left(2 - \frac{1}{z-1} \right) dz = C, \quad 5x - 2z + \ln |z-1| = C, \quad C \in R.$$

Полученный общий интеграл можно привести к виду

$$z - 1 = C_1 e^{2z-5x}.$$

В результате получили общее решение уравнения (114.2) (**решение $z = 1$ получается при $C_1 = 0$**).

Возвращаясь к переменным x и y , получим

Ответ: $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}, \quad C \in R.$

$$\text{№ 116 [\Phi]: } (x + 4y)y' = 2x + 3y - 5. \quad (116.1)$$

Так как

$$\begin{cases} x + 4y = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = -1, \end{cases}$$

то с помощью подстановки

$$y = u - 1, \quad x = v + 4$$

уравнение (116.1) приводится к виду

$$(v + 4u) \frac{du}{dv} = 2v + 3u, \quad (v + 4u)du - (2v + 3u)dv = 0. \quad (116.2)$$

Полученное уравнение является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u = zv$. Так как $du = vdz + zdv$, то для уравнения (116.2) будем иметь

$$\begin{aligned} v(1+4z)(vdz+zdv) &= v(2+3z)dv, \\ v(1+4z)dz &= -2(2z^2-z-1)dv, \\ v(1+4z)dz &= -2(2z+1)(z-1)dv. \end{aligned} \quad (116.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = 1$ и $z = -1/2$ являются его решениями ($v = 0$ является решением уравнения (116.3), но не является решением уравнения (116.2), поэтому оно исключается из дальнейшего рассмотрения). Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)} dz = -\frac{dv}{v}, \quad \int \frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)} dz = -\int \frac{dv}{v} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Так как

$$\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)} = \frac{1}{3(2z+1)} + \frac{5}{6(z-1)},$$

то для уравнения (116.3) получим общий интеграл

$$\frac{1}{6} \ln |2z+1| + \frac{5}{6} \ln |z-1| + \ln |v| = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

который можно преобразовать к виду

$$(2z+1)(z-1)^5 v^6 = C_1. \quad (116.4)$$

Таким образом, получили решение уравнения (116.3) в виде (116.4).

(решения $z = 1$ и $z = -1/2$ получаются при $C_1 = 0$)

Возвращаясь к переменным x и y :

$$z = \frac{u}{v} = \frac{y+1}{x-4},$$

Получим

$$\left(2\frac{y+1}{x-4}+1\right)\left(\frac{y+1}{x-4}-1\right)^5(x-4)^6=C,$$

$$(2y+x-2)(y-x+5)^5=C.$$

Ответ: $(y-x+5)^5(x+2y-2)=C, C \in R.$

№ 118 [Ф]: $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$ (118.1)

Так как $x+y-1 = x-3+y+2$, то с помощью замены

$$u = y+2, \quad v = x-3,$$

уравнение (118.1) приводится к виду

$$\frac{du}{dv} = 2\left(\frac{u}{u+v}\right)^2 = 2\left(\frac{u/v}{u/v+1}\right)^2. \quad (118.2)$$

Уравнение (118.2) является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u = zv$. Так как $du = vdz + zdv$, то для уравнения (118.2) будем иметь

$$\frac{vdz + zdv}{dv} = 2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2, \quad v\frac{dz}{dv} = 2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 - z,$$

$$v\frac{dz}{dv} = -\frac{z(z^2+1)}{(z+1)^2} \quad (118.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = 0$ является его решением. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)}dz = -\frac{dv}{v}, \quad \int \frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)}dz = -\ln|v| + C, \quad C \in R.$$

Так как

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2+1},$$

то будем иметь

$$\ln|z| + 2\operatorname{arctg}(z) = -\ln|v| + C, \quad \ln|z| + \ln|v| = -2\operatorname{arctg}(z) + C.$$

Полученный общий интеграл уравнения (118.3) можно привести к виду:

$$zv = C_1 e^{-2\operatorname{arctg}(z)}.$$

Таким образом, получили общее решение уравнения (118.3) (**решение $z = 0$ получается при $C_1 = 0$**).

Выполнив обратную замену $z = \frac{u}{v} = \frac{y+2}{x-3}$, получим ответ.

Ответ: $y + 2 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}, \quad C \in \mathbb{R}.$ (118.4)



Домашнее задание

[Ф] №№ 113, 117, 120, 402.

Подготовка к [самостоятельной работе](#)