[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

Занятие № 8 | № 9 | № 10 | № 11 | № 12

3.04.2021

Занятие № 7

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Однородные уравнения

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – вещественные постоянные и $a_0 \neq 0$. Введя дифференциальный оператор L вида

$$L \equiv a_0 \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n, \qquad (2)$$

уравнение (1) можно записать как $Ly = 0$.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимые решения уравнения (1), то общее решение уравнения (1) определяет их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные. Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют ***фундаментальную систему решений*** (***ФСР***) уравнения (1).

Для построения вещественной ФСР уравнения (1) требуется найти все корни соответствующего ***характеристического уравнения***

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (3)$$

и воспользоваться следующими правилами:

Правило 1.

В случае **простых** корней λ_j существует вещественная фундаментальная система решений, состоящая из функций $e^{\lambda_j x}$ для каждого вещественного корня λ_j и функций $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ для каждой пары комплексных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$.

Правило 2.

В случае **кратных** корней λ_j существует вещественная фундаментальная система решений, состоящая из функций

$$e^{\lambda_j x},\ xe^{\lambda_j x},\ \ldots,\ x^{k_j-1}e^{\lambda_j x}$$

для каждого вещественного корня λ_j кратности k_j и функций

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

для каждой пары комплексных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$, кратности k.

№ 511 [Ф]: $y'' + y' - 2y = 0.$ (511.1)

Составив соответствующее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \iff (\lambda+2)(\lambda-1)=0, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=2.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 1 (случай комплексных корней), состоит из функций e^x и e^{-2x}. Общее решение уравнения (511.1) строится по формуле (3).

Ответ: $\boxed{y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.}$

№ 515 [Ф]: $y''-4y'+5y=0.$ (515.1)

Найдем корни соответствующего характеристического уравнения:

$$\lambda^2-4\lambda+5=0 \iff (\lambda-2)^2+1=0, \quad \lambda_{1,2}=2\pm i.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 1, состоит из функций $e^{2x}\cos x$ и $e^{2x}\sin x$. Общее решение уравнения (515.1) строится по формуле (3).

Ответ: $\boxed{y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).}$

№ 519 [Ф]: $y^{\mathrm{IV}}-y=0.$ (519)

Составив соответствующее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda^4-1=0 \iff (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0, \quad \lambda_{1,2}=\pm 1, \quad \lambda_{3,4}=\pm i.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 1, состоит из функций e^x, e^{-x}, $\cos x$, $\sin x$. Тогда общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$\boxed{y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.}$$

№ 521 [Ф]: $y^{\mathrm{VI}}+64y=0.$ (521)

Составив соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^6+64=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^6=-2^6,\quad \lambda=2(-1)^{1/6}.$$

Найдем все его корни, используя формулу для корней n-степени из ненулевого комплексного числа $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$:

$$z^{1/n}=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad k=\overline{0,\ n-1}.$$

Для $z=-1$ имеем $|z|=1,\quad \varphi=\pi,$ тогда

$$\lambda_k=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\quad k=\overline{0,\ 5}.$$

После подстановки соответствующих значений k в формулу для λ_k найдем:

$$\lambda_0=\sqrt{3}+i,\ \ \lambda_1=2i,\ \ \lambda_2=-\sqrt{3}+i,\ \lambda_3=-\sqrt{3}-i,\ \lambda_4=-2i,\ \lambda_5=\sqrt{3}-i.$$

Им соответствует фундаментальная система вещественных функций

$$e^{\sqrt{3}x}\cos x,\quad e^{\sqrt{3}x}\sin x,\quad \cos 2x,\quad \sin 2x,\quad e^{-\sqrt{3}x}\cos x,\quad e^{-\sqrt{3}x}\sin x.$$

Следовательно, общее решение уравнения (521) в вещественной форме запишется в виде

$$\boxed{\begin{aligned}y=e^{x\sqrt{3}}(C_1\cos x+C_2\sin x)+C_3\cos 2x+C_4\sin 2+\\ +e^{-x\sqrt{3}}(C_5\cos x+C_6\sin x).\end{aligned}}$$

№ 523 [Ф]: $4y''+4y'+y=0.$ (523)

Найдем корни соответствующего характеристического уравнения

$$4\lambda^2+4\lambda+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2\lambda+1)^2=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 2 (корень $\lambda=-1/2$ имеет кратность, равную 2), состоит из функций $e^{-x/2}$ и $xe^{-x/2}$. Общее решение уравнения (523) строится по формуле (3) и имеет вид

$$\boxed{y=e^{-x/2}(C_1+C_2x).}$$

№ 524 [Ф]: $y^{\mathrm{V}} - 6y^{\mathrm{IV}} + 9y''' = 0.$ (524)

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0, \ \lambda_{4,5} = 3.$$

Учитывая кратность корней $\lambda = 0$ (кратность 3) и $\lambda = 3$ (кратность 2) в соответствии с правилом 2 общее решение уравнения (524) запишем в виде

$$\boxed{y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5 x).}$$

№ 526 [Ф]: $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0.$ (526)

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 + 1)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = i, \quad \lambda_{3,4} = -i.$$

Учитывая кратность корней $\lambda = \pm i$ (кратность 2), в соответствии с правилом 2 общее решение уравнения (526) запишем в виде

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.}$$

№ 530 [Ф]: $y^{\mathrm{V}} + 8y''' + 16y' = 0.$ (530)

Составив соответствующее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 2i, \quad \lambda_{4,5} = -2i.$$

Фундаментальная система решений состоит из функций

$$1, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad x\cos 2x, \quad \mathrm{x}\sin 2x.$$

Тогда общее решение будет иметь вид

$$\boxed{y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x.}$$

Домашнее задание

[Ф] №№ **512, 516, 520, 522, 525, 527, 529.**

5.04.2021

Занятие № 8

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

№ 530 [Ф]: $y^{\mathrm{V}} + 8y''' + 16y' = 0.$ (530)

Составив соответствующее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 2i, \quad \lambda_{4,5} = -2i.$$

Фундаментальная система решений состоит из функций

$$1, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad x\cos 2x, \quad x\sin 2x.$$

Тогда общее решение будет иметь вид

$$\boxed{y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x.}$$

№ 532 [Ф]: $y^{\mathrm{IV}} + 4y'' + 3y = 0.$ (532)

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 3) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{3}.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 1 (случай комплексных корней), состоит из функций

$$\cos x, \quad \sin x, \quad \cos\sqrt{3}x, \quad \sin\sqrt{3}x.$$

Общее решение уравнения (532) строится по формуле (2).

Ответ: $\boxed{y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos\sqrt{3}x + C_4\sin\sqrt{3}x.}$

№ 582[Ф]: $y''-2y'+y=0;\quad y(2)=1,\quad y'(2)=-2.$ (582.1)

Прежде всего найдем общее решение уравнения. Составив соответствующее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \iff (\lambda-1)^2=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=1.$$

Учитывая кратность корня $\lambda=1$ (кратность 2), в соответствии с правилом 2 общее решение уравнения (582) запишем в виде

$$y=C_1e^x+C_2xe^x. \tag{582.2}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2, соответствующих искомому частному решению подчиним построенное решение (582.2) заданным условиям:

$$\begin{cases} y(2)=e^2(C_1+2C_2)=1, \\ y'(2)=e^2(C_1+3C_2)=-2, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=7e^{-2}, \\ C_2=-3e^{-2}. \end{cases}$$

Подставив найденные C_1 и C_2 в (582.2), получим искомое частное решение: $\boxed{y=e^{x-2}(7-3x).}$

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные уравнения

Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \tag{4}$$

где коэффициенты $a_0,a_1,\ldots,a_n$ – вещественные постоянные и $a_0\neq 0$, а $f(x)$ – функция, непрерывная на интервале (α,β). При этом решения уравнения (4) определены не на всей вещественной оси, как уравнения (1), а только на интервале (α,β).

Уравнение (4) можно записать в виде $Ly=f(x)$, где L – дифференциальный оператор, определяемый формулой (2).

Для решения уравнения (4) следует вначале найти функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$, образующие фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения (а это уравнение (1)), а далее можно,

1) либо применить *метод вариации произвольных постоянных*,
2) либо, если функция $f(x)$ имеет некоторый определенный вид, применить теорему[1] о структуре решения линейного неоднородного уравнения:

   Теорема. *Общее решение линейного неоднородного уравнения (4) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения* $y_{одн}$ *и некоторого частного решения* $y_{част}$ *уравнения (4).*

   и искать частное решение уравнения (4) *методом неопределенных коэффициентов*.

Приведем несколько правил определения вида частного решения $y_{част}$ по виду правой части уравнения (4):

Правило 1	
Вид функции $f(x)$	$P_m(x)e^{ax}$, где $P_m(x)$ – полином степени m, коэффициент a **не является корнем** характеристического уравнения (3)
Вид частного решения	$Q_m(x)e^{ax}$, где $Q_m(x)$ - полином степени m, коэффициенты которого надо найти.
Правило 2	

[1] См., например, в учебнике: Жабко А.П. и др. Дифференциальные уравнения и устойчивость. – СПб.: Издательство «Лань», 2015.

Вид функции $f(x)$	$P_m(x)e^{ax}$, где $P_m(x)$ – полином степени m, коэффициент a **является корнем** характеристического уравнения (3) и имеет кратность k
Вид частного решения	$x^k Q_m(x)e^{ax}$, где $Q_m(x)$ - полином степени m, коэффициенты которого надо найти.

Правило 3	
Вид функции $f(x)$	$P_m^1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + P_l^2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $P_m^1(x)$, $P_l^2(x)$ – полиномы степени m и l соответственно с вещественными коэффициентами, комплексное число $\alpha + i\beta$ **не является корнем** характеристического уравнения (3).
Вид частного решения	$Q_s^1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_s^2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $Q_s^1(x)$, $Q_s^2(x)$ – полиномы степени $s = \max(m, l)$, коэффициенты которых надо найти.
Правило 4	
Вид функции $f(x)$	$e^{\alpha x}\left(P_m^1(x)\cos\beta x + P_l^2(x)\sin\beta x\right)$, где $P_m^1(x)$, $P_l^2(x)$ – полиномы степени m и l соответственно с вещественными коэффициентами, комплексное число $\alpha + i\beta$ **является корнем** характеристического уравнения (3) и имеет кратность k.
Вид частного решения	$x^k e^{\alpha x}\left(Q_s^1(x)\cos\beta x + Q_s^2(x)\sin\beta x\right)$, где $Q_s^1(x)$, $Q_s^2(x)$ – полиномы степени $s = \max(m, l)$, коэффициенты которых надо найти.

Коэффициенты многочленов $Q_m(x)$, $Q_s^1(x)$, $Q_s^2(x)$ находятся после подстановки $y_{част}$ в исходное уравнение.

Принцип суперпозиции

При поиске частного решения уравнения (4) в случае, когда правая часть представима в виде суммы

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x),$$

иногда легче найти частные решения y_j для уравнений

$$Ly = f_j(x), \quad j = \overline{1,r}.$$

Тогда частное решение уравнения (4) будет определяться их суммой, т. е. $y_{част} = y_1 + y_2 + \ldots + y_r$.

№ 533 [Ф]: $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$. (533)

Найдя корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 3,$$

получим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_{одн} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Вид частного решения определим по виду правой части уравнения (533). Учитывая, что a = 4 не является корнем характеристического уравнения, по правилу 1 имеем $y_ч = Ae^{4x}$. Подставляя это выражение в уравнение (533) вместо y, получим

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x}, \ 5Ae^{4x} = e^{4x}, \quad 5A = 1, \quad A = \frac{1}{5}.$$

В результате получили частное решение уравнения (533) $y_ч = \frac{1}{5}e^{4x}$ и следовательно, и общее решение заданного уравнения:

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}.}$$

№ 534 [Ф]: $y''+y=4xe^x.$ (534)

1) $\lambda^2+1=0,\quad \lambda_{1,2}=\pm i,\quad y_{одн}=C_1\cos x+C_2\sin x.$

2) $a=1,\ \ a\neq\lambda_{1,2},\ \ y_ч=(Ax+B)e^x.$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

1	$y_ч=(Ax+B)e^x$
0	$(y_ч)'=(Ax+B+A)e^x$
1	$(y_ч)''=(Ax+B+2A)e^x$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения:

e^x	$B+B+2A=0$
xe^x	$A+A=4$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} A+B=0, \\ A=2, \end{cases}$$

найдем: $A=2,\ \ B=-2.$ Следовательно, $y_ч=(2x-2)e^x.$

3) Общее решение уравнения (534):

$$\boxed{y=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^x.}$$

№ 535 [Ф]: $y''-y=2e^x-x^2.$ (535)

1) $\lambda^2-1=0,\quad \lambda_{1,2}=\pm 1,\quad y_{одн}=C_1e^x+C_2e^{-x}.$

2) Используя принцип суперпозиции, установим вид частного решения:

а) $f_1(x)=2e^x,\ \ a=1=\lambda_1,\ \ y_1=Axe^x:$

$(Axe^x)''-Axe^x=2e^x,\quad A(x+2)e^x-Axe^x=2e^x,\quad A=1\ \ \rightarrow$

$\rightarrow\ \ y_1=xe^x.$

б) $f_2(x) = -x^2, \quad a = 0 \neq \lambda_{1,2}, \quad y_2 = Ax^2 + Bx + C:$

$$(Ax^2 + Bx + C)'' - (Ax^2 + Bx + C) = -x^2,$$

$$2A - Ax^2 - Bx - C = -x^2,$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения, получим

$$\begin{cases} -A = -1, \\ -B = 0, \\ 2A - C = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = 2, \end{cases} \quad \to \quad y_2 = x^2 + 2.$$

Следовательно, $y_ч = y_1 + y_2 = xe^x + x^2 + 2.$

3) Общее решение уравнения (535):

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.}$$

Домашнее задание

[Ф] №№ 520, 522, 525, 527, 529, 536.

16.04.2021

Занятие № 9

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

№ 538 [Ф]: $y'' + y = 4\sin x.$ (538)

1) $\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

2) $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \alpha + i\beta = \lambda_1$. По правилу 4 имеем

$$y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

1	$y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$
0	$(y_ч)' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$
1	$(y_ч)'' = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x)$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения:

$\cos x$	$2B = 0$
$\sin x$	$-2A = 4$
$x\cos x$	$A - A = 0$
$x\sin x$	$B - B = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -2, \\ B = 0 \end{cases}$$

Следовательно, $y_ч = -2x\cos x$.

3) Общее решение уравнения (538):

$$\boxed{y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x.}$$

№ 540 [Ф]: $y'' - 3y' + 2y = x\cos x.$ (540)

1) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,\quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\quad y_{одн} = C_1e^x + C_2e^{2x}.$

2) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \alpha + i\beta \ne \lambda_{1,2}$. По правилу 3 имеем

$$y_ч = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

2	$y_ч = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$
–3	$(y_ч)' = -(Ax + B - C)\sin x + (Cx + D + A)\cos x$
1	$(y_ч)'' = -(Ax + B - 2C)\cos x - (Cx + D + 2A)\sin x$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения:

$\cos x$	$2B-3D-3A-B+2C=0$
$\sin x$	$2D+3B-3C-D-2A=0$
$x\cos x$	$2A-3C-A=1$
$x\sin x$	$2C+3A-C=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A-B-2C+3D=0, \\ 2A-3B+3C-D=0, \\ A-3C=1, \\ 3A+C=0. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдем

$$A=\frac{1}{10},\quad B=-\frac{3}{25},\quad C=-\frac{3}{10},\quad D=-\frac{17}{50}.$$

Следовательно, $y_ч=(0,1x-0,12)\cos x-(0,3x+0,34)\sin x.$

3) Общее решение уравнения (538):

$$\boxed{y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(0,1x-0,12)\cos x-(0,3x+0,34)\sin x.}$$

№ 583 [Ф]: $y''+y=4e^x,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=-3.$ (583)

Сначала найдем общее решение уравнения.

1) $\lambda^2+1=0,\quad \lambda_{1,2}=\pm i,\quad y_{одн}=C_1\cos x+C_2\sin x.$

2) $a=1,\quad a\neq\lambda_{1,2},\quad y_ч=Ae^x.$

Подставляя это выражение в уравнение (583) вместо y, получим

$$Ae^x+Ae^x=4e^x,\ 2Ae^x=4e^x,\quad A=2.$$

3) Общее решение уравнения:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+2e^x. \qquad (583.1)$$

Подчинив найденное решение двум заданным условиям $y(0)=4$ и $y'(0)=-3,$, получим уравнения для нахождения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 2 = 4, \\ y'(0) = C_2 + 2 = -3, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2, \quad C_2 = -5.$$

Подставив найденные коэффициенты C_1 и C_2 в (583.1), получим частное решение заданного уравнения, удовлетворяющее заданным условиям:

$$\boxed{y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x.}$$

№ 546 [Ф]: $y'' + y = x\sin x.$ (546)

1) $\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

2) $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \alpha + i\beta = \lambda_1$. По правилу 4 имеем

$$y_ч = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

1	$y_ч = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$
0	$(y_ч)' = (Cx^2 + (2A + D)x + B)\cos x + {}$ $+ (-Ax^2 + (2C - B)x + D)\sin x$
1	$(y_ч)'' = (-Ax^2 + (4C - B)x + 2(A + D))\cos x -$ $-(Cx^2 + (4A + D)x - 2(C - B))\sin x$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения, получим

$\cos x$	$2(A + D)$
$\sin x$	$2(C - B)$
$x\cos x$	$4C - B + B = 4C$
$x\sin x$	$-4A - D + D = -4A$
$x^2\cos x$	$A - A = 0$
$x^2\sin x$	$C - C = 0$

и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения, будем иметь:

$$A+D=0, \quad C-B=0, \quad C=0, \quad -4A=1.$$

Отсюда найдем: $A=-\dfrac{1}{4}, \quad B=C=0, \quad D=-A=\dfrac{1}{4}.$

Следовательно, $y_ч=\dfrac{1}{4}(\sin x - x\cos x)\cdot x.$

3) Общее решение уравнения (546):

$$\boxed{y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}(x\cdot\sin x-x^2\cos x).}$$

Домашнее задание

[Ф] №№ **537, 539, 541, 543, 584**.

19.04.2021

Занятие № 10

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные уравнения

№ 548 [Ф]: $y''-5y'=3x^2+\sin 5x.$ (548)

1) $\lambda^2-5\lambda=0, \quad \lambda_1=0, \; \lambda_2=5, \quad y_{одн}=C_1+C_2e^{5x}.$

2) Используя принцип суперпозиции, установим вид частного решения:

а) $f_1(x)=3x^2, \; a=0=\lambda_1$. Согласно правилу 2, соответствующую функцию y_1 ищем в виде $y_2=x(Ax^2+Bx+C)$:

$$(Ax^3+Bx^2+Cx)''-5(Ax^3+Bx^2+Cx)'=3x^2,$$

$$6Ax+2B-15Ax^2-10Bx-5C=3x^2, \quad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} -15A=3, \\ 6A-10B=0, \\ 2B-5C=0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} A=-\dfrac{1}{5}, \\ B=-\dfrac{3}{25}, \\ C=-\dfrac{6}{125} \end{cases} \quad \to$$

$$\to \quad y_1=-\frac{1}{125}(25x^3+15x^2+6x).$$

б) $f_2(x)=\sin 5x, \quad a=5i\neq\lambda_{1,2}, \quad y_2=A\cos 5x+B\sin 5x:$

$$(A\cos 5x+B\sin 5x)''-5(A\cos 5x+B\sin 5x)'=\sin 5x,$$

$$-25(A+B)\cos x+25(A-B)\sin 5x=\sin 5x,$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 25(A-B)=1 \end{cases} \quad \to \quad A=-B=\frac{1}{50} \quad \to \quad y_2=\frac{1}{50}(\cos 5x-\sin 5x).$$

Следовательно,

$$y_ч=y_1+y_2=-\frac{1}{125}(25x^3+15x^2+6x)+\frac{1}{50}(\cos 5x-\sin 5x).$$

3) Общее решение уравнения (548):

$$\boxed{y=C_1+C_2e^{5x}-\frac{1}{125}(25x^3+15x^2+6x)+\frac{1}{50}(\cos 5x-\sin 5x).}$$

№ 549 [Ф]: $y''-2y'+2y=e^x+x\cos x.$ (549)

Характеристическое уравнение: $H(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+2=0.$

$f_1(x)=e^x$	$a=1,\ \ P_0(x)=1,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $H(1)=1\neq 0$
Правило 1 $\rightarrow\ \ y_1=Ae^x$	
$f_2(x)=x\cos x$	$a=\alpha+i\beta=i,\ \ P_1^1(x)=x,\ \ P_0^2(x)=0,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $H(i)=1-2i\neq 0$
Правило 3 $\rightarrow\ y_2=(Bx+C)\cos x+(Dx+E)\sin x$	

Таким образом, частное решение уравнения (549) имеет вид:

$$\boxed{y_{част}=y_1+y_2=Ae^x+(Bx+C)\cos x+(Dx+E)\sin x.}$$

№ 550 [Ф]: $y''+6y'+10y=3xe^{-3x}-2e^{3x}\cos x.$ (550)

Характеристическое уравнение $H(\lambda)=\lambda^2+6\lambda+10=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-3\pm i$

$f_1(x)=3xe^{-3x}$	$a=-3,\ \ P_1(x)=3x,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a\neq\lambda_{1,2}$
Правило 1 $\rightarrow\ \ y_1=(Ax+B)e^{-3x}$	
$f_2(x)=-2e^{3x}\cos x$	$a=\alpha+i\beta=3+i,\ \ P_0^1(x)=-2,\ P_0^2(x)=0,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a\neq\lambda_{1,2}$
Правило 3 $\rightarrow\ y_2=e^{3x}(C\cos x+D\sin x)$	

Таким образом, частное решение уравнения (550) имеет вид:

$$\boxed{y_{част} = y_1 + y_2 = (Ax+B)e^{-3x} + e^{3x}(C\cos x + D\sin x).}$$

Замечание. В случае, когда $f_2(x) = -2e^{-3x}\cos x$, соответствующая часть частного решения (функция y_2) будет иметь вид:

$$y_2 = e^{-3x}(C\cos x + D\sin x)\cdot x,$$

так как $a = \alpha + i\beta = -3 + i$ является простым корнем характеристического уравнения.

№ 551 [Ф]: $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x.$ (551)

Характеристическое уравнение $H(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm 2i.$

$f(x) = 5xe^{4x}\sin 2x$	$a = \alpha + i\beta = 4 + 2i,\ P_0^1(x) = 0,\ P_1^2(x) = 5x,$ a является корнем характеристического уравнения, т.к. $a = \lambda_1$

Таким образом, в соответствии с **правилом 4** частное решение уравнения (551) имеет вид:

$$\boxed{y_{част} = xe^{4x}((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x).}$$

№ 555 [Ф]: $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3x\sin x).$ (555)

Характеристическое уравнение $H(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$

$f_1(x) = x^2e^{4x}$	$a = 4,\ \ P_2(x) = x^2,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a \neq \lambda_{1,2}$

Правило 1 $\rightarrow$ $y_1 = (Ax^2 + Bx + C)e^{4x}$	
$f_2(x) = -3xe^{4x}\sin x$	$a = \alpha + i\beta = 4 + i,\ \ P_0^1(x) = 0,\ P_1^2(x) = 3x,$ a является корнем характеристического уравнения, т.к. $a = \lambda_1$
Правило 4 $\rightarrow$ $y_2 = xe^{4x}((Dx + E)\cos x + (Fx + G)\sin x)$	

Таким образом, частное решение уравнения (555) имеет вид:

$$\boxed{\begin{gathered} y_{част} = y_1 + y_2 = \\ = (Ax^2 + Bx + C)e^{4x} + xe^{4x}((Dx + E)\cos x + (Fx + G)\sin x). \end{gathered}}$$

№ 569 [Ф]: $y^{\mathrm{IV}} + 5y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x.$ (569)

Найдем корни характеристического уравнения:

$$H(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_{3,4} = \pm 2i.$$

Для правой части уравнения имеем:

$$\sin x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x.$$

$f_1(x) = \frac{1}{2}\sin 3x$	$a = \alpha + i\beta = 3i,\ \ P_0^1(x) = 0,\ P_0^2(x) = \frac{1}{2},$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a \neq \lambda_{1,2}$
Правило 3 $\rightarrow$ $y_1 = A\cos 3x + B\sin 3x$	
$f_2(x) = -\frac{1}{2}\sin x$	$a = \alpha + i\beta = i,\ \ P_0^1(x) = 0,\ P_0^2(x) = \frac{1}{2},$

	a является корнем характеристического уравнения, т.к. $a \neq \lambda_1$

Правило 3 $\rightarrow$ $y_2 = x(C\cos x + D\sin x)$

Таким образом, частное решение уравнения (569) имеет вид:

$$\boxed{y_{част} = y_1 + y_2 = A\cos 3x + B\sin 3x + x(C\cos x + D\sin x).}$$

Метод вариации (метод Лагранжа)

Если известна фундаментальная система $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ решений однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

то общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \qquad (2)$$

может быть **всегда** найдено с помощью **метода вариации произвольных постоянных** (**метода Лагранжа**). При этом общее решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i, \qquad (3)$$

где функции $c_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0, \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (4)$$

Относительно $c_i'(x)$ $(i = \overline{1,n})$ система (4) является системой n линейных неоднородных алгебраических уравнений, определитель матрицы которой (главный определитель системы) является определителем Вронского системы функций $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ и отличен от 0. Поэтому система (4) имеет единственное решение:

$$c_i'(x) = \psi_i(x), \quad i = \overline{1,n},$$

откуда находим

$$c_i(x) = \int \psi_i(x)dx + C_i, \tag{5}$$

где $C_i\ (i = \overline{1,n})$ –произвольные постоянные. Подставляя выражения (5) в (3), получим общее решение неоднородного уравнения (2) в виде:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + \sum_{i=1}^{n}\left(\int \psi_i(x)dx\right)y_i. \tag{6}$$

Метод вариации будем применять в случаях, когда по виду правой части уравнения (2) затруднительно предложить вид частного решения и найти его методом неопределенных коэффициентов.

№ 575 [Ф]: $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}.$ (575)

Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda = 1$ кратности $k = 2$, то общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ имеет вид $y = C_1e^x + C_2xe^x$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные. Общее решение заданного уравнения будем искать в виде

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x, \tag{575.1}$$

где $c_1(x),\ c_2(x)$ – неизвестные пока непрерывно дифференцируемые функции. Согласно методу вариации произвольных постоянных, для их нахождения составим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0, \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^x(x+1) = \dfrac{e^x}{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x = 0, \\ c_1'(x) + c_2'(x)(x+1) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Отсюда найдем $c_1'(x) = -1, \;\; c_2'(x) = \dfrac{1}{x}$. Интегрирование полученных уравнений дает $c_1(x) = -x + C_1, \;\; c_2(x) = \ln|x| + C_2$. Найденные выражения для $c_1(x)$ и $c_2(x)$ подставляем в (575.1). В результате получим общее решение заданного уравнения

$$y = e^x(C_1 - x + x\ln|x| + C_2 x)$$

Приводя подобные слагаемые, ответ можно записать так:

$$\boxed{y = e^x(C_1 + x\ln|x| + C_2 x)}$$

№ 577 [Ф]: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$. (577)

1. Так как $\lambda^2 + 1 = 0 \;\; \rightarrow \;\; \lambda_{1,2} = \pm i$, то общее решение однородного уравнения, соответствующего заданному, имеет вид:
$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$
2. Общее решение заданного уравнения (577) ищем в виде:
$$y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x.$$
3. Составим систему для нахождения функций $c_1(x), \; c_2(x)$:
$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -1, \\ c_2'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}. \end{cases}$$

   Интегрирование уравнений дает:
$$c_1(x) = -x + C_1, \quad c_2(x) = \ln|\sin x| + C_2.$$

4. Общее решение заданного уравнения:

$$\boxed{y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x.}$$

Домашнее задание

[Ф] №№ 553, 559, 562, 574, 578, 579.

30.04.2021

Занятие № 11

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные уравнения

№ 588 [Ф]: $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 2\cos x, \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 1,$
$y''(0) = y'''(0) = 0.$ (588)

1. Так как $\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \iff \lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_{3,4} = \pm i,$ то общее решение однородного уравнения $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 0$ имеет вид:
$$y = C_1 + C_2 x + C_3\cos x + C_4\sin x.$$
2. Определим вид частного решения по виду правой части:
$$y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

0	$y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$
0	$(y_ч)' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$
1	$(y_ч)'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$
0	$(y_ч)''' = -3A\cos x - 3B\sin x + x(A\sin x - B\cos x)$

$$1 \quad \Big| \quad (y_ч)^{IV} = 4A\sin x - 4B\cos x + x(A\cos x + B\sin x)$$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения, получим

$\cos x$	$-2B$
$\sin x$	$2A$
$x\cos x$	$-A + A = 0$
$x\sin x$	$-B + B = 0$

и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения, будем иметь:

$$-2B = 2 \;\to\; B = -1, \quad 2A = 0 \;\to\; A = 0.$$

Следовательно, частное решение $y_ч = -x\sin x.$

3. Общее решение заданного уравнения (588) имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x\sin x.$$

4. Используя заданные начальные условия, найдем постоянные C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_3 = -2, \\ y'(0) = C_2 + C_4 = 1, \\ y''(0) = -C_3 - 2 = 0, \\ y'''(0) = C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = -2, \quad C_4 = 0.$$

В результате получили частное решение заданного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$\boxed{y = x - 2\cos x - x\sin x.}$$

№ 607 [Ф]: $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}.$ (607)

1. Так как $\lambda^2+2\lambda+1=0 \quad \to \quad \lambda_1=\lambda_2=-1,$ то общее решение однородного уравнения $y''+2y'+y=0$ имеет вид:
$$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}.$$
2. Общее решение заданного уравнения (607) ищем в виде:
$$y=e^{-x}c_1(x)+c_2(x)xe^{-x}.$$
3. Составим систему для нахождения функций $c_1(x),\ c_2(x)$:
$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)xe^{-x}=0, \\ -c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)e^{-x}(1-x)=xe^x+\dfrac{1}{xe^x}, \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1'(x)+c_2'(x)x=0, \\ -c_1'(x)+c_2'(x)(1-x)=xe^{2x}+\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$
Решив систему, найдем $c_1'(x)=-x^2e^{2x}-1,\ \ c_2'(x)=xe^{2x}+\dfrac{1}{x}.$

Интегрирование уравнений дает:
$$c_1(x)=-\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)-x+C_1,$$
$$c_2(x)=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+\ln|x|+C_2.$$
4. Общее решение заданного уравнения:
$$y=\left(-\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)-x+C_1\right)e^{-x}+$$
$$+\left(\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+\ln|x|+C_2\right)xe^{-x}=$$
$$=\left(C_1+x\ln|x|+(C_2-1)x\right)e^{-x}+\frac{x-1}{4}e^{x}.$$
Ответ можно записать следующим образом

$$\boxed{y=\left(C_1+x\ln|x|+C_2x\right)e^{-x}+\frac{x-1}{4}e^{x}.}$$

Замечание. Общее решение заданного уравнения можно найти и таким способом:

1. **Методом вариации произвольных постоянных найти** $Y(x)$ **– общее решение неоднородного уравнения:** $y''+2y'+y=\dfrac{1}{xe^{x}}$.

   При этом общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $Y=e^{-x}c_1(x)+c_2(x)xe^{-x}$. Находим функции $c_1(x)$, $c_2(x)$, решая систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)xe^{-x}=0, \\ -c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)e^{-x}(1-x)=\dfrac{1}{xe^{x}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x)+c_2'(x)x=0, \\ -c_1'(x)+c_2'(x)(1-x)=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

   Отсюда получим: $c_1'(x)=-1$, $c_2'(x)=\dfrac{1}{x}$. И после интегрирования найдем $c_1(x)=-x+C_1$, $c_2(x)=\ln|x|+C_2$. Следовательно,

$$Y(x)=\left(C_1-x+x\ln|x|+C_2x\right)e^{-x}$$

или $Y(x)=\left(C_1+x\ln|x|+C_2x\right)e^{-x}$

2. **Методом неопределенных коэффициентов найти** $y_ч$ **– частное решение уравнения** $y''+2y'+y=xe^{x}$.

   Частное решение ищем в виде $y_ч=(Ax+B)e^{x}$. Имеем

1	$y_ч=(Ax+B)e^{x}$
2	$(y_ч)'=(Ax+A+B)e^{x}$
1	$(y_ч)''=(Ax+2A+B)e^{x}$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения, получим $4Axe^x + 4(A+B)e^x = xe^x$. Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях в правой и левой частях уравнения, найдем $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Следовательно, частное решение $y_ч = \frac{1}{4}(x-1)e^x$.

3. **Общее решение уравнения (607) – это сумма** $y(x) = Y(x) + y_ч$:

$$y(x) = \left(C_1 + x\ln|x| + C_2 x\right)e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x.$$

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Уравнение Эйлера

Линейное дифференциальное уравнение сохраняет свой вид при любой замене независимой переменной, причем однородное уравнение остается однородным. Этим свойством можно воспользоваться для того, чтобы попытаться привести данное линейное уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами. Так, уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

которое называют **уравнением Эйлера**, при $x > 0$ с помощью замены $x = e^t$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \ \ldots \ + b_{n-1} u' + b_n u = g(t), \qquad (2)$$

где $u(t) = y(e^t)$, $g(t) = f(e^t)$. Полученное таким образом уравнение (2) решается способом, рассмотренным на предыдущих занятиях. Построив общее решение уравнения (2), необходимо выполнить обратную замену $t = \ln x$. В результате будет построено общее решение уравнения (1).

Замечание 1. При $x < 0$ замена $x = -e^t$ приводит к общему решению того же вида (с заменой x на $-x$). Поэтому достаточно найти общее решение уравнения при $x > 0$ и заменить в нем x на $|x|$.

№ 589 [Ф]: $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$ (589)

1) При $x > 0$, если выполнить замену $x = e^t$ и обозначить $u(t) = y(e^t)$, будем иметь:

$$y(x) = u(\ln x),$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = u' \cdot \frac{d(\ln x)}{dx} = u' \cdot \frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(u' \cdot \frac{1}{x}\right) = u'' \cdot \frac{1}{x^2} - u' \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (589), получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$u'' - 5u' + 6u = 0. \qquad (589.1)$$

Т.к. соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, то общим решением уравнения (589.1) будет

$$u = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}. \qquad (589.2)$$

Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3. \qquad (589.3)$$

2) При $x < 0$, выполнив замену $x = -e^t$ и обозначив $u(t) = y(-e^t)$, будем иметь:

$$y(x)=u(\ln(-x)),$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=u'\cdot\frac{d(\ln(-x))}{dx}=u'\cdot\frac{1}{x},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(u'\cdot\frac{1}{x}\right)=u''\cdot\frac{1}{x^2}-u'\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (589), получим уравнение с постоянными коэффициентами (589.1). Его общее решение имеет вид (589.2). А, возвращаясь к старым переменным, получим $y=C_1(-x)^2+C_2(-x)^3=C_1x^2-C_2x^3.$

Еще раз заметим, что при $x<0$ замена $x=-e^t$ приводит к общему решению того же вида (с заменой x на $-x$). Поэтому достаточно было найти общее решение уравнения при $x>0$ и заменить в нем x на $|x|$.

3) В силу произвольности коэффициентов C_1 и C_2 общее решение заданного уравнения можно записать так:

$$\boxed{y=C_1x^2+C_2x^3.}$$

Замечание 2. Построить решение однородного уравнения Эйлера можно гораздо проще, если исходить из того, что решение уравнения Эйлера, когда $x>0$, ищется в виде $y=e^{\lambda t}=\left(e^t\right)^\lambda=x^\lambda$. Подставив x^λ в уравнение (1) (когда $f(x)=0$) и разделив правую и левую части уравнения на x^λ, получим соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+2)+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Простому корню λ_1 характеристического уравнения соответствует решение x^{λ_1}, а k-кратному корню λ_1 соответствует k линейно независимых решений вида x^{λ_1}, $x^{\lambda_1}\ln x$, $x^{\lambda_1}\ln^2 x$, ..., $x^{\lambda_1}\ln^{k-1} x$. Если коэффициенты уравнения Эйлера вещественные, а характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_0 = \alpha \pm i\beta$ кратности k, то уравнение Эйлера имеет $2k$ линейно независимых решений вида

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\cos(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{k-1}\cos(\beta\ln x),$$

$$x^{\alpha}\sin(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\sin(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{k-1}\sin(\beta\ln x).$$

Замечание 3. В записи общего решения уравнения Эйлера, рассматриваемого при любых $x \neq 0$, переменную x следует заменить на $|x|$.

№ 589 [Ф]: $x^2y''-4xy'+6y=0.$ (589)

Для построения фундаментальной системы решений будем искать решение заданного уравнения в виде $y = x^{\lambda}$. Подставив это выражение в (589), будем иметь

$$x^2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-2}-4x\lambda x^{\lambda-1}+6x^{\lambda}=0 \ \rightarrow\ \lambda(\lambda-1)-4\lambda+6=0,$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0, \quad (\lambda-2)(\lambda-3)=0.$$

Полученное характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, которым соответствуют два линейно независимых решения заданного уравнения x^2 и x^3. Следовательно, общим решением уравнения (589) будет

$$\boxed{y = C_1x^2 + C_2|x|^3,}$$

которое в силу произвольности C_2 можно записать и так

$$\boxed{y = C_1x^2 + C_2x^3.}$$

Домашнее задание

[Ф] №№ 585, 587, 590, 592.

14.05.2021

Занятие № 12

Неоднородное уравнение Эйлера

Для неоднородного уравнения Эйлера, когда $f(x)=P(\ln x)x^{\alpha}$, где P – полином, частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов (учитывая, что замена $x=e^{t}$ приводит правую часть к виду $g(t)=P(t)e^{\alpha t}$, и при определении вида частного решения используются правила, рассмотренные на занятии 7). В общем случае для решения неоднородного уравнения (1) следует вначале найти функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$, образующие фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения. Затем воспользоваться **методом вариации произвольных постоянных** (**методом Лагранжа**). При этом общее решение неоднородного уравнения (1) ищется в виде:

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i, \tag{3}$$

где функции $c_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2+\ldots+c_n'(x)y_n=0, \\ c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'+\ldots+c_n'(x)y_n'=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}+c_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}=\dfrac{f(x)}{x^n}. \end{cases} \tag{4}$$

☑ **Обратите внимание на правую часть последнего уравнения системы (4). Здесь в знаменателе – коэффициент при $y^{(n)}$ из левой части уравнения (1).**

№ 593 [Ф]: $x^2y''-xy'+y=8x^3.$ (593)

1 способ. Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $x^2y''-xy'+y=0$. Построив характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1)-\lambda+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda-1)^2=0,$$

и установив его корни $\lambda_1=\lambda_2=1$, получим общее решение соответствующего однородного уравнения в виде $y_{одн}=C_1x+C_2x\ln|x|$.
Частное решение уравнения (593) можно найти методом неопределенных коэффициентов, если искать его в виде[2] $y_ч=Ax^3$. Подстановка этого выражения в заданное уравнение дает:

$$x^2\cdot 6Ax-x\cdot 3Ax^2+Ax^3=8x^3,\quad 4Ax^3=8x^3 \quad\to\quad A=2.$$

Следовательно, $y_ч=2x^3$. И тогда общим решением уравнения (593) будет

$$\boxed{y=y_{одн}+y_ч=x(C_1+C_2\ln|x|)+2x^3.}$$

№ 593 [Ф]: $x^2y''-xy'+y=8x^3$. (593)

2 способ. Решение неоднородного уравнения можно построить и методом вариации произвольных постоянных. Будем искать решение неоднородного уравнения (593) в виде:

$$y=c_1(x)x+c_2(x)x\ln|x|. \tag{593.1}$$

Для нахождения коэффициентов $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составим систему вида (4):

---

[2] Вид частного решения будет легче определить, если предварительно в правой части уравнения выполнить замену $x=e^t$. Так как $f(x)=8x^3=8e^{3t}$ и $a=3\neq\lambda_{1,2}$, то, по правилу 1, будем иметь $y_ч=Ae^{3t}=Ax^3$.

$$\begin{cases} c_1'(x)x + c_2'(x)x\ln|x| = 0, \\ c_1'(x) + c_2'(x)(1+\ln|x|) = 8x, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)\ln|x| = 0, \\ c_2'(x) = 8x. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $c_1'(x) = -8x\ln|x|$ и $c_2'(x) = 8x$. И после интегрирования будем иметь

$$c_1(x) = -4x^2\ln|x| + 2x^2 + C_1, \quad c_2(x) = 4x^2 + C_2.$$

Подставив найденные для $c_1(x)$ и $c_2(x)$ выражения в (593.1), получим общее решение заданного уравнения $\boxed{y = x(C_1 + C_2\ln|x|) + 2x^3.}$

№ 595 [Ф]: $x^3y'' - 2xy = 6\ln x.$ (595)

Уравнение рассматривается при $x > 0$. Поделив его правую и левую части на x, получим уравнение Эйлера:

$$x^2y'' - 2y = \frac{6\ln x}{x}. \tag{595.1}$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda(\lambda-1) - 2 = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения будет

$$y = C_1\frac{1}{x} + C_2x^2.$$

Решение неоднородного уравнения (595.1) найдем методом Лагранжа. При этом решение будем искать в виде

$$y = c_1(x)\frac{1}{x} + c_2(x)x^2. \tag{595.2}$$

Для нахождения коэффициентов $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составим систему вида (4):

$$\begin{cases} \dfrac{c_1'(x)}{x} + c_2'(x)x^2 = 0, \\ -\dfrac{c_1'(x)}{x^2} + 2c_2'(x)x = \dfrac{6\ln x}{x^3}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x^3 = 0, \\ -c_1'(x) + 2c_2'(x)x^3 = \dfrac{6\ln x}{x}, \end{cases}$$

решив которую, найдем

$$c_1'(x) = -\frac{2\ln x}{x}, \quad c_2'(x) = \frac{2\ln x}{x^4}.$$

После интегрирования полученных уравнений, найдем

$$c_1(x) = -\ln^2 x + C_1, \quad c_2(x) = -\frac{2\ln x}{3x^3} - \frac{2}{9x^3} + C_2.$$

Подставив найденные для $c_1(x)$ и $c_2(x)$ выражения в (595.2), получим общее решение заданного уравнения

$$y = \frac{C_1 - \ln^2 x}{x} + \left(C_2 - \frac{2\ln x}{3x^3} - \frac{2}{9x^3} \right) x^2,$$

которое можно привести к виду[3]

$$\boxed{y = C_2 x^2 + \frac{1}{x}\left(C_1 - \frac{2}{3}\ln x - \ln^2 x \right).}$$

Замечание. Можно найти частное решение уравнения (595.1) методом неопределенных коэффициентов. Правая часть уравнения (595.1) после замены $x = e^t$ примет вид $g(t) = 6e^{-t}t$. Так как $a = -1$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y_ч = t(At + B)e^{-t} = \frac{\ln x(A\ln x + B)}{x} = \frac{A\ln^2 x + B\ln x}{x}.$$

[3] Здесь, в силу произвольности C_1, после приведения подобных слагаемых коэффициент $C_1 - \frac{2}{9}$ заменен на C_1.

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **594, 596.**

Выполнить задания 1 и 3 **Контрольной работы № 3** (часть 2). Варианты заданий