[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

Занятие № 6 | № 7 | № 8 | № 9

6.10.2020

Занятие № 6 (часть 2)

Однородные уравнения

Интегрирование однородных уравнений

Определение 1. Функция $F(x, y)$ называется ***однородной***, если $\forall\ \lambda > 0$ справедливо тождество $F(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^k F(x, y)$. Число k называют ***порядком*** (или ***степенью***) однородной функции.

Примеры

$\dfrac{x}{y},\ \dfrac{x+2y}{3x-y},\ \dfrac{x^2+4y^2}{x^2}$	– однородные функции нулевого порядка, $k = 0$
$x+y,\ \dfrac{2x^2-y^2}{x+2y},\ \dfrac{3xy}{x-5y}$	– однородные функции порядка $k = 1$
$x^2-4xy,\ \dfrac{2x^3-2xy^2}{x+y}$	– однородные функции порядка $k = 2$

Определение 2. Уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

в котором правая часть $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка, называют ***однородным***.

Уравнение в дифференциалах
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$
будет ***однородным***, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными одного и того же порядка.

При $x \neq 0$, полагая $\lambda = \frac{1}{x}$, уравнение (1) приводится к виду
$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right),} \qquad (1')$$
а уравнение (2) – к виду:
$$\boxed{m\left(\frac{y}{x}\right)dx + n\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.} \qquad (2')$$
Здесь $g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1,\frac{y}{x}\right), \quad m\left(\frac{y}{x}\right) = M\left(1,\frac{y}{x}\right), \quad n\left(\frac{y}{x}\right) = N\left(1,\frac{y}{x}\right).$

Уравнения (1’) и (2’) с помощью замены
$$\boxed{z = \frac{y}{x}} \qquad (\text{т.е. } y = zx) \qquad (3)$$
приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Действительно. Так как $y' = z + xz'$, то уравнение (1’) при замене (3) приводится к виду:
$$z + xz' = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad xz' = g(z) - z. \qquad (4)$$
Так как $dy = zdx + xdz$, то уравнение (2’) при замене (3) приводится к виду
$$m(z)dx + n(z)(zdx + xdz) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\big(m(z) + zn(z)\big)dx + xn(z)dz = 0. \qquad (5)$$
(4) и (5) – уравнения с разделяющимися переменными.

№ 101 [Ф]: $(x + 2y)dx - xdy = 0.$ (101.1)

Уравнение (101.1) является однородным, так как для функций $M(x,y)=x+2y$ и $N(x,y)=-x$ имеем

$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+2\lambda y=\lambda(x+2y)=\lambda(x+2y)=\lambda M(x,y),$$
$$N(\lambda x,\lambda y)=-\lambda x=\lambda N(x,y).$$

Функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ – однородные 1-го порядка.

Легко установить, что $\boxed{x = 0}$ является решением заданного уравнения.

Поделив уравнение (101.1) на x, получим

$$\left(1+\frac{2y}{x}\right)dx-dy=0. \qquad (101.2)$$

Замена $y = zx$ в полученном уравнении дает:

$$(1+2z)dx-(zdx+xdz)=0 \iff (1+z)dx-xdz=0. \qquad (101.3)$$

Одним из решений уравнения (101.3) является $\boxed{z = -1}$.

Найдем остальные решения уравнения (101.3). Разделив переменные в уравнении (101.3), будем иметь

$$\frac{dz}{1+z}=\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{dz}{1+z}=\int\frac{dx}{x}+C, \quad \ln|1+z|=\ln|x|+C, \ C\in \mathrm{R}.$$

Полученный общий интеграл уравнения (101.3) можно преобразовать следующим образом:

$$|1+z|=e^C\,|x|, \ C\in R \iff 1+z=Cx, \ C\in R\setminus\{0\}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (101.3) будет

$$\boxed{z=Cx-1, \ C\in R.} \qquad (101.4)$$

(решение $z = -1$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (101.4), получим общее решение уравнения (101.2).

Ответ:

$$\boxed{\begin{aligned} &x=0,\\ &y=x(Cx-1), \quad C\in R.\end{aligned}}$$

№ 103 [Ф]: $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0.$ (103.1)

Функции $M(x,y)=y^2-2xy$ и $N(x,y)=x^2$ являются однородными порядка 2. Следовательно, заданное уравнение – однородное.

Одним из решений уравнения (103.1) является $\boxed{x=0}$.

При $x\neq 0$ поделив уравнение (103.1), получим:

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}\right)dx+dy=0. \qquad (103.2)$$

Выполнив замену $y=zx$, будем иметь:

$$(z^2-2z)dx+xdz+zdx=0, \qquad z(z-1)dx+xdz=0. \qquad (103.3)$$

Очевидно, $\boxed{z=0}$ и $\boxed{z=1}$ являются решениями уравнения (103.3).

Разделяя переменные в (103.3), найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{z(z-1)}=-\frac{dx}{x}, \qquad \int\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz=-\int\frac{1}{x}dx+\ln|C|, \quad C\in R\setminus\{0\},$$

$$\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|=-\ln|x|+\ln|C|, \qquad \frac{z-1}{z}=\frac{C}{x},\ C\in R\setminus\{0\}.$$

Получили все решения уравнения (103.3):

$$z=0, \qquad \frac{1}{z}=1-\frac{C}{x}, \quad C\in R. \qquad (103.4)$$

(решение $z = 1$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (103.4), получим все решения уравнения (103.2):

$$y=0, \quad x^2=y(x-C), \quad C\in R.$$

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} x=0,\\ y=0,\\ x^2=y(x-C), \quad C\in R. \end{array}}$$

Домашнее задание

[Ф] №№ **102, 104, 108, 325.**

13.10.2020

Занятие № 7

№ 82 [Ф]: Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

Обозначим:

$x(t)$ – температура куска металла через t минут после помещения в печь;

$y(t)$ – температура печи через t минут после начала повышения температуры.

Для $y(t)$ имеем:

$$y(t) = \alpha t + \beta, \;\; y(0) = a, \; y(60) = b \quad \Rightarrow \quad y(t) = a + \frac{b-a}{60} \cdot t.$$

Тогда для $x(t)$ будем иметь:

$$\begin{cases} x'(t) = k(y(t) - x(t)), \\ y(t) = a + \dfrac{b-a}{60} \cdot t, \\ x(0) = a. \end{cases} \qquad (1)$$

Задача (1) имеет решение $x(t)=a+\frac{b-a}{60}\cdot\left(t-\frac{1-e^{-kt}}{k}\right)$.

Тогда $x(60)=b-\frac{b-a}{60k}(1-e^{-60k})$.

Однородные уравнения

№ 107 [Ф]: $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$. (107.1)

Заметим, что $x\neq 0$. При этом уравнение (107.1) можно привести к виду:

$$y'=\frac{y}{x}+\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}. \qquad (107.2)$$

Уравнение (107.2) является однородным. Выполним в нем замену $y=zx$. В результате получим

$$z+xz'=z+\mathrm{tg}\,z,\qquad xz'=\mathrm{tg}\,z. \qquad (107.3)$$

Решая уравнение $\mathrm{tg}\,z=0$, найдем решения уравнения (107.3)

$$\boxed{z=\pi k,\ k\in Z,}$$

которые можем потерять при разделении переменных:

$$x\frac{dz}{dx}=\mathrm{tg}\,z,\qquad \frac{dz}{\mathrm{tg}\,z}=\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{dz}{\mathrm{tg}\,z}=\int\frac{dx}{x}+C,\ C\in R,$$

$$\ln|\sin z|=\ln|x|+\ln|C|,\quad C\in R\setminus\{0\},$$

$$\sin z=Cx,\quad C\in R\setminus\{0\}.$$

Так как $\sin z=0 \ \Rightarrow\ z=\pi k,\ k\in Z$, то общим решением уравнения (107.3) является следующее $\sin z=Cx,\ \ C\in R$. Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{\sin\frac{y}{x}=Cx,\quad C\in R.}$

№ 109 [Ф]: $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$. (109.1)

Область определения уравнения описывает неравенство $\dfrac{x+y}{x}>0.$

Поделив правую и левую часть уравнения (109.1) на x, получим

$$y'-\frac{y}{x}=\frac{x+y}{x}\ln\frac{x+y}{x},\quad y'=\frac{y}{x}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right). \qquad (109.2)$$

Следовательно, уравнение (109.1) является однородным. Полагая $y=zx$, для уравнения (109.2) будем иметь

$$z'x+z=z+(1+z)\ln(1+z) \quad \Leftrightarrow \quad xz'=(1+z)\ln(1+z). \qquad (109.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $\boxed{z = 0}$ является решением уравнения. Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\int\frac{dx}{x}+C,\quad C\in R,$$

$$\ln|\ln(1+z)|=\ln|x|+C,\qquad |\ln(1+z)|=C_1|x|,\quad C_1>0,$$

$$\boxed{\ln(1+z)=Cx,\quad C\in R\setminus\{0\}.}$$

Таким образом, общим решением уравнения (109.3) будет

$$\boxed{\ln(1+z)=Cx,\quad C\in R.} \qquad (109.4)$$

(решение z = 0 получается при C = 0)

Выполнив обратную замену в (109.4), получим общее решение уравнения (109.1).

Ответ: $\boxed{\ln\dfrac{x+y}{x}=Cx,\quad C\in R.}$

Замечание. Так как $\lim\limits_{z\to-1-}(z+1)\ln(1+z)=0$, то, если доопределить нулем правую часть уравнения (109.3) при $z=-1$, решением уравнения (109.3) будет и $z=-1$. Тогда и $\boxed{y=-x}$ будет решением уравнения (109.1).

Домашнее задание

[Ф] №№ 110, 115, 91.

20.10.2020

Занятие № 8

Разбор домашнего задания: № 91.

Уравнения, приводящиеся к однородному

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y-c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \qquad (*)$$

если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ с помощью подстановки $y = u+\beta, \quad x = v+\alpha,$

где α, β – решение системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$$

приводится к однородному уравнению

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1v+b_1u}{a_2v+b_2u}\right).$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$ то $a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1,$ и для уравнения (*) будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y-c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right) = g(a_1x+b_1y). \qquad (**)$$

Если $b_1 \neq 0,$ то, выполнив в уравнении (**) замену $z = a_1x+b_1y$, придем у уравнению

$$\frac{1}{b_1}\cdot\left(\frac{dz}{dx}-a_1\right)=g(z)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{dz}{dx}=b_1g(z)+a_1\,.$$

№ 114 [Ф]: $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0.$ (114.1)

С помощью замены $z=2x+y,\quad y=z-2x,$ уравнение (114.1) приводится к виду:

$$5(z-1)dx-(2z-3)dz=0. \qquad (114.2)$$

Очевидно, $\boxed{z=1}$ является решение. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$5dx-\frac{2z-3}{z-1}dz=0,\quad \int 5dx-\int\frac{2z-3}{z-1}dz=C,$$

$$5x-\int\left(2-\frac{1}{z-1}\right)dz=C,\qquad 5x-2z+\ln|z-1|=C,\quad C\in R.$$

Полученный общий интеграл можно привести к виду

$$z-1=C_1e^{2z-5x}.$$

В результате получили общее решение уравнения (114.2) **(решение z = 1 получается при C_1 = 0).**

Возвращаясь к переменным x и y, получим

Ответ: $\boxed{2x+y-1=Ce^{2y-x},\quad C\in R.}$

№ 116 [Ф]: $(x+4y)y'=2x+3y-5.$ (116.1)

Так как

$$\begin{cases}x+4y=0,\\ 2x+3y-5=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=4,\\ y=-1,\end{cases}$$

то с помощью подстановки

$$y=u-1,\quad x=v+4$$

уравнение (116.1) приводится к виду

$$(v+4u)\frac{du}{dv}=2v+3u,\quad (v+4u)du-(2v+3u)dv=0. \qquad (116.2)$$

Полученное уравнение является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u=zv$. Так как $du=vdz+zdv$, то для уравнения (116.2) будем иметь

$$v(1+4z)(vdz+zdv)=v(2+3z)dv,$$

$$v(1+4z)dz=-2(2z^2-z-1)dv,$$

$$v(1+4z)dz=-2(2z+1)(z-1)dv. \qquad (116.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $\boxed{z=1}$ и $\boxed{z=-{}^1/_2}$ являются его решениями ($v=0$ является решением уравнения (116.3), но не является решением уравнения (116.2), поэтому оно исключается из дальнейшего рассмотрения). Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)}dz=-\frac{dv}{v},\qquad \int\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)}dz=-\int\frac{dv}{v}+C,\quad C\in R.$$

Так как

$$\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)}=\frac{1}{3(2z+1)}+\frac{5}{6(z-1)},$$

то для уравнения (116.3) получим общий интеграл

$$\frac{1}{6}\ln|2z+1|+\frac{5}{6}\ln|z-1|+\ln|v|=C,\quad C\in R,$$

который можно преобразовать к виду

$$(2z+1)(z-1)^5v^6=C_1. \qquad (116.4)$$

Таким образом, получили решение уравнения (116.3) в виде (116.4).
(решения $z=1$ и $z=-1/2$ получаются при $C_1=0$)
Возвращаясь к переменным x и y:

$$z = \frac{u}{v} = \frac{y+1}{x-4},$$

Получим

$$\left(2\frac{y+1}{x-4}+1\right)\left(\frac{y+1}{x-4}-1\right)^5 (x-4)^6 = C,$$

$$(2y+x-2)(y-x+5)^5 = C.$$

Ответ: $\boxed{(y-x+5)^5(x+2y-2) = C,\ C \in R.}$

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **113, 117**.

Подготовка к самостоятельной работе

27.10.2020

Занятие № 9

Уравнения, приводящиеся к однородному

№ 118 [Ф]: $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$ (118.1)

1 способ. Так как $x+y-1 = x-3+y+2,$ то с помощью замены

$$u = y+2, \quad v = x-3,$$

уравнение (118.1) приводится к виду

$$\frac{du}{dv} = 2\left(\frac{u}{u+v}\right)^2 = 2\left(\frac{u/v}{u/v+1}\right)^2. \qquad (118.2)$$

Уравнение (118.2) является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u = zv$. Так как $du = vdz + zdv$, то для уравнения (118.2) будем иметь

$$\frac{vdz + zdv}{dv} = 2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2, \qquad v\frac{dz}{dv} = 2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 - z,$$

$$v\frac{dz}{dv} = -\frac{z(z^2+1)}{(z+1)^2} \qquad (118.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $\boxed{z = 0}$ является его решением. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)}dz = -\frac{dv}{v}, \quad \int \frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)}dz = -\ln|v| + C, \quad C \in R.$$

Так как

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2+1},$$

то будем иметь

$$\ln|z| + 2\,\mathrm{arctg}(z) = -\ln|v| + C, \quad \ln|z| + \ln|v| = -2\,\mathrm{arctg}(z) + C.$$

Полученный общий интеграл уравнения (118.3) можно привести к виду:

$$zv = C_1 e^{-2\,\mathrm{arctg}(z)}.$$

Таким образом, получили общее решение уравнения (118.3) **(решение $z = 0$ получается при $C_1 = 0$).**

Выполнив обратную замену $z = \dfrac{u}{v} = \dfrac{y+2}{x-3}$, получим ответ.

Ответ: $\boxed{y + 2 = Ce^{-2\,\mathrm{arctg}\frac{y+2}{x-3}}, \quad C \in R}$. (118.4)

Домашнее задание

[**Ф**] № **120, 402**

Подготовка к самостоятельной работе