



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.



[Занятие № 1](#)

[№ 2](#)

[№ 3](#)

[№ 4](#)

[№ 5](#)

1.09.2020

Занятие № 1

Составление дифференциальных уравнений семейства кривых

Для того чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (*)$$

где $C_i, (i = \overline{1, n})$ - произвольные постоянные принадлежащие некоторой области S , следует:

- 1) n раз продифференцировать равенство (*), считая y n раз непрерывно дифференцируемой функцией переменной x .
- 2) из получившихся соотношений и (*) исключить произвольные постоянные C_1, C_2, \dots, C_n .

№ 17 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий:

$y = e^{Cx}$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Пусть $y(x)$ = непрерывно дифференцируемое решение уравнения:

$$y = e^{Cx}, \quad (1)$$

Дифференцируя равенство (1) по переменной x , получим

$$y' = Ce^{Cx} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} y' = Cy. \quad (2)$$

Выразим C из (2):

$$C = \frac{y'}{y} \quad (y \neq 0).$$

Подставив полученное выражение в (1), получим дифференциальное уравнение

$$y = e^{xy'/y} \quad \text{или} \quad y \ln y = xy'.$$

№ 21 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий:

$x^2 + Cy^2 = 2y$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Дифференцируя равенство

$$x^2 + Cy^2 = 2y, \quad (1)$$

по переменной x , получим

$$2x + 2Cy y' = 2y', \quad Cy y' = y' - x.$$

Выразим C из последнего равенства

$$C = \frac{y' - x}{yy'} \quad (yy' \neq 0)$$

и подставим его в (1). В результате получим дифференциальное уравнение:

$$x^2 + \frac{y' - x}{yy'} y^2 = 2y \Leftrightarrow (x^2 - y)y' - xy = 0.$$

№ 27 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий:

$\ln y = ax + by$, где a, b – произвольные вещественные постоянные.

Дважды дифференцируя равенство

$$\ln y = ax + by, \quad (1)$$

по переменной x , получим

$$\frac{y'}{y} = a + by', \quad (2)$$

$$\frac{y''y - y'^2}{y^2} = by''. \quad (3)$$

Из (2) и (3) найдем

$$b = \frac{y''y - y'^2}{y^2 y''}, \quad a = \frac{y'^3}{y^2 y''} \quad (yy'' \neq 0),$$

которые и подставим в (1). В результате получим дифференциальное уравнений

$$\ln y = \frac{y'^3}{y^2 y''} x + \frac{y''y - y'^2}{y^2 y''} y \Leftrightarrow y^2 y'' (\ln y - 1) = y'^2 (y'x - y).$$

№ 30 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

Согласно условию, если C – абсцисса центра окружности, то $2C$ – его ордината. Уравнение окружностей радиуса 1 и с центром в точке $(C, 2C)$ имеет вид

$$(x - C)^2 + (y - 2C)^2 = 1. \quad (1)$$

Считая $y = y(x)$, продифференцируем равенство (1) по переменной x , получим

$$x - C + (y - 2C)y' = 0. \quad (2)$$

Из (2) выразим C :

$$C = \frac{x + yy'}{1 + 2y'}$$

и подставим в (1):

$$\left(x - \frac{x + yy'}{1 + 2y'}\right)^2 + \left(y - 2 \cdot \frac{x + yy'}{1 + 2y'}\right)^2 = 1.$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$(y - 2x)^2 (y'^2 + 1) = (1 + 2y')^2.$$

№ 31 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной Oy , и касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

Для параболы, которая имеет ось симметрии, параллельную оси Oy , и касается прямой $y = 0$ (это ось абсцисс Ox), вершина лежит на оси Ox . Общее уравнение семейства таких парабол имеет вид:

$$y = a(x - C)^2, \tag{1}$$

где: C – абсцисса вершины параболы, произвольная величина; a – коэффициент, который учитывает направление ветвей параболы и их отклонение от оси симметрии (пока произвольная величина).

Установим связь между параметрами a и C , используя условие касания параболы (1) прямой $y = x$. Пусть точка (x_0, y_0) – соответствующая параметру C точка касания параболы (1) прямой $y = x$ (рис. 1).

Имеем

$$\begin{cases} y'(x_0) = 2a(x_0 - C) = 1, \\ y_0 = x_0, \\ y_0 = a(x_0 - C)^2. \end{cases} \tag{2}$$

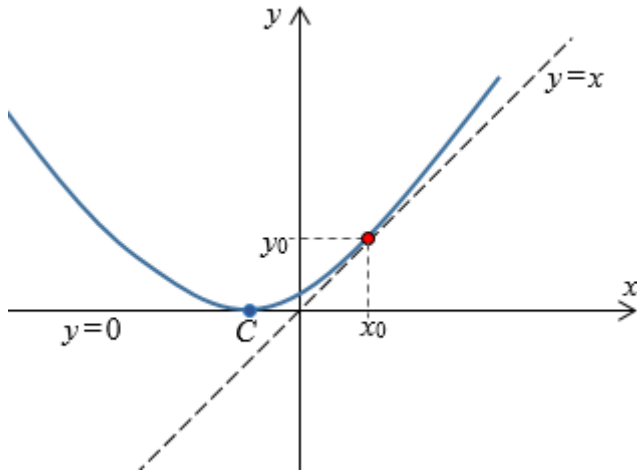


Рис. 1

Решая систему, найдем $a = -\frac{1}{4C}$, $C \neq 0$. Найденное a подставим в

(1). В результате получим уравнение семейства парабол, удовлетворяющих условию задания:

$$y = -\frac{(x-C)^2}{4C}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3)$$

Для построения соответствующего ему дифференциального уравнения, продифференцируем (3) по переменной x , считая $y = y(x)$. Будем иметь

$$y' = -\frac{x-C}{2C} \Leftrightarrow C = \frac{x}{1-2y'}.$$

Теперь из (3) можно исключить C следующим образом:

$$\begin{aligned} y = -\frac{(x-C)^2}{4C} &\rightarrow 2y = -\frac{x-C}{2C} \cdot (x-C) \rightarrow 2y = y' \cdot (x-C) \rightarrow \\ \rightarrow 2y = y' \cdot \left(x - \frac{x}{1-2y'} \right) &\rightarrow 2y = xy' \cdot \frac{-2y'}{1-2y'} \rightarrow x(y')^2 = y(2y'-1). \end{aligned}$$

Ответ: $x(y')^2 = y(2y'-1)$.



Домашнее задание

[Ф] №№ 17, 21 (построить на плоскости xOy семейство кривых, задавая различные значения параметра C);

[Ф] №№ 18, 20, 26, 32.

Уравнения с разделяющимися переменными (лекция).

8.09.2020

Занятие № 2.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

[Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными](#)

№ 52 [Ф]: Решить уравнение: $\sqrt{y^2 + 1} \cdot dx = xydy$. (1)

Очевидно, $x = 0$ является решением уравнения (1). Найдем остальные решения, выполнив разделение переменных в уравнении и проинтегрировав его

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad \ln |x| = \sqrt{y^2 + 1} + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Ответ: $x = 0$, $\ln |x| = \sqrt{y^2 + 1} + C$.

Заметим, что общий интеграл $\ln |x| = \sqrt{y^2 + 1} + C$ можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln |x| = \sqrt{y^2 + 1} + C &\Leftrightarrow |x| = A \cdot e^{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad A = e^C > 0, \\ x &= A \cdot e^{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad A \neq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение $x = 0$ можно получить из соотношения (2), если положить $A = 0$. Тогда ответ будет таким:

$$x = A \cdot e^{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

№ 54 [Ф]: Решить уравнение: $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$. (1)

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{ctg} x \frac{dy}{dx} = 2 - y.$$

Очевидно, $y = 2$ является решением уравнения (1). Найдем остальные:

$$\frac{dy}{y-2} = -\frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \quad \ln |y-2| = \ln |\cos x| + \ln |C|,$$

где C – произвольная постоянная, но $C \neq 0$. Последнее соотношение равносильно следующему

$$|y-2| = |C| |\cos x|, \quad y-2 = C \cos x.$$

Если положить $C = 0$, получим решение $y = 2$.

Ответ: $y - 2 = C \cos x$, $C \in \mathbb{R}$.

Замечание. Если уравнение (1) записать в дифференциалах:

$$\operatorname{ctg} x dy + (y-2)dx = 0,$$

то в ответ надо было бы включить и решения вида:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

т.е. когда $\operatorname{ctg} x = 0$.

№ 55 [Ф]: Решить уравнение: $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. (1)

Очевидно, $y = 0$ является решением уравнения (1). Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = dx, \quad \int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \int dx, \quad y^{1/3} = x + C, \quad y = (x + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y = 0$, $y = (x + C)^3$, $C \in \mathbb{R}$.

№ 60 [Ф]: Решить уравнение: $z' = 10^{x+z}$.

Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dz}{dx} = 10^x \cdot 10^z, \quad 10^{-z} dz = 10^x dx, \quad \int 10^{-z} dz = \int 10^x dx,$$

$$-\frac{10^{-z}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{C}{\ln 10}, \quad 10^{-z} = C - 10^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Полученный общий интеграл можно разрешить относительно z :

$$z = -\lg(C - 10^x).$$

Ответ: $z = -\lg(C - 10^x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$z = ax + by + c. \quad \text{Считая } z = z(x), \text{ получим } z' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}.$$

Тогда

$$y' = f(ax + by + c) \quad \stackrel{z=ax+by+c}{\Rightarrow} \quad z' = bf(z) + a.$$

№ 62 [Ф]: Решить уравнение: $y' = \cos(y - x)$. (1)

Уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если положить

$$y - x = z. \quad (2)$$

При этом будем иметь

$$\frac{d(z + x)}{dx} = \cos z, \quad \frac{dz}{dx} = \cos z - 1. \quad (3)$$

Правая часть уравнения $\cos z - 1 = 0$, если

$$z = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Очевидно, (4) являются решениями уравнения (3). Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx, \quad \int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx.$$

Так как $\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1 - \cos z}{2}$, то

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx, \quad -\int \frac{dz}{2\sin^2(z/2)} = \int dx, \quad \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Получив решения уравнения (3), вернемся к замене (2). В результате получим все решения уравнения (1).

Ответ: $y = x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = x + C, C \in \mathbb{R}.$



Домашнее задание

[Ф] №№ 51, 53, 56, 57, 58.

Разобрать примеры:

[Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными](#)

15.09.2020

Занятие № 3.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $y' = f(ax + by + c), a \neq 0, b \neq 0$, приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = ax + by + c$. Считая $z = z(x)$, получим $z' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$.

Тогда

$$y' = f(ax + by + c) \quad z = ax + by + c \quad \Rightarrow \quad z' = bf(z) + a.$$

№ 65 [Ф]: Решить уравнение: $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$. (1)

1 способ. Выполним замену

$$z = 4x + 2y - 1. \quad (2)$$

Так как

$$y' = \frac{z' - 4}{2},$$

то уравнение (1) приводится к виду

$$z' = 2\sqrt{z} + 4. \quad (3)$$

Заметим, что $2\sqrt{z} + 4 > 0$. Разделив переменные в уравнении (3), получим

$$\frac{dz}{2(\sqrt{z} + 2)} = dx, \quad \int \frac{dz}{2(\sqrt{z} + 2)} = \int dx + C,$$

где C – произвольная постоянная. Так как

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{2(\sqrt{z} + 2)} &= (\text{замена: } \sqrt{z} + 2 = t) = \\ &= \int \frac{t - 2}{t} dt = t - 2 \ln t = \sqrt{z} + 2 - 2 \ln(\sqrt{z} + 2), \end{aligned}$$

то интегрирование уравнения (3) дает

$$\sqrt{z} + 2 - 2 \ln(\sqrt{z} + 2) = x + C \quad \text{или} \quad \sqrt{z} - 2 \ln(\sqrt{z} + 2) = x + C.$$

Выполнив обратную замену (2), получим общий интеграл уравнения (1):

$$\boxed{\sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.} \quad (4)$$

2 способ. Уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными и с помощью замены

$$z = \sqrt{4x + 2y - 1}. \quad (5)$$

Тогда

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{4x + 2y - 1}} \cdot (4 + 2y') = \frac{1}{z} (2 + y') \Rightarrow y' = zz' - 2.$$

Таким образом, с помощью замены (5) уравнение (1) приводится к виду $zz' - 2 = z$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{zdz}{z+2} = dx, \quad \int \frac{zdz}{z+2} = \int dx + C, \quad z - 2\ln(z+2) = x + C.$$

Выполнив обратную замену (4), получим общий интеграл уравнения (1), совпадающий с (4).

Поиск решений, удовлетворяющих заданным условиям

№ 54 [Ф]: Найти решение уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, удовлетворяющее условию $y(x) \rightarrow -1$ при $x \rightarrow 0$.

Общее решение уравнения имеет вид ([см. занятие № 2](#)):

$$y = 2 + C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + C \cos x) = 2 + C = -1 \Rightarrow C = -3.$$

Следовательно, решением уравнения, удовлетворяющим заданному условию, является следующее $y = 2 - 3 \cos x$.

№ 55 [Ф]: Найти решение уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, удовлетворяющее условию $y(2) = 0$.

Из множества решений уравнения ([см. занятие № 2](#)):

$$y = 0, \quad y = (x + C)^3, \quad C \in \mathbb{R},$$

два удовлетворяют заданному условию:

$$y = 0, \quad y = (x - 2)^3.$$

№ 66 [Ф]: Решить уравнение $x^2 y' - \cos 2y = 1$. (1)

Найти решение уравнения, удовлетворяющее условию, удовлетворяющее условию $y(+\infty) = 9\pi/4$.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{\cos 2y + 1} = \frac{dx}{x^2}, \quad \frac{dy}{2\cos^2 y} = \frac{dx}{x^2}.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, будем иметь

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} y = C - \frac{1}{x}, \text{ или } y = \operatorname{arctg}\left(2C - \frac{2}{x}\right) + k\pi, \quad k \in Z.$$

Подчинив найденное решение заданному условию $y(+\infty) = 9\pi/4$, будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{tg} y(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(C - \frac{1}{x}\right), \\ y(+\infty) = \frac{9\pi}{4} \end{cases} \rightarrow C = \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} y(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(2C - \frac{2}{x}\right) + k\pi, \quad k \in Z, \\ C = 1/2, \\ y(+\infty) = \frac{9\pi}{4}, \\ \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \end{cases} \rightarrow \frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow k = 2.$$

Ответ: $y = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 2\pi$.



Домашнее задание

[Ф] №№ 63, 64, 67, 302, 309, 312.

22.09.2020

Занятие № 4

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Задача о площади листа виктории-регии

Скорость увеличения площади молодого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна радиусу листа R и количеству солнечного света Q , падающего на него. Количество солнечного света пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью к листу.



Немецкий ботаник Рихард Шомбургк вместе со старшим братом Робертом, известным путешественником, обследовавший по заданию Лондонского Географического общества Британскую Гвиану (ныне Республика Гайана), в заводях бассейна Амазонки обнаружил гигантскую кувшинку. В честь взошедшей полгода спустя на бри-

танский престол королевы Виктории она была названа викторией-регией, в переводе с латыни — «Виктория царственная». Круглые с бортами листья этой кувшинки достигают в диаметре 2 м и не тонут под грузом 50 кг, ее ароматные и пышные цветки «живут» около полутора суток, успевая за это время трижды поменять свой цвет.

Найдите зависимость между площадью листа S и временем t , если в 6 ч утра эта площадь составляла 1600 см^2 , а в 18 ч того же дня 2500 см^2 . Принять, что угол α между направлением луча Солнца и вертикалью в 6 ч утра и в 18 ч равен 90° , а в полдень -0° .

Ответ:
$$S(t) = \frac{400^2}{\left(\cos \frac{\pi t}{12} + 9\right)^2}.$$

№ 90 [M]: Решить уравнение:
$$y' = \frac{1}{x + y + 1}. \quad (1)$$

Рассмотрим перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = x + y + 1,$$

Для которого выполнив замену $z = x + y + 1$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1. \quad (2)$$

Очевидно, одним из решений уравнения (2) будет $z = -1$. Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1, \quad \frac{dz}{z + 1} = dy, \quad \int \frac{dz}{z + 1} = \int dy + C, \quad \ln |z + 1| = y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Заменив z на $(x + y + 1)$, получим все решения заданного уравнения:

$$x + y + 2 = 0, \quad \ln |x + y + 2| = y + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Так как

$$\ln |x + y + 2| = y + C, \quad C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x + y + 2 = C_1 e^y, \quad C_1 \neq 0,$$

то все решения (2) можно записать следующим образом:

$$x + y + 2 = C_1 e^y, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

№ 146 [М]: Решить уравнение:

$$(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) – уравнение с разделяющимися переменными:

$$y^2(1+x)dx + x^2(1-y)dy = 0.$$

Очевидно $x=0$ и $y=0$ являются решениями уравнения. Найдем другие решения, разделяя переменные:

$$\frac{1+x}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0, \quad \int \frac{1+x}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = C,$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|y| - \frac{1}{y} = C, \quad \ln \frac{|x|}{|y|} - \frac{x+y}{xy} = C, \quad C \in R.$$

В результате получили

Ответ: $x=0, y=0, \ln \frac{|x|}{|y|} - \frac{x+y}{xy} = C, C \in R.$



Домашнее задание

[М]: № 147: $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0.$

[Ф]: №№ 319, 352, 369

Дополнение к задаче о площади листа. Построить график функции $S(t)$ на промежутке $t \in [0; 12]$. Выяснить, в какой момент времени наблюдается максимальный прирост площади.

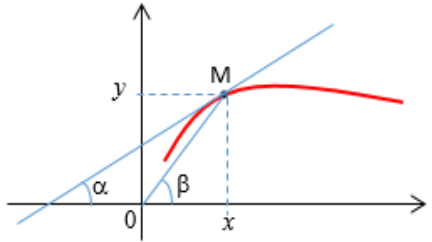
29.09.2020

Занятие № 5

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Задача о семействе кривых

Постройте уравнение семейства кривых, которые обладают следующим свойством: угловой коэффициент касательной к кривой в любой ее точке вдвое больше углового коэффициента радиус-вектора точки касания.



$$k_1 = 2k_2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow y' = 2 \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}, \quad \ln |y| = 2 \ln |x| + \ln |C|, \quad y = Cx^2.$$

Ответ: $y = Cx^2$, $C \neq 0$.

№ 68, а [Ф]:

Найти ортогональные траектории к линиям семейства $y = Cx^2$

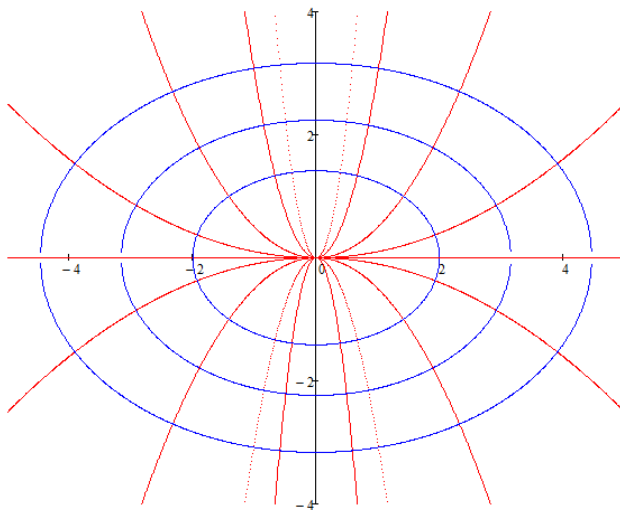
Сначала составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых. Дифференцируя по x уравнение заданного семейства (см. занятие № 1) и исключая параметр C , получим уравнение $y' = \frac{2y}{x}$. Заменяя в этом уравнении y' на $-1/y'$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий $y' = -\frac{x}{2y}$. Найдем его решение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \Leftrightarrow 2ydy = xdx, \quad \int 2ydy = \int xdx + C,$$

$$y^2 + x^2 / 2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $2y^2 + x^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Иллюстрация:



— Кривые заданного семейства (параболы и прямая $y = 0$)

— Ортогональные траектории (эллипсы)

№ 68, в [Ф]:

Найти ортогональные траектории к линиям семейства $Cx^2 + y^2 = 1$.

1. Составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых:

$$\begin{cases} Cx^2 + y^2 = 1, \\ Cx + yy' = 0, \end{cases} \Rightarrow xy y' = y^2 - 1.$$

2. Замена y' на $-1/y'$ дает дифференциальное уравнение ортогональных траекторий:

$$xy = (1 - y^2)y'. \quad (*)$$

3. Находим ортогональные траектории, решая уравнение (*):

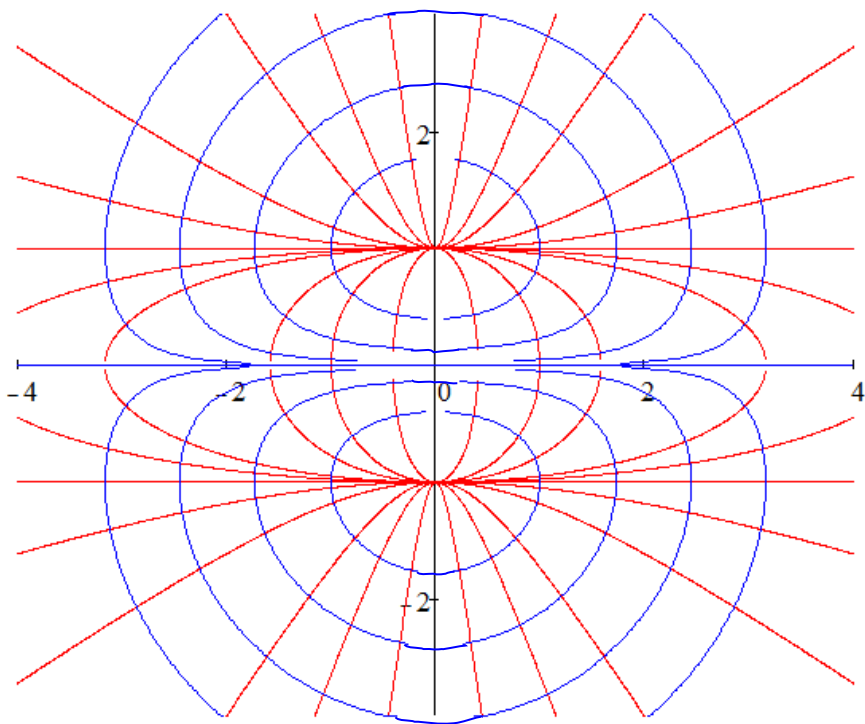
$$\frac{1-y^2}{y} dy = x dx, \quad \int \frac{1-y^2}{y} dy = \int x dx + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln|y| - y^2/2 = x^2/2 + C \Leftrightarrow y = C_1 e^{\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Учитывая, что $y = 0$ также является решением уравнения (*), получаем

Ответ: $y^2 = Ce^{x^2+y^2}, \quad C \geq 0.$

Иллюстрация:



— Кривые заданного семейства

— Ортогональные траектории

№ 80 [Ф]: Тело охладилось за 10 *мин* от 100°C до 60°C. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°C. Когда тело остынет до 25°C?

Замечание. Принять, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

Пусть t – независимая переменная, время (*мин*); $T(t)$ – температура тела (в °C) через t *мин* с того момента, когда температура тела было 100°C. Тогда условие задачи можно записать в виде следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T(t) - 20), \\ T(0) = 100, \quad T(10) = 60, \end{cases} \quad (*)$$

где k – пока неизвестный коэффициент пропорциональности. Дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет решение:

$$T(t) = Ce^{kt} + 20.$$

Подчинив его заданным граничным условиям, составим систему для нахождения постоянной C и коэффициента пропорциональности k :

$$\begin{cases} C + 20 = 100, \\ Ce^{10k} + 20 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 80, \\ e^{10k} = 1/2. \end{cases}$$

Тогда решением задачи (*) будет функция:

$$T(t) = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} + 20.$$

Найдем t , когда температура тела станет равной 25°C:

$$T(t) = 80 \cdot 2^{-t/10} + 20 = 25 \Rightarrow t = 40.$$

Ответ: 40 *мин.*



Домашнее задание

[Ф]: №№ 68 (б), 82.

6.10.2020

Занятие № 6 (1 часть)

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

№ 78 [Ф]: В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

Пусть t – независимая переменная, время (мин); $x(t)$ – количество соли в баке в момент времени t . Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. С одной стороны, это изменение определяет разность:

$$x(t + \Delta t) - x(t).$$

Так как в произвольный момент времени $\tau \in [t, t + \Delta t]$ концентрация соли в растворе составляет $x(\tau)/100$ (кг/л), то в момент времени τ убыль соли за счет вытекания смеси равна $5 x(\tau)/100$ (кг), а за время от t до $t + \Delta t$:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{5x(\tau)}{100} d\tau = \frac{1}{20} \int_t^{t+\Delta t} x(\tau) d\tau.$$

Таким образом, получаем

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -\frac{1}{20} \int_t^{t+\Delta t} x(\tau) d\tau.$$

(знак «–» определяет уменьшение количества соли в баке).

Применив к интегралу теорему о среднем, предполагая, что функция $x(\tau)$ является непрерывной, получим

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -\frac{1}{20} x(\tau^*) \Delta t, \quad \tau^* \in [t, t + \Delta t].$$

Разделим полученное соотношение на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Если считать функцию $x(\tau)$ непрерывно дифференцируемой, то в результате предельного перехода получим уравнение

$$x'(t) = -\frac{1}{20} x(t).$$

Построив общее решение уравнения $x(t) = Ce^{-t/20}$, где $C \in \mathbb{R}$, выделим из него частное, используя начальное условие $x(0) = 10$. Так как при этом $C = 10$, то изменение количества соли со временем будет описывать функция $x(t) = 10e^{-t/20}$. Теперь можно узнать, сколько соли в баке останется через 1 час: $x(60) = 10e^{-3}$.