[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

---

02.03.2020

Занятие № 4

Уравнения, допускающие понижение порядка

Некоторые типы уравнений, допускающих понижение порядка[1]

Дифференциальное уравнение n-го порядка (n > 1) имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

где F есть непрерывная функция своих аргументов, при этом левая часть зависит, по крайней мере, от старшей производной $y^{(n)}$.

Рассмотрим некоторые приемы понижения порядка уравнения (1), которые зависят от вида функции F.

I. Если уравнение (1) не содержит искомой функции, т.е. оно имеет вид $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, **то заменой** $z = y^{(k)}$ **получим уравнение** $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$, **порядок которого ниже на *k* единиц.**

---

[1] Подробнее см., например, в кн.: *Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004* (гл. IV, § 2–4).

№ 421 [Ф]: $x^2 y'' = (y')^2$. (421.1)

Заменой $z = y'$ уравнение приводится к виду $x^2 z' = z^2$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = 0$ является решением. Ненулевые решения найдем, разделяя переменные:

$$x^2 \frac{dz}{dx} = z^2, \qquad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}, \qquad \int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} - C_1,$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C_1, \quad z = \frac{x}{C_1 x + 1}, \quad C_1 \in R.$$

Возвращаясь к замене, получим:

1) $y' = 0, \quad y = C;$

2) $y' = \dfrac{x}{C_1 x + 1}$,

$$y = \int \frac{x dx}{C_1 x + 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + C, & \textit{если} \quad C_1 = 0, \\ \dfrac{1}{C_1}\left(x - \dfrac{1}{C_1} \ln|C_1 x + 1| + C_2 \right), & \textit{если} \quad C_1 \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{C_1 y = x - \frac{1}{C_1} \ln|C_1 x + 1| + C_2, \quad 2y = x^2 + C, \quad y = C.}$

№ 422 [Ф]: $2xy' y'' = (y')^2 - 1$ (422.1)

Заменой $y' = z$ понизим порядок уравнения, получим

$$2xzz' = z^2 - 1. \tag{422.2}$$

Уравнение (422.2) является уравнением с разделяющимися переменными. Для него $z = \pm 1$ – решения, и им соответствуют решения заданного уравнения:

$$y' = \pm 1 \quad \to \quad y = \pm x + C.$$

Другие решения найдем, разделяя переменные в уравнении (422.2):

$$\frac{2zdz}{z^2-1}=\frac{dx}{x} \;\to\; \ln\left|z^2-1\right|=\ln|x|+\ln|C_1| \;\to\; z^2=C_1x+1,\; C_1\neq 0,$$

$$(y')^2=C_1x+1 \;\to\; y'=\pm\sqrt{C_1x+1} \;\to\; y=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{3/2}+C_2,$$

$$9C_1^2(y-C_2)^2=4(C_1x+1)^3,\; C_1\neq 0.$$

Ответ: $\boxed{9C_1^2(y-C_2)^2=4(C_1x+1)^3; \quad y=\pm x+C.}$

II. Если уравнение (1) не содержит независимой переменной x, т.е. оно имеет вид $F\left(y, y', y'',\ldots, y^{(n)}\right)=0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв y за новую “независимую” переменную и сделав замену $y'=p(y)$. При такой замене для производных порядка выше первого будем иметь:

$$y''=\frac{d}{dx}\big(p(y)\big)=\frac{dp}{dy}\cdot y'=p'\cdot p,$$

$$y'''=\frac{d}{dx}\big(p'(y)p(y)\big)=\frac{d}{dy}\big(p'\cdot p\big)\cdot y'=\frac{d}{dy}\big(p'\cdot p\big)\cdot p=p''p^2+(p')^2p,$$

$$y^{(4)}=\frac{d}{dx}\left(p''p^2+(p')^2p\right)=\frac{d}{dy}\left(p''p^2+(p')^2p\right)\cdot y'=$$

$$=\frac{d}{dy}\left(p''p^2+(p')^2p\right)\cdot p=p'''p^3+4p''p'p^2+(p')^3p,$$

и т.д. Заметим, что $y^{(k)}=g_k(p, p', p'',\ldots, p^{(k-1)})$. Следовательно, при указанной замене будет получено уравнение $(n-1)$-го порядка относительно новой неизвестной функции p:

$$F_1\left(y, p, p', p'',\ldots p^{(n-1)}\right)=0.$$

№ 425 [Ф]: $y''=2yy'$. (425.1)

Выполнив замену $y' = p(y)$, получим

$$pp' = 2yp. \qquad (425.2)$$

Очевидно, $p = 0$ является решением. Для него будем иметь

$$y' = 0 \;\rightarrow\; y = C. \qquad (425.3)$$

Другие решения найдем, разделив обе части уравнения (425.2) на p:

$$pp' = 2yp \;\rightarrow\; p' = 2y \;\rightarrow\; p = y^2 + C, \;\; C \in R.$$

Выполнив обратную замену, получим уравнение:

$$y' = y^2 + C, \qquad (425.4)$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Построим его решение, рассматривая три случая:

1) Если $C = 0$, то будем иметь $y' = y^2$. Очевидно, оно имеет решение $y = 0$. Ненулевые решения найдем, разделяя переменные:

$$y' = y^2 \;\rightarrow\; \frac{dy}{y^2} = dx \;\rightarrow\; -\frac{1}{y} = x + C_1 \;\rightarrow\; y = -\frac{1}{x + C_1}.$$

2) Если $C > 0$, то, для удобства, обозначив $C = C_1^2$, решим уравнение $y' = y^2 + C_1^2$. Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{dy}{y^2 + C_1^2} = dx \;\rightarrow\; \frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = x + C_2 \rightarrow \operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = C_1(x + C_2).$$

3) Если $C < 0$, то, обозначив $C = -C_1^2$, будем иметь $y' = y^2 - C_1^2$. Очевидно, $y = \pm C_1$ являются решениями уравнения. Другие решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = dx \;\rightarrow\; \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = x + C_2.$$

Учитывая, что решения $y = 0$ и $y = \pm C_1$ входят в первое найденное множество решений (425.3), запишем ответ.

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{C_1} = C_1(x + C_2), \quad \ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1(x + C_2), \\ y = -\dfrac{1}{x + C}, \quad y = C.\end{array}}$$

III. Понижение порядка уравнения приведением обеих частей уравнения к полной производной

№ 456 [Ф]: $y'y''' = 2(y'')^2.$ (456.1)

Сначала понизим порядок уравнения заменой $z = y'$. В результате будем иметь:

$$z \cdot z'' = 2(z')^2. \tag{456.2}$$

Заметим, что $z = C_1$ является решением уравнения (456.2) и тогда, решая уравнение $y' = C_1$, найдем $y = C_1x + C_2$. Другие решения уравнения (456.3) найдем, выполнив следующую цепочку преобразований:

$$z \cdot z'' = 2(z')^2 \;\to\; \frac{z''}{z'} = \frac{2z'}{z} \;\to\; (\ln|z'|)' = 2(\ln|z|)' \;\to$$

$$\to\; \ln|z'| = \ln z^2 + \ln|-C_1| \;\to\; z' = -C_1z^2 \;\to\; \frac{dz}{z^2} = -C_1dx \;\to$$

$$\to\; -\frac{1}{z} = -C_1x - C_2 \;\to\; z = \frac{1}{C_1x + C_2}, \quad C_1 \neq 0.$$

Замечание. Уравнение (456.2) можно решить методом, рассмотренным в п. II, сделав замену $z' = p(z)$.

Возвращаясь к замене, будем иметь:

$$y' = \frac{1}{C_1x + C_2}, \; C_1 \neq 0 \;\to\; y = \frac{1}{C_1}\ln|C_1x + C_2| + C_3.$$

Ответ: $\boxed{y = \dfrac{1}{C_1}\ln\left|C_1 x + C_2\right| + C_3; \quad y = C_1 x + C_2.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ 433, 435, 437.

Решите уравнение (456.2) методом, указанным в замечании.

16.03.2020

Занятие № 5

Уравнения, допускающие понижение порядка

IV. Если уравнение однородно относительно искомой функции и ее производных, т.е. не меняется при одновременной замене y, y', y'', …, $y^{(n)}$ на ky, ky', ky'', …, $ky^{(n)}$, то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = y\cdot z$, где z – новая неизвестная функция переменной x.

№ 463 [Ф]: $xyy'' - x(y')^2 = yy'$ (463.1)

<u>1 способ</u>. Функция $F(x, y, y', y'') = xyy'' - x(y')^2 - yy'$ является однородной относительно y, y', y''. Действительно,

$$F(x, ky, ky', ky'') = k^2 F(x, y, y', y'').$$

Выполним замену $y' = yz$. Так как $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$, то уравнение (463.1) принимает вид

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2 z^2 = y^2 z \quad \to \quad xy^2 z' = y^2 z. \tag{463.2}$$

В результате порядок заданного уравнения понижен на единицу. Очевидно, $y = 0$ является решением. Другие решения найдем, разделив обе части уравнения (463.2) на y^2:

$$xz' = z. \tag{463.3}$$

z = 0 является решением. Далее, разделив переменные в (463.2), будем иметь:

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x} \quad \to \quad \ln|z|=\ln|x|+\ln|C| \quad \to \quad z=Cx.$$

Решение z = 0 будет содержаться в полученной формуле при C = 0. Возвращаясь к замене, будем иметь

$$y'=yz \quad \to \quad y'=Cxy \quad \to \quad y=C_2e^{C_1x^2}.$$

Заметим, что решение y = 0 не было потеряно.

<u>2 способ</u>. Заметим, что y = C, где C – произвольная константа, является решением заданного уравнения. Будем искать другие решение, поделив обе части уравнения на yy'. При этом получим

$$x\cdot\frac{y''}{y'}-x\cdot\frac{y'}{y}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\ln|y'|}{dx}-\frac{d\ln|y|}{dx}=\frac{1}{x}.$$

После интегрирования последнего уравнения, будем иметь

$$\ln|y'|-\ln|y|=\ln|x|+\ln|C_1| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y}=C_1x, \quad C_1\neq 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, найдем

$$\ln|y|=\frac{C_1x^2}{2}+\ln|C_2| \quad \Leftrightarrow \quad y=C_2\exp\left(\frac{C_1x^2}{2}\right), \quad C_1,C_2\neq 0. \quad (463.4)$$

Решение y = C можно объединить с (463.3), сняв ограничения на C_1 и C_2.

Ответ: $\boxed{y=C_2e^{C_1x^2}.}$

№ 426 [Ф]: $yy''+1=(y')^2$ (426.1)

Замечание. Уравнение не имеет решений вида $y=C$.

Выполнив замену $y' = p(y)$, получим

$$ypp'+1=p^2 \quad \to \quad ypp'=p^2-1.$$

Очевидно, $p=\pm 1$ – решения уравнения. Тогда

$$y'=\pm 1 \ \to \ y=\pm x+C.$$

Другие решения найдем, разделяя переменные

$$ypp'=p^2-1 \ \to \ \frac{pdp}{p^2-1}=\frac{dy}{y} \ \to \ \ln\left|p^2-1\right|=2\ln|y|+\ln|C| \ \to$$

$$\to \ p^2=Cy^2+1, \ \ C\neq 0.$$

Выполнив обратную замену, получим:

$$(y')^2=Cy^2+1 \ \to \ y'=\pm\sqrt{Cy^2+1}.$$

Полученные уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными, решения которых получим, рассматривая два случая $C>0$ и $C<0$.

1. Если $C>0$, то, полагая $C=C_1^2$, решим уравнение $y'=\sqrt{C_1^2y^2+1}.$ Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2+1}}=\pm dx \to \frac{1}{C_1}\ln\left|C_1y+\sqrt{C_1^2y^2+1}\right|=\pm x+C_2.$$

2. Если $C<0$, то, полагая $C=-C_1^2$, решим уравнение $y'=\sqrt{1-C_1^2y^2}$. Разделяя переменные, будем иметь (в силу замечания, сделанного выше, потери решений не происходит):

$$\frac{dy}{\sqrt{1-C_1^2y^2}}=\pm dx \to \frac{1}{C_1}\arcsin\left(C_1y\right)=\pm x+C_2.$$

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} y=\pm x+C, \\ \ln\left|C_1y+\sqrt{C_1^2y^2+1}\right|=C_1(\pm x+C_2); \\ \arcsin(C_1y)=C_1(\pm x+C_2). \end{array}}$$

№ 434 [Ф]: $y''+(y')^2 = 2e^{-y}$. (434.1)

Выполнив замену $y' = p(y)$, получим

$$pp'+p^2 = 2e^{-y}.$$

Заменой $p^2 = u(y)$ уравнение сводится к линейному

$$u'+2u = 4e^{-y}. \qquad (434.2)$$

Для соответствующего однородного уравнения имеем:

$$u'+2u = 0 \;\; \to \;\; u = Ce^{-2y}.$$

Применяя метод вариации произвольной постоянной, будем искать решение уравнения (434.2) в виде:

$$u = C(y)e^{-2y}. \qquad (434.3)$$

Подставляя (434.3) в (434.2), получим

$$C'(y) = 4e^{y} \;\; \to \;\; C(y) = 4e^{y} + C_1.$$

Найдя общее решение уравнения (434.2):

$$u = (4e^{y} + C_1)e^{-2y},$$

выполним обратные замены:

$$p^2 = (4e^{y} + C_1)e^{-2y} \;\; \to \;\; (y')^2 = (4e^{y} + C_1)e^{-2y} \;\; \to \;\; y' = \pm\frac{\sqrt{4e^{y} + C_1}}{e^{y}}.$$

Решим полученные уравнения, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{4e^{y} + C_1}}{e^{y}} \;\; \to \;\; \frac{e^{y}dy}{\sqrt{4e^{y} + C_1}} = \pm dx \;\; \to \;\; \frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1} = \pm x + C_2.$$

Замечание. При разделении не происходит потеря решений, так как уравнение (434.1) не имеет решений вида $y = C$.

Ответ: $\boxed{\sqrt{4e^{y} + C_1} = 2(C_2 \pm x).}$

Замечание. Полученное решение можно преобразовать к виду

$$e^{y} + C_1 = (x + C_2)^2.$$

№ 432 [Ф]: $(y'')^3 + xy'' = 2y'$ (432.1)

Заменой $y' = z$ понизим порядок уравнения, получим

$$(z')^3 + xz' = 2z. \qquad (432.2)$$

Уравнение (432.2) является уравнением, не разрешенным относительно производной. Построим его решение методом введения параметра. Введя параметр $p = z'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dz = pdx, \\ z = \frac{1}{2}(p^3 + xp), \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(3p^2dp + pdx + xdp\right) = pdx, \\ z = \frac{1}{2}(p^3 + xp), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3p^2 + x)dp = pdx, \\ z = \frac{1}{2}(p^3 + xp), \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ \frac{dx}{dp} = \frac{x}{p} + 3p, \end{array}\right. \\ z = \frac{1}{2}(p^3 + xp). \end{cases}$$

1. Если p = 0, то будем иметь:

$$z = 0 \;\to\; y' = 0 \;\to\; y = C.$$

2. Методом вариации решим уравнение

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x}{p} + 3p\,.$$

Решением соответствующего однородного уравнения является

$$x = Cp.$$

Тогда для $x = C(p)p$, будем иметь

$$C'(p)p + C(p) = C(p) + 3p \;\to\; C'(p) = 3 \;\to\; C(p) = 3p + C_1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = 3p^2 + C_1 p, \\ z = \dfrac{1}{2}(p^3 + xp), \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3p^2 + C_1 p, \\ z = \dfrac{1}{2}(4p^3 + C_1 p^2). \end{cases}$$

Возвращаясь к замене $y' = z$, получим

$$dy = zdx = \frac{1}{2}(4p^3 + C_1 p^2)d(3p^2 + C_1 p),$$

$$dy = (12p^4 + 5C_1 p^3 + \frac{C_1^2 p^2}{2})dp,$$

$$y = \frac{12}{5}p^5 + \frac{5C_1}{4}p^4 + \frac{C_1^2 p^3}{6} + C_2.$$

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3p^2 + C_1 p, \\ y = \dfrac{12}{5}p^5 + \dfrac{5C_1}{4}p^4 + \dfrac{C_1^2 p^3}{6} + C_2, \end{cases} \\ y = C. \end{array}}$$

Построить решение уравнения $x = e^{y''}(y''-1)$ (1)

Построим решение уравнения методом введения параметра. Запишем уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y'' = p, \\ x = e^p(p-1). \end{cases}$$

Так как $dy' = y''dx,$ то будем иметь

$$dy' = p(e^p(p-1) + e^p)dp, \quad dy' = p^2 e^p dp.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$y' = (p^2 - 2p + 2)e^p + C_1.$$

Так как $dy = y'dx,$ то

$$dy = \left((p^2 - 2p + 2)e^p + C_1\right)pe^p dp$$

и, следовательно,

$$y = \int \left((p^2 - 2p + 2)e^p + C_1 \right) p e^p dp =$$

$$= \frac{4p^3 - 14p^2 + 22p - 11}{8} e^{2p} + C_1 (p-1) e^p + C_2.$$

В результате получили решение уравнения (1) в параметрическом виде.

Ответ:

$$\boxed{\begin{cases} x = e^p (p-1), \\ y = \dfrac{4p^3 - 14p^2 + 22p - 11}{8} e^{2p} + C_1 (p-1) e^p + C_2. \end{cases}}$$

№ 501 [Ф]: $yy'' = 2x(y')^2, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 0.5.$ (501.1)

Так как уравнение является однородным относительно y и y', то можно понизить его порядок, выполнив замену $y' = yz.$. В результате получим уравнение

$$y^2 (z^2 + z') = 2xy^2 z^2. \tag{501.2}$$

Очевидно, уравнение имеет решение y = 0. Но оно не удовлетворяет начальным условиям и исключается из дальнейшего рассмотрения. Разделив уравнение на y^2, получим

$$z^2 + z' = 2xz^2. \tag{501.3}$$

Используя заданные начальные условия, построим начальное условие для уравнения (501.3):

$$y'(2) = y(2)z(2) \quad \to \quad z(2) = \frac{y'(2)}{y(2)} = \frac{1}{4}. \tag{501.4}$$

Очевидно, следует искать ненулевое решение уравнения (501.3). Найдем его, разделяя переменные:

$$z' + z^2 = 2xz^2 \quad \to \quad z' = (2x-1)z^2 \quad \to \quad -\frac{dz}{z^2} = (1-2x)dx \quad \to$$

$$\to \quad \frac{1}{z} = x - x^2 + C \quad \to \quad z = \frac{1}{x - x^2 + C}.$$

Подчинив найденное решение уравнения (501.3) условию (501.4): $z(2)=\dfrac{1}{C-2}=\dfrac{1}{4}$, установим, что C = 6. Возвращаясь к замене, решим уравнение $y'=y\cdot\dfrac{1}{x-x^2+6}$. Разделяя переменные, найдем его ненулевое решение:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x-x^2+x} \quad\to\quad \frac{dy}{y}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}\right)dx \quad\to$$

$$\ln\left|y^5\right|=\ln\left|\frac{x+2}{x-3}\right|+\ln|C| \quad\to\quad y^5=C\cdot\frac{x+2}{x-3}.$$

Используя начальное условие $y(2)=2$, найдем C = –8.

Ответ: $\boxed{(3-x)y^5=8(x+2).}$

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **460, 438, 447, 451**.

Выполнить задания домашней контрольной работы на тему «Уравнения, допускающие понижение порядка» (Часть 2).
Срок сдачи работы **30 марта**. Варианты заданий