



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. [djvu](#)

3.02.2020

Занятие № 1

Уравнения 1-порядка (повторение)

$$\text{№ 360 [М]: } x\left(4 + \frac{1}{x^2 - y^2}\right)dx - y\left(4 - \frac{1}{x^2 - y^2}\right)dy = 0. \quad (360.1)$$

Заметим, что $|x| \neq |y|$. Преобразуем заданное уравнение следующим образом

$$4(xdx - ydy) + \frac{1}{x^2 - y^2}(xdx + ydy) = 0,$$

$$2d(x^2 - y^2) + \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot \frac{d(x^2 + y^2)}{2} = 0,$$

$$4(x^2 - y^2)d(x^2 - y^2) + d(x^2 + y^2) = 0,$$

$$2d((x^2 - y^2)^2) + d(x^2 + y^2) = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение найдем общий интеграл для заданного уравнения.

Ответ: $2(x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 = C.$

№ 301 [Ф]: $xy' + x^2 + xy - y = 0$.

(301.1)

Уравнение является линейным неоднородным. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$xy' + y(x - 1) = 0.$$

Решая его как уравнение с разделяющимися переменными, получим $y = Cxe^{-x}$. Далее применим метод вариации произвольной постоянной:

$$x(C'(x)xe^{-x} + C(x)e^{-x} - C(x)xe^{-x}) + C(x)xe^{-x}(x-1) + x^2 = 0,$$
$$x^2e^{-x}C'(x) = -x^2, \quad C'(x) = -e^x, \quad C(x) = -e^x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $y = C(x)xe^{-x} = -x + C_1xe^{-x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y = x(Ce^{-x} - 1)$.

Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения



[Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной](#)

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1)$$

При решении такого уравнения можно попытаться разрешить его относительно производной $\frac{dy}{dx}$, т.е. получить одно или несколько уравнений, разрешенных относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

Полученные уравнения решаются рассмотренными ранее методами.

Задача Коши для уравнения (1) с условием $y(x_0) = y_0$ имеет **единственное решение** (точка $(x_0; y_0)$ является *точкой единственности* решения), **если не существует двух интегральных кривых уравнения (1), которые бы проходили через точку $(x_0; y_0)$ и имели бы в этой точке общую касательную.** В противном случае в точке $(x_0; y_0)$ единственность решения задачи Коши нарушается (точка $(x_0; y_0)$ является точкой неединственности решения задачи Коши).

Уравнения вида (1) могут иметь **особые** решения, т.е. такие решения, соответствующая интегральная кривая которых целиком состоит из точек неединственности.

Задание 1. Решить уравнение $(y')^2 - 1 = 0$ и нарисовать его интегральные кривые. Нарушается ли в каких-либо точках плоскости xOy единственность решения этого уравнения?

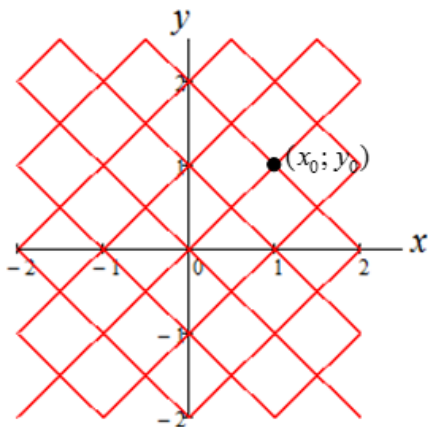
Для заданного уравнения имеем

$$(y')^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y' = 1, \\ y' = -1. \end{cases}$$

Решениями уравнений являются соответственно два семейства функций:

$$y = x + C \quad \text{и} \quad y = -x + C,$$

графики которых определяют два семейства интегральных кривых заданного уравнения (см. рис.). Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плос-



кости xOy проходят две интегральные кривые заданного уравнения:

$$y - y_0 = x - x_0 \text{ и } y - y_0 = -x + x_0.$$

Так как эти интегральные кривые пересекаются под прямым углом, то единственность решения не нарушается.

№ 241 [Ф]: $(y')^2 - y^2 = 0$ (241.1)

Заданное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$y' = y \text{ и } y' = -y,$$

интегрируя которые найдем два семейства функций

$$y = Ce^x \text{ и } y = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R},$$

определяющих решения заданного уравнения. При $C = 0$ оба семейства определяют решение $y = 0$. Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 1.

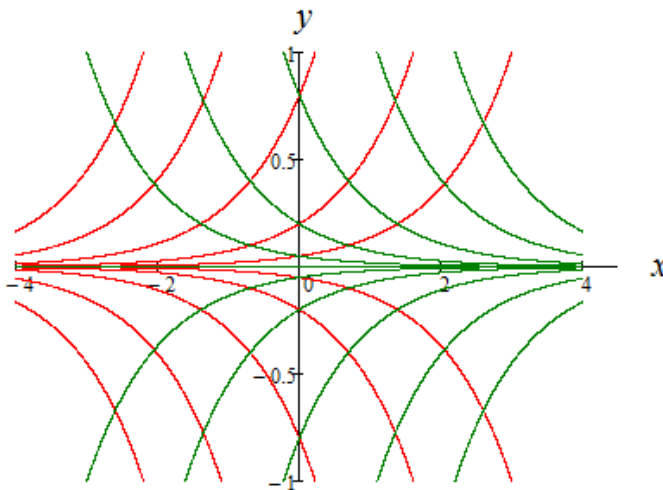


Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (241.1)

Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости xOy , за исключением принадлежащих оси x , проходят две интегральные кривые. Но так как

касательные к интегральным кривым, проведенные в точке $(x_0; y_0)$, не совпадают, а через точки оси x проходит одна интегральная кривая, то все точки плоскости являются точками единственности.

Ответ: $y = Ce^{\pm x}, C \in R.$



Домашнее задание

[Ф] №№ 302, 303, 243.

№ 242 [Ф]: $8(y')^3 = 27y$ (242.1)

Разрешив заданное уравнение относительно производной, получим уравнение

$$y' = \frac{3}{2} y^{1/3}.$$

Очевидно, $y = 0$ является решением. Остальные решения найдем, применяя метод разделения переменных:

$$\frac{2}{3} \frac{dy}{y^{1/3}} = dx, \quad y^{2/3} = x + C, \quad y^2 = (x + C)^3, \quad C \in R.$$

Таким образом, заданное уравнение имеет решения:

$$y^2 = (x + C)^3, \quad C \in R, \quad y = 0.$$

Соответствующие им интегральные кривые показаны на рис. 2.

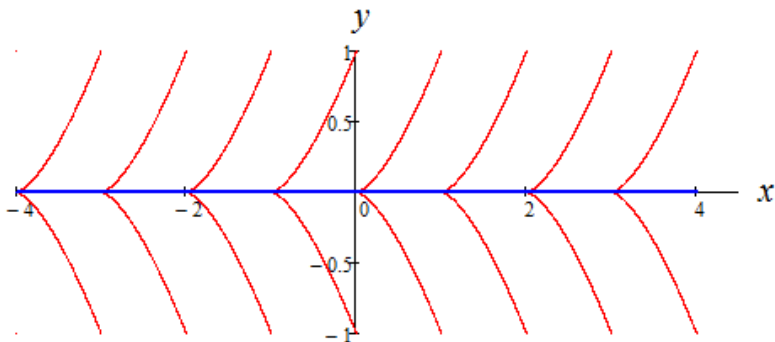


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (242.1)

Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости, за исключением принадлежащих оси x , проходит одна интегральная кривая. Решение $y = 0$ является особым.

Ответ: $y^2 = (x + C)^3, C \in R, y = 0.$



Домашнее задание

[Ф] №№ 302, 303, 243, 246.

10.02.2020

Занятие № 2

Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения

№ 244 [Ф]: $y^2((y')^2 + 1) = 1$ (244.1)

Заметим, что $y = 0$ не является решением заданного уравнения, для которого имеем

$$(y')^2 = \frac{1-y^2}{y^2} \Leftrightarrow y' = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, y \in [-1; 1].$$

Очевидно, $y = \pm 1$ – решения уравнения. Остальные решения находятся методом разделения переменных, получив общий интеграл

$$x + C = \pm \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow y^2 + (x+C)^2 = 1, C \in \mathbb{R}.$$

Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 3.

Интегральные кривые, описываемые уравнением $x + C = \sqrt{1-y^2}$, – правые части окружностей с центрами в точках $(-C, 0)$ ($C \in \mathbb{R}$). Интегральные кривые, описываемые уравнением $-(x+C) = \sqrt{1-y^2}$, – левые части окружностей с центрами в точках $(-C, 0)$ ($C \in \mathbb{R}$).

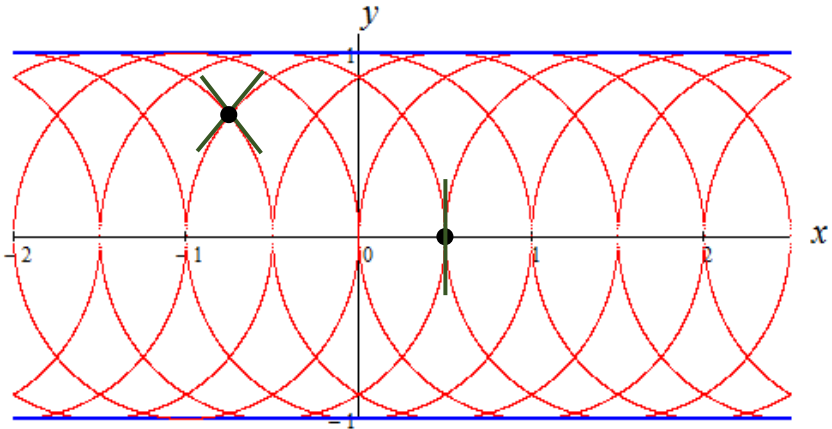


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (244.1)

Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости, ограниченной прямыми $y = \pm 1$ проходят две интегральные кривые. Но только точки на прямых $y = \pm 1$ и $y = 0$ являются точками неединственности. Решения $y = \pm 1$ являются особыми.

Ответ: $(x + C)^2 + y^2 = 1, C \in \mathbb{R}, y = \pm 1.$

Для заданного уравнения имеем

$$(y')^3 + y^2 = yy'(y'+1), \quad (y')^3 - y(y')^2 + y^2 - yy' = 0,$$

$$(y')^2(y'-y) - y(y'-y) = 0, \quad (y'-y)((y')^2 - y) = 0.$$

Получаем, что уравнение (249.1) равносильно совокупности следующих уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} y'-y = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{l} y' = \sqrt{y}, \quad y \geq 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left[\begin{array}{l} y' = -\sqrt{y}, \quad y \geq 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Интегрируя первое, найдем его общее решение

$$y = Ce^x, \quad C \in R.$$

Интегрируя два других, найдем

$$2\sqrt{y} = \pm(x+C), \quad y = 0.$$

Так как

$$2\sqrt{y} = \pm(x+C) \Leftrightarrow y = \frac{(x+C)^2}{4}, \quad (4)$$

то нетрудно установить, что семейство парабол (4) имеет огибающую $y = 0$, которая является особым решением уравнений (2) и (3), а, следовательно, и особым решением заданного уравнения (249.1). **(Заметим, что решение $y = 0$ является частным для уравнения (1)).**

Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 4.

Замечание. Уравнению (2) соответствуют интегральные кривые, которые являются правыми ветвями парабол:

$$y = \frac{(x+C)^2}{4}, \quad x \geq -C, \quad \forall C.$$

Уравнению (3) соответствуют интегральные кривые, которые являются левыми ветвями парабол:

$$y = \frac{(x+C)^2}{4}, \quad x \leq -C, \quad \forall C.$$

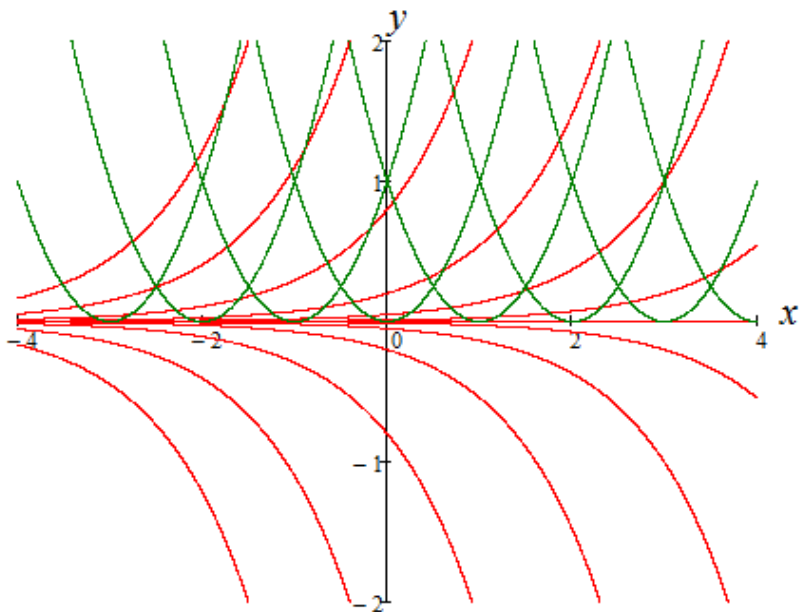


Рис. 4. Интегральные кривые уравнения (249.1)

Ответ: $y = Ce^x$, $4y = (x + C)^2$, $C \in \mathbb{R}$; $y = 0$ – особоерешение.

№ 251 [Ф]: $(y')^2 + xy = y^2 + xy'$ (251.1)

Для заданного уравнения имеем

$$(y')^2 + xy = y^2 + xy', \quad (y')^2 - y^2 = x(y' - y),$$

$$(y' - y)(y' + y - x) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} y' - y = 0, & (1) \\ y' + y - x = 0. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение

$$y = Ce^x, C \in \mathbb{R}.$$

Уравнение (2) является линейным неоднородным и может быть решено, например, сведением к уравнению с разделяющимися переменными заменой $u = x - y$. Общим решением уравнения (2) является

$$y = Ce^{-x} + x - 1, C \in \mathbb{R}.$$

Оба найденных решений дают множество решений заданного уравнения. Его общий интеграл можно записать в виде:

$$(y - Ce^x)(y - Ce^{-x} - x + 1) = 0, C \in \mathbb{R}.$$

Можно показать, что заданное уравнение не имеет особых решений, используя следующий способ.

Пусть функция $F = F(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$. Геометрическое место точек $\varphi(x, y) = 0$, получаемых путем исключения y' из уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0,$$

Называется *дискриминантной кривой* дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$. Следует проверить, является ли дискриминантная кривая, удовлетворяющая этому уравнению, особым решением, т. е. касаются ли ее в каждой точке другие решения.

Для рассматриваемого уравнения (251.1) условия для определения дискриминантной кривой имеют вид

$$\begin{cases} F(x, y, y') = (y')^2 + xy - y^2 - xy' = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = \frac{x}{2}, \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Несовместность полученных условий позволяет сделать вывод, что нет дискриминантных кривых, удовлетворяющих заданному уравнению. Следовательно, и нет особых решений.

Интегральные кривые заданного уравнения (251.1) показаны на рис. 5.

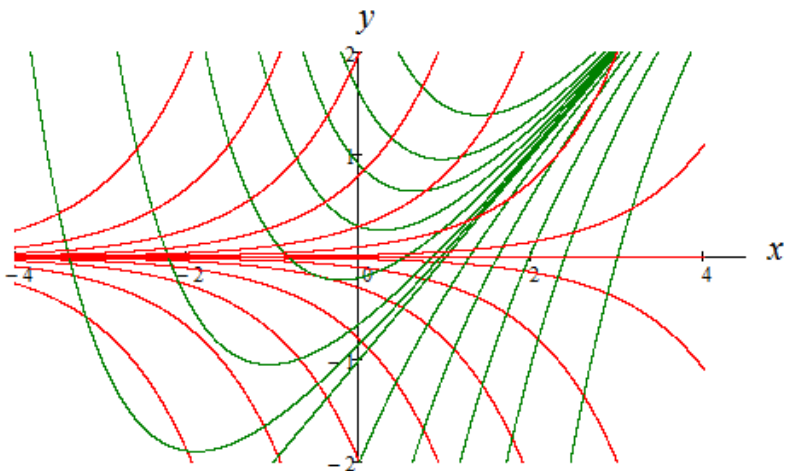


Рис. 5. Интегральные кривые уравнения (251.1)

Ответ: $y = Ce^x$, $y = Ce^{-x} + x - 1$.



Домашнее задание

[Ф] №№ 246, 252, 255, 307.

17.02.2020

Занятие № 3

Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра

Не всегда уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

разрешается относительно производной y' , а, если и разрешается, то не всегда полученные при этом уравнения $y' = f_i(x, y)$ легко интегрируются. В этих случаях для решения уравнения (1) можно применить **метод введения параметра**. Он позволяет свести уравнение (1) к уравнению, разрешенному относительно производной. Рассмотрим вариант этого метода для случая, когда уравнение (1) легко разрешается относительно y или относительно x' .

1. Пусть уравнение (1) можно привести к виду $x = f(y')$. Тогда введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$x = f(y') \Leftrightarrow \begin{cases} dy = p dx, \\ x = f(p). \end{cases}$$

При этом

$$dy = pd(f(p)), \quad dy = pf'(p)dp.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$y = \int pf'(p)dp + C.$$

В результате получаем решения исходного уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \int pf'(p)dp + C. \end{cases}$$

¹ Другие варианты применения метода см., например, в кн.: Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004 (гл. III, § 2).

Если возможно, то исключаем параметр, получив общее решение рассматриваемого уравнения в одном из следующих видов:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad y = \varphi(x, C), \quad x = \varphi(y, C).$$

2. Пусть уравнение (1) можно привести к виду $y = f(y')$. Тогда введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$y = f(y') \Leftrightarrow \begin{cases} dy = p dx, \\ y = f(p). \end{cases}$$

При этом

$$d(f(p)) = p dx \quad f'(p) dp = p dx.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C.$$

В результате получаем решение исходного уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C, \\ y = f(p). \end{cases}$$

Если $p = 0$ является решением уравнения $f'(p) dp = p dx$, то к найденному решению следует добавить и решение $y = f(0)$.

3. Пусть уравнение (1) можно привести к виду $x = f(y, y')$. Тогда введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$x = f(y, y') \Leftrightarrow \begin{cases} dy = p dx, \\ x = f(y, p). \end{cases}$$

При этом

$$dy = p d(f(y, p)), \quad dy = p \left(\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp \right).$$

Если найдем решения полученного уравнения в виде $y = \Phi(x, C)$, то решение исходного уравнения получим в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = f(y, p), \\ y = \Phi(p, C). \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения проводятся и в случае, когда уравнение (1) можно привести к виду $y = f(x, y')$.

№ 267 [Ф]: $x = (y')^3 + y'$. (267.1)

Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p dx, & dy = p d(p^3 + p) = (3p^3 + p) dp, \\ x = p^3 + p, & x = p^3 + p, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = p^3 + p, \\ y = \frac{3}{4} p^4 + \frac{1}{2} p^2 + C. \end{cases}$$

Ответ: $x = p^3 + p, 4y = 3p^4 + 2p^2 + C, C \in R.$

№ 272 [Ф]: $y = \ln(1 + (y')^2)$. (272.1)

1 способ. Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p dx & d(\ln(1 + p^2)) = p dx, & \begin{cases} \frac{2p}{1+p^2} dp = p dx, \\ y = \ln(1 + p^2). \end{cases} \\ y = \ln(1 + p^2), & y = \ln(1 + p^2), \end{cases}$$

Решая уравнение $\frac{2p}{1+p^2} dp = p dx$, найдем:

$$p = 0; \quad x = 2 \operatorname{arctg} p + C.$$

Следовательно, получили следующие решения заданного уравнения:

$$\begin{cases} p = 0, \\ x = 2 \operatorname{arctg} p + C, \\ y = \ln(1 + p^2), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \operatorname{arctg} p + C, \\ y = \ln(1 + p^2), \\ y = \ln(1) = 0. \end{cases}$$

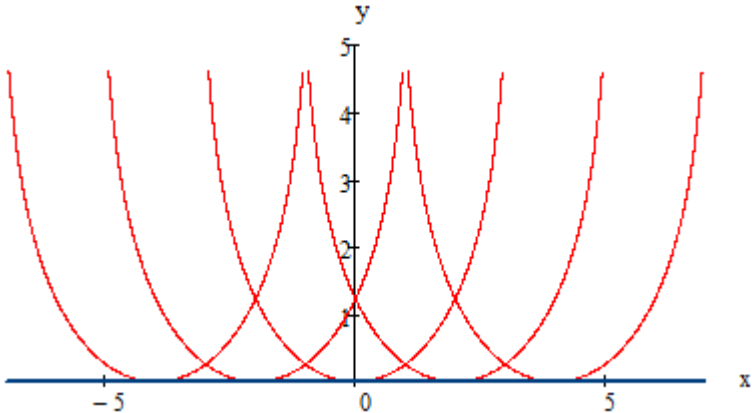
Ответ: $x = 2 \operatorname{arctg} p + C, y = \ln(1 + p^2), C \in R; y = 0.$

Замечание: Решение можно записать и в явной форме, исключив параметр p следующим образом. Имеем

$$x = 2 \operatorname{arctg} p + C, \quad \begin{cases} p = \operatorname{tg} \frac{x-C}{2}, \\ -\pi \leq x-C \leq \pi, \end{cases}$$

$$\text{тогда } y = \ln \left(1 + \left(\operatorname{tg} \frac{x-C}{2} \right)^2 \right) = -2 \ln \left(\left| \cos \left(\frac{x-C}{2} \right) \right| \right), \quad |x-C| \leq \pi.$$

Здесь была использована формула $1 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.



Интегральные кривые уравнения (272.1)

(прямая $y = 0$ – особое решение, является огибающей семейства кривых (272.2))

2 способ. Разрешим заданное уравнение относительно производной, получим

$$y' = \pm\sqrt{e^y - 1}, \quad y \geq 0.$$

Очевидно, $y = 0$ является решением. Остальные решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{\sqrt{e^y - 1}} = \pm dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{e^y - 1}} = \pm x + C.$$

Так как при $y > 0$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{e^y - 1}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^y - 1} + C,$$

то решения рассматриваемой пары уравнений, учитывая, что $y > 0$, можно записать следующим образом:

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^y - 1} = \pm x + C. \quad (272.2)$$

Ответ: $2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^y - 1} = \pm x + C, \quad y > 0; \quad y = 0.$

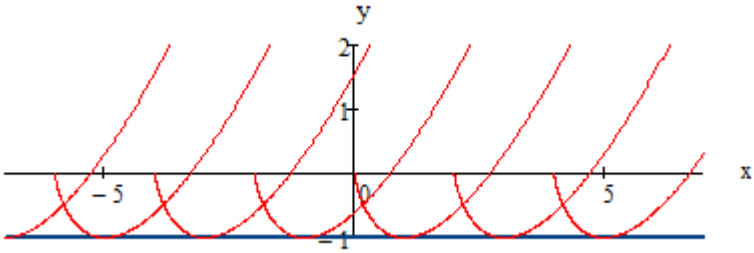
№ 274 [Ф]: $y = (y' - 1)e^{y'}. \quad (274.1)$

Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p dx, & \begin{cases} d((p-1)e^p) = p dx, \\ y = (p-1)e^p, \end{cases} & \begin{cases} p e^p dp = p dx, \\ y = (p-1)e^p \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} p = 0, \\ x = e^p + C, \\ y = (p-1)e^p, \end{cases} & \begin{cases} x = e^p + C, \\ y = (p-1)e^p; \\ y = -1. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $x = e^p + C, \quad y = (p-1)e^p, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -1.$



Интегральные кривые уравнения (274.1)

(прямая $y = -1$ – особое решение, является огибающей семейства кривых)

№ 278 [Ф]: $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y$. (278.1)

Разрешив уравнение относительно y и введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$\begin{cases} dy = p dx, \\ y = \frac{1}{4}(x^2 + 2xp - p^2). \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим

$$\frac{1}{4}(2x dx + 2p dx + 2x dp - 2p dp) = p dx, \quad (x - p)(dx + dp) = 0.$$

Тогда одно решение заданного уравнения получим при $p = x$:

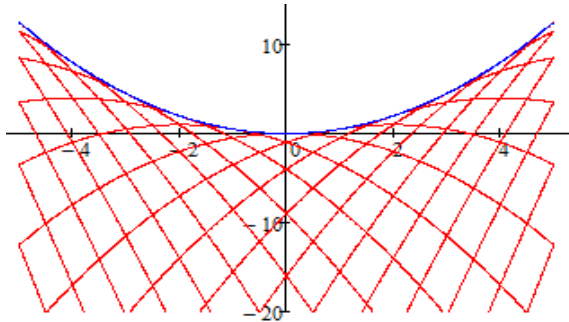
$$y = \frac{1}{4}(x^2 + 2x^2 - x^2) = \frac{x^2}{2}.$$

Остальные решения находим, когда $dx + dp = 0$:

$$\begin{cases} dx + dp = 0, \\ y = \frac{1}{4}(x^2 + 2xp - p^2). \end{cases} \quad \begin{cases} p = -x + C, \\ y = \frac{1}{4}(x^2 + 2xp - p^2). \end{cases}$$

Отсюда получим $4y = (C^2 - 2(x - C)^2)$.

Ответ: $4y = C^2 - 2(x - C)^2, \quad C \in \mathbb{R}; \quad 2y = x^2.$



Интегральные кривые уравнения (278.1)
(парабола $2y = x^2$ – огибающая семейства парабол $4y = C^2 - 2(x - C)^2$)

№ 287 [Ф]: $y = xy' - (y')^2$.

(287.1)

Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p dx, \\ y = xp - p^2, \end{cases} \quad \begin{cases} d(xp - p^2) = p dx, \\ y = xp - p^2. \end{cases}$$

Для первого уравнения имеем

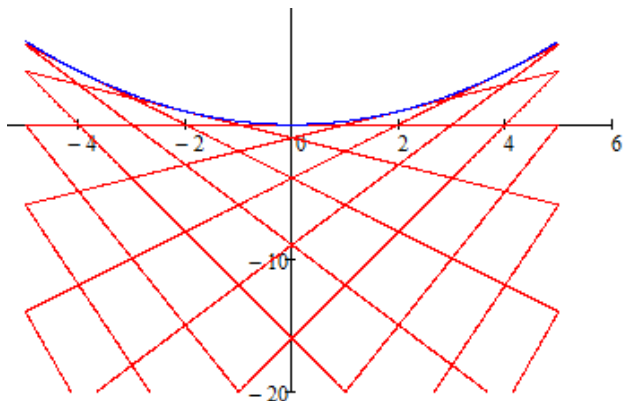
$$d(xp - p^2) = p dx, \quad xdp + p dx - 2p dp = p dx, \quad (x - 2p)dp = 0.$$

Полученное уравнение распадается на два $x - 2p = 0$ и $dp = 0$.

Следовательно,

$$\begin{cases} d(xp - p^2) = p dx, \\ y = xp - p^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{x}{2}, \\ p = C, \\ y = xp - p^2. \end{cases}$$

Ответ: $y = Cx - C^2, C \in \mathbb{R}; 4y = x^2$.



Интегральные кривые уравнения (287.1)
(парабола $4y = x^2$ – огибающая семейства прямых $y = Cx - C^2$)



Домашнее задание

[Ф] №№ 269, 271, 283.

Выполнить задания домашней контрольной работы на тему «Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра». Срок сдачи работы **2 марта**