



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

29.10.2019

Занятие № 9

Линейные уравнения 1-го порядка



[Интегрирование линейных уравнений](#)

Уравнение вида

$$a(x)y' + b(x)y = f(x),$$

называют **линейным**. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение будет *однородным*, иначе *неоднородным*.

$$\text{№ 136 [Ф]: } xy' - 2y = 2x^4. \quad (136.1)$$

1 способ (метод Лагранжа, метод вариации произвольной постоянной). Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$xy' - 2y = 0. \quad (136.2)$$

Заметим, что функция $y \equiv 0$ является его решением. Другие решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x} dx, \quad \ln |y| = \ln x^2 + \ln |C|, \quad C \neq 0; \quad y = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Получили, что все решения однородного уравнения (136.2) описывает формула $y = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$ (решение $y \equiv 0$ можно получить из

последней формулы при $C = 0$). Решение заданного уравнения (136.1) будем искать в виде:

$$y = C(x)x^2. \quad (136.3)$$

Подставив выражение (136.3) в уравнение (136.1), получим:

$$x(C'(x)x^2 + 2xC(x)) - 2C(x)x^2 = 2x^4, \quad x^3C'(x) = 2x^4,$$

$$C'(x) = 2x, \quad C(x) = x^2 + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (136.3). В результате получим решение заданного уравнения:

$$y = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2, \quad C \in R$$

2 способ (метод Бернулли). Будем искать решение уравнения (136.1) в виде произведения двух функций:

$$y = u(x)v(x). \quad (136.4)$$

Подставляя (136.4) в заданное уравнение, получим

$$x(u'v + uv') - 2uv = 2x^4, \quad xu'v + u(xv' - 2v) = 2x^4. \quad (136.5)$$

Выберем функцию v так, чтобы $xv' - 2v = 0$. Решив это уравнение как уравнение с разделяющимися переменными, получим $v = cx^2$.

В качестве функции $v(x)$ можно взять функцию $v(x) = x^2$ (**Функция $v(x)$ в (136.4) является одним из решений однородного уравнения, соответствующего заданному**). Осталось найти общее решение уравнения (136.5):

$$xu'x^2 = 2x^4, \quad x^3u' = 2x^4, \quad u' = 2x, \quad u = x^2 + C.$$

Выражения для функций $u(x)$ и $v(x)$ подставляем в (136.4). В результате получим все решения заданного уравнения (136.1).

Ответ: $y = Cx^2 + x^4, \quad C \in R.$

Замечание. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xdy = (2y + 2x^4)dx,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv 0$.

$$\text{№ 137 [Ф]: } (2x + 1)y' = 4x + 2y. \quad (137.1)$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$(2x+1)y' = 2y, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x+1}, \quad y = C(2x+1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

(при разделении переменных решение $y \equiv 0$ не потеряно!).

Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y = C(x)(2x+1). \quad (137.2)$$

Имеем

$$(2x+1)(C'(x)(2x+1) + 2C(x)) = 4x + 2C(x)(2x+1),$$
$$C'(2x+1)^2 = 4x, \quad C'(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2}, \quad C'(x) = \frac{2(2x+1) - 2}{(2x+1)^2},$$

$$C'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}, \quad C(x) = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (137.2). В результате найдем решение заданного уравнения.

Ответ: $y = (2x+1)(C + \ln|2x+1|) + 1, \quad C \in \mathbb{R}.$

Замечание. Если заданное уравнение записать в виде:

$$(2x+1)dy = (4x+2y)dx.$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv -1/2$.



Домашнее задание

[Ф] №№ 139, 140, 141, 144.

5.11.2019

Занятие № 10

$$\text{№ 119 [Ф]: } (y'+1)\ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}. \quad (119.1)$$

Выполнив в уравнении (119.1) замену

$$z = \frac{y+x}{x+3} > 0, \quad y = z(x+3) - x, \quad y' = z'(x+3) + z - 1,$$

получим уравнение

$$(z'(x+3) + z) \ln z = z \Leftrightarrow z'(x+3) \ln z = z(1 - \ln z), \quad (119.2)$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Очевидно, $z = e$ является решением уравнения (119.2). Найдем остальные решения, разделяя переменные:

$$\frac{\ln z}{z(\ln z - 1)} dz = -\frac{dx}{x+3}, \quad \int \frac{\ln z}{z(\ln z - 1)} dz = -\int \frac{dx}{x+3} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{\ln z}{\ln z - 1} d \ln z = -\ln |x+3| + C, \quad \ln z + \ln |\ln z - 1| = -\ln |x+3| + C.$$

Полученное решение можно преобразовать следующим образом:

$$\ln |\ln z - 1| = C - \ln(z|x+3|), \quad \ln z - 1 = \frac{C_1}{z(x+3)}.$$

Заметим, что при $C_1 = 0$ $z = e$.

Таким образом, общим решением уравнения (119.2) является:

$$\ln z - 1 = \frac{C}{z(x+3)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Возвращаясь к переменным x и y :

$$z = \frac{y+x}{x+3},$$

получим ответ.

Ответ: $\ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{C}{y+x} + 1, C \in R.$

Линейные уравнения 1-го порядка

№ 138 [Ф]: $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x.$ (138.1)

Для соответствующего однородного имеем

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x dx, \quad \ln |y| = \ln |\cos x| + \ln |C|, \quad y = C \cos x.$$

(при разделении переменных решение $y \equiv 0$ не будет потеряно, если $C \in R!$).

Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y = C(x) \cos x. \quad (138.2)$$

Имеем

$$C'(x) \cos x - C(x) \sin x + C(x) \cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$C(x) = \operatorname{tg} x + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (138.2). В результате найдем решение заданного уравнения

$$y = (\operatorname{tg} x + C_1) \cos x = \sin x + C_1 \cos x.$$

2 способ (метод интегрирующего множителя). Умножая обе части

уравнения (138.1) на $\frac{1}{\cos x}$, получим

$$\frac{1}{\cos x} y' + y \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d}{dx} \left(y \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y \cdot \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x + C, \quad y = \sin x + C \cos x, \quad C \in R.$$

Ответ: $y = \sin x + C \cos x, C \in R.$

$$\text{№ 145 [\Phi]: } (x + y^2)dy = ydx. \quad (145.1)$$

Уравнение не является линейным относительно переменной y . Однако оно линейное относительно x . Заметим, что $y \equiv 0$ является решением уравнения. Для поиска других решений будем считать x функцией y . Считая $dy \neq 0$, имеем

$$y \frac{dx}{dy} = x + y^2. \quad (145.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $y \frac{dx}{dy} = x$ имеет решение $x = Cy$. Применяв метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y(C'(y)y + C(y)) = C(y)y + y^2, \quad C'(y)y^2 = y^2, \\ C'(y) = 1, \quad C(y) = y + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y = (y + C_1)y = y^2 + C_1y$.

Ответ: $x = y^2 + Cy, \quad C \in R; \quad y = 0.$

$$\text{№ 148 [\Phi]: } (2x + y)dy = ydx + 4 \ln y \, dy. \quad (148.1)$$

Условие $y > 0$ определяет область определения уравнения. Уравнение не является линейным относительно переменной y . Однако оно линейное относительно x . Имеем

$$ydx = (2x + y - 4 \ln y)dy, \quad y \frac{dx}{dy} = 2x + y - 4 \ln y. \quad (148.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $y \frac{dx}{dy} = 2x$ имеет решение

$x = Cy^2$. Применяв метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y(C'(y)y^2 + 2yC(y)) = 2C(y)y^2 + y - 4\ln y, \quad y^3 C'(y) = y - 4\ln y,$$

$$C'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{4\ln y}{y^3}, \quad C(y) = -\frac{1}{y} - 4 \int \frac{\ln y}{y^3} dy + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Так как

$$4 \int \frac{\ln y}{y^3} dy = -2 \int \ln y d\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2\ln y}{y^2} + 2 \int \frac{dy}{y^3} = -\frac{2\ln y + 1}{y^2},$$

то

$$C(y) = \frac{2\ln y + 1}{y^2} - \frac{1}{y} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $x = C(y)y^2 = 2\ln y + 1 - y + C_1 y^2$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $x = 2\ln y - y + 1 + C y^2$, $C \in \mathbb{R}$.



Домашнее задание

[Ф] №№ 141, 144, 146, 147.

Подготовка к [самостоятельной работе](#)

12.11.2019

Занятие № 11

Самостоятельная работа № 1

Примерный вариант

Решите уравнения:

1) $y' \ln y = yx^2 \ln x$;

2) $\left(y' - \frac{y}{x}\right) \cos \frac{y}{x} = \sin^2 \frac{y}{x}$;

3) $y' = \frac{y - 15x + 13}{y + 9x - 11}$

Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к ним

$$\text{№ 149 [Ф]: } y' = \frac{y}{3x - y^2}. \quad (149.1)$$

Уравнение не является линейным относительно переменной y . Заметим, что $y \equiv 0$ является решением уравнения, а для поиска других решений рассмотрим «перевернутое» уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x - y^2}{y}, \quad (149.1)$$

которое является линейным относительно x . Соответствующее однородное уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{3x}{y}$ имеет решение $x = Cy^3$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(y)x^3 + 3x^2C(y) = \frac{3C(y)y^3 - y^2}{y}, \quad C'(y)y^3 = -y,$$

$$C(y) = -\frac{1}{y^2}, \quad C(y) = \frac{1}{y} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $x = C(y)y^3 = \left(\frac{1}{y} + C_1\right)y^3 = y^2 + C_1y^3$.

Ответ: $x = y^2 + Cy^3, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$.

Уравнение Бернулли

$$y' = a(x)y + b(x)y^m, \quad b(x) \neq 0, \quad m \neq 0, 1,$$

с помощью замены $z = y^{1-m}$ приводится к линейному

$$z' = (1-m)(a(x)z + b(x)).$$

При $m > 0$ следует учесть, что $y = 0$ является решением уравнения Бернулли.



Домашнее задание

[Ф] № 152

19.11.2019

Занятие № 12

Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к ним. Уравнение Бернулли

$$\text{№ 151 [Ф]: } y'+2y = y^2 e^x. \quad (151.1)$$

Уравнение является уравнением Бернулли ($m = 2$). Его решения, отличные от $y \equiv 0$, найдем следующим образом. Разделив обе части уравнения (151.1) на y^2 , получим

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x. \quad (151.2)$$

Так как $\frac{y'}{y^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)$, то, выполнив в уравнении (151.2) замену

$$z = \frac{1}{y}, \text{ получим}$$

$$z'-2z = -e^x. \quad (151.3)$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным. Соответствующее однородное уравнение $z'-2z=0$ имеет решение $z = Ce^{2x}$. Применяв метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = -e^x, \quad C'(x) = -e^{-x},$$

$$C(x) = e^{-x} + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (151.3) является:

$$z = C(x)e^x = (e^{-x} + C_1)e^{2x} = e^x + C_1e^{2x}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\frac{1}{y} = e^x + Ce^{2x}, \quad y(e^x + Ce^{2x}) = 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(e^x + Ce^{3x}) = 1, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0.$

№ 154 [Ф]: $xy^2y' = x^2 + y^3.$ (154.1)

Так как $y^2y' = \frac{dy^3}{dx} \cdot \frac{1}{3}$, то выполнив в уравнении замену $z = y^3$, получим

$$xz' = 3(x^2 + z). \quad (154.2)$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным. Соответствующее однородное уравнение $xz' = 3z$ имеет решение $z = Cx^3$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$x(C'(x)x^3 + 3x^2C(x)) = 3x^2 + 3C(x)x^3, \quad C'(x)x^4 = 3x^2,$$

$$C'(x) = \frac{3}{x^2}, \quad C(x) = -\frac{3}{x} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Общим решением уравнения (154.2) будет

$$z = C(x)x^3 = \left(-\frac{3}{x} + C_1\right)x^3 = C_1x^3 - 3x^2.$$

Выполнив обратную замену, получим ответ.

Ответ: $y^3 = Cx^3 - 3x^2, \quad C \in \mathbb{R}.$

Замечание 1. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xy^2dy = (x^2 + y^3)dx,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv 0$.

Замечание 2. Уравнение (154.1) является уравнением Бернулли. Действительно,

$xy^2y' = x^2 + y^3 \Rightarrow xy' = \frac{x^2}{y^2} + y.$ При этом $m = -2$.

$$\text{№ 157 } [\Phi]: xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0.$$

(157.1)

Уравнение является уравнением Бернулли ($m = 3$). Очевидно, $y \equiv 0$ является его решением. Остальные решения будем искать следующим образом. Разделив обе части уравнения (157.1) на y^3 , получим

$$x \cdot \frac{y'}{y^3} + \frac{2}{y^2} + x^5 e^x = 0. \quad (157.2)$$

Так как $\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y^2} \right)$, то, выполнив в уравнении (157.2) замену

$z = \frac{1}{y^2}$, получим линейное уравнение

$$xz' - 4z = 2x^5 e^x. \quad (157.3)$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения $xz' - 4z = 0$ является $z = Cx^4$. Решая уравнение (157.3) методом вариации, будем иметь

$$x(C'(x)x^4 + 4x^3 C(x)) - 4C(x)x^4 = 2x^5 e^x, \quad C'(x)x^5 = x^5 e^x,$$

$$C'(x) = 2e^x, \quad C(x) = 2e^x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$z = C(x)x^4 = C_1 x^4 + 2x^4 e^x, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

является общим решением уравнения (157.3).

Выполнив обратную замену:

$$\frac{1}{y^2} = (C_1 + 2e^x)x^4,$$

получим решение заданного уравнения (157.1).

Ответ: $y^2 x^4 (2e^x + C) = 1, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0.$

Замечание 1. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xdy + (2y + x^5 y^3 e^x)dx = 0,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv 0$.

№ 159 [Ф]: $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$.

(159.1)

Очевидно, $y = 0$, является решением уравнения. Для поиска других решений преобразуем уравнение следующим образом. Разделив обе части уравнения на $y' \neq 0$, получим уравнение

$$2y \frac{dx}{dy} - x = -x^3 \sin y, \quad (159.2)$$

которое является уравнением Бернулли. Заметим, что оно имеет решение $x = 0$. Для поиска остальных решений разделим обе части уравнения на x^2 и выполним замену $x^{-2} = z(y)$. В результате получим линейное неоднородное уравнение

$$yz' + z = \sin y. \quad (159.3)$$

Соответствующее однородное уравнение $yz' + z = 0$ имеет решение

$z = \frac{C}{y}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, полу-

чим:

$$y \left(\frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2} \right) + \frac{C(y)}{y} = \sin y, \quad C'(x) = \sin y,$$

$$C(x) = C_1 - \cos y, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (159.3) является:

$$z = \frac{C(y)}{y} = \frac{C_1}{y} - \frac{\cos y}{y}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\frac{1}{x^2} = \frac{C_1}{y} - \frac{\cos y}{y}, \quad x^2(C_1 - \cos y) = y.$$

Ответ: $x^2(C - \cos y) = y, \quad C \in R; \quad y = 0; \quad x = 0.$



Домашнее задание

[Ф] №№ 152, 153, 155.

26.11.2019

Занятие № 13

Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к ним

$$\text{№ 161 [Ф]: } xdx = (x^2 - 2y + 1)dy. \quad (161.1)$$

Выполнив замену $x^2 = z(y)$, получим линейное уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{dz}{dy} = z - 2y + 1 \Leftrightarrow \frac{dz}{dy} = 2z - 2(2y - 1). \quad (161.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $z' = 2z$ имеет решение $z = Ce^{2y}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(y)e^{2y} + 2C(y)e^{2y} = 2C(y)e^{2y} - 2(2y - 1), \quad C'(y) = -2(2y - 1)e^{-2y}, \\ C(y) = \int (2y - 1)d(e^{-2y}) + C_1, \quad C(y) = 2ye^{-2y} + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (161.2) является:

$$z = C(y)e^{2y} = 2y + C_1e^{2y}.$$

Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $x^2 = Ce^{2y} + 2y, \quad C \in R.$

Замечание. Уравнение (161.2) может быть приведено к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $2z - 4y + 2 = u(y)$. См. [занятие](#)

[№ 3](#)

№ 163 [Ф]: $x(e^y - y') = 2$.

(163.1)

Так как

$$e^y - y' = e^y(1 - e^{-y}y') = e^y(1 + (e^{-y})'),$$

то, выполнив в уравнении (163.1) замену $e^{-y} = z(x)$, получим линейное уравнение

$$x(1 + z') = 2z. \quad (163.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $xz' = 2z$ имеет решение $z = Cx^2$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$x(1 + C'(x)x^2 + 2xC(x)) = 2C(x)x^2, \quad x^3C'(x) = -x,$$

$$C'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad C(x) = \frac{1}{x} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, общим решением уравнения (163.2) является:

$$z = C(x)x^2 = x + C_1x^2.$$

Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $e^{-y} = x + Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}.$

Уравнение Риккати

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x),$$

в случае, если известно его некоторое частное решение y_* , может быть приведено к уравнению Бернулли заменой $y = z + y_*$.

Не существует общего метода нахождения частного решения y_* . Иногда частное решение удастся найти исходя из вида свободного члена уравнения $c(x)$. Например, для уравнения Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x} \cdot y + \frac{C}{x^2},$$

где A , B и C – вещественные постоянные (причем $(B+1)^2 \geq 4AC$)

частное решение можно найти в виде $y_* = \frac{a}{x}$.

№ 167 [Ф]: $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$. (167.1)

Поделив обе части уравнения на x^2 , получим

$$y' + \frac{y}{x} + y^2 = \frac{4}{x^2}. \quad (167.2)$$

Это уравнение Риккати. Его общее решение можно найти, зная хотя бы одно частное решение. Попробуем искать его в виде $y_* = \frac{a}{x}$.

Подставляя y_* в уравнение (167.2), будем иметь:

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \quad a^2 = 4, \quad a = \pm 2.$$

Таким образом, получили два частных решения уравнения (167.2):

$y = \frac{2}{x}$ и $y = -\frac{2}{x}$. Для преобразования уравнения (167.2) возьмем первое из них. Замена $y = z + \frac{2}{x}$ приводит уравнение (167.2) к

уравнению

$$z' - \frac{2}{x^2} + \frac{z}{x} + \frac{2}{x^2} + z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \quad z' + \frac{5z}{x} + z^2 = 0 \quad (167.3)$$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли.

Ответ: $y = \frac{2}{x}; \quad y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}, \quad C \in R.$



Домашнее задание

[Ф] №№ 164, 168, 175.