



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. [djvu](#)

---

**7.05.2019**

## **Занятие № 14**

**Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами**



[Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений](#)

### ***I. Метод исключения неизвестных***

Путем исключения неизвестных система сводится к дифференциальному уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией.

$$\text{№ 786 [Ф]:} \quad \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \quad (786)$$

Выразив из первого уравнения  $y$ :

$$y = x' - 2x, \quad (786.1)$$

и подставив полученное для  $y$  выражение во второе уравнение системы, получим

$$(x' - 2x)' = 3x + 4(x' - 2x) \Leftrightarrow x'' - 6x' + 5x = 0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ . Его корнями будут  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 5$ . Тогда  $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$ . Подставляя выражение для  $x$  в (786.1), получим  $y = (C_1 e^t + 5C_2 e^t) - 2(C_1 e^t + C_2 e^{5t}) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$ .

Ответ:  $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$ ,  $y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$ .

В матричной форме:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

$$\text{№ 788 [Ф]:} \quad \begin{cases} x' + x - 8y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{cases} \quad (788)$$

Выразив из второго уравнения  $x$ :

$$x = y' - y, \quad (788.1)$$

и подставив полученное для  $x$  выражение в первое уравнение системы, получим

$$(y' - y)' + y' - y - 8y = 0 \Leftrightarrow y'' - 9y = 0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 9 = 0$ . Его корнями будут  $\lambda_{1,2} = \pm 3$ . Тогда  $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$ . Подставляя выражение для  $y$  в (788.1), получим  $x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}$ .

Ответ:  $x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}$ ,  $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$ .

$$\text{№ 790 [Ф]:} \quad \begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases} \quad (790)$$

Выразив из второго уравнения  $x$ :

$$x = \frac{y' - y}{3}, \quad (790.1)$$

и подставив полученное для  $x$  выражение в первое уравнение системы, получим

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ . Его корнями будут  $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$ . Тогда  $y = C_1 e^t \cos 3t + C_2 e^t \sin 3t$ . Подставляя выражение для  $y$  в (790.1), получим  $x = C_2 e^t \cos 3t - C_1 e^t \sin 3t$ .

Ответ:  $x = e^t (C_2 \cos 3t - C_1 \sin 3t), \quad y = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$ .

$$\text{№ 793 [Ф]:} \quad \begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y. \end{cases} \quad (793)$$

Выразив из первого уравнения  $y$ :

$$y = 3x - x', \quad (793.1)$$

и подставив полученное для  $y$  выражение во второе уравнение системы, получим

$$x'' - 2x' + x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  имеет корень  $\lambda = 1$  кратности 2. Тогда  $x = C_1 e^t + C_2 t e^t$ . Подставляя выражение для  $x$  в (793.1), получим  $y = e^t (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)$ .

Ответ:  $x = e^t (C_1 + C_2 t), \quad y = e^t (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)$ .

$$\text{№ 813 [Ф]:} \quad \begin{cases} x'' = 2x - 3y, \\ y'' = x - 2y. \end{cases} \quad (813)$$

Выразив из второго уравнения  $x$ :

$$x = y'' + 2y, \quad (813.1)$$

и подставив полученное выражение в первое уравнение системы, получим

$$(y'' + 2y)'' = 2(y'' + 2y) - 3y \Leftrightarrow y^{(4)} - y = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение  $\lambda^4 - 1 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i$ . Тогда  $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$ .

Подставляя выражение для  $y$  в (813.1), получим  $x = 3C_1 e^t + 3C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$ .

Ответ:

$$\begin{cases} x = 3C_1 e^t + 3C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t. \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

$$\text{№ 832 } [\Phi]: \quad \begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = x + y + 5e^{-t}. \end{cases} \quad (832)$$

Выразив из второго уравнения  $x$ :

$$x = y' - y - 5e^{-t}, \quad (832.1)$$

и подставив полученное выражение в первое уравнение системы, после приведения подобных слагаемых получим уравнение

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{3t} - 30e^{-t}. \quad (832.2)$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Тогда общее решение соответствующего однородного урав-

нения  $y'' - 6y' + 8y = 0$  имеет вид:  $y_{\text{одн}} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$ . Частное решение неоднородного уравнения (832.2) можно найти методом неопределенных коэффициентов. При этом его следует искать в виде

$$y_{\text{ч}} = Ae^{3t} + Be^{-t}. \quad (832.3)$$

Подстановка выражения (832.3) в (832.2) дает:

$$-Ae^{3t} + 15Be^{-t} = 2e^{3t} - 30e^{-t} \Rightarrow A = -2, B = -2.$$

Таким образом, получали общее решение уравнения (832.2)

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}.$$

Подставляя выражение для  $y$  в (832.1), получим  $x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}$ .

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}, \\ y &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \end{aligned}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



### Домашнее задание

[Ф] №№ 787, 789, 814, 843.

13.05.2019

## Занятие № 15

### Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\text{№ 796 [Ф]:} \quad \begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases} \quad (796)$$

Выразив из первого уравнения  $y$ :

$$y = x + z - x', \quad (796.1)$$

и подставив полученное выражение для  $y$  во второе и третье уравнения заданной системы, получим

$$\begin{cases} x'' = 2x' + z' - 2x, \\ z' = x - z + x', \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 3x' - x - z, \\ z' = x - z + x'. \end{cases} \quad (796.2)$$

Выразив  $z$  из первого уравнения системы (966.2):

$$z = 3x' - x - x'', \quad (796.3)$$

из второго уравнения системы (796.2) исключим переменную  $z$ . В результате получим уравнение

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0. \quad (796.4)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm 1$ . Следовательно, общим решением уравнения (796.4) будет

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t}. \quad (796.5)$$

Подставив (796.5) в (796.3), найдем

$$z = C_1 e^{2t} + C_2 e^t - 5C_3 e^{-t}. \quad (796.6)$$

Подставив (796.5) и (796.6) в (796.1), найдем

$$y = C_2 e^t - 3C_3 e^{-t}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t}, \\ y &= C_2 e^t - 3C_3 e^{-t}, \\ z &= C_1 e^{2t} + C_2 e^t - 5C_3 e^{-t}. \end{aligned}$$

## II. Метод Эйлера (метод собственных векторов)

Систему линейных однородных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases} \quad (1)$$

можно записать в векторной форме

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad (2)$$

где  $A = (a_{ij})$  – матрица из коэффициентов системы, а  $X(t)$  – вектор неизвестных функций  $x_i(t)$ ,  $\dot{X}(t)$  – вектор производных функций  $\dot{x}_i(t)$ :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Систему (2) можно решить **методом Эйлера**, который заключается в следующем. Решение системы (2) ищем в виде вектор-функции

$$X(t) = e^{\lambda t} h, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T. \quad (3)$$

Функция (3) является решением системы (2), если  $\lambda$  – собственное значение матрицы  $A$ , а  $h$  – собственный вектор этой матрицы, соответ-

ствующий числу  $\lambda$ . Найдя собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $A$  и соответствующие собственные вектора  $h^i$ , можно построить общее решение системы (2).

**Правило 1.** Если для каждого собственного значения количество собственных векторов равно кратности этого собственного значения, то общее решение системы дифференциальных уравнений описывается формулой

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h^1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h^2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} h^n. \quad (4)$$

При этом функции  $X_i(t) = e^{\lambda_i t} h^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

№ 798 [Ф]:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z. \end{cases} \quad (798)$$

Найдем собственные значения матрицы системы  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,

построив соответствующее характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор, решая уравнение  $Ah^i = \lambda_i h^i$ .

1) Для  $\lambda_1 = 1$  и  $h^1 = (a, b, c)^T$  имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0, \\ a + b - c = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ c = b. \end{cases}$$



Полагая  $b = 1$ , получим  $h^1 = (0, 1, 1)^T$ .

2) Для  $\lambda_2 = 2$  и  $h^2 = (a, b, c)^T$  имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + c = 0, \\ a - c = 0, \\ a - b = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = c. \end{cases}$$

Полагая  $c = 1$ , получим  $h^2 = (1, 1, 1)^T$ .

3) Для  $\lambda_3 = 3$  и  $h^3 = (a, b, c)^T$  имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + c = 0, \\ a - b - c = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, \\ a = c. \end{cases}$$

Полагая  $c = 1$ , получим  $h^3 = (1, 0, 1)^T$ .

В соответствии с [правилом 1](#) по формуле (4) запишем общее решение заданного уравнения:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{2t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$ ,  $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$ ,  $z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$ .

14.05.2019

## Занятие № 16

### Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Если среди собственных чисел матрицы  $A$  имеются комплексные числа, то строится соответствующее такому собственному числу решение системы (2) через комплексные функции. Чтобы выразить решение через вещественные функции (в случае вещественной матрицы  $A$ ), надо воспользоваться тем, что вещественная и мнимая части комплексного решения, соответствующего собственному числу  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ), являются линейно независимыми решениями.

№ 801 [Ф]:

$$\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z. \end{cases} \quad (801)$$

Найдем собственные значения матрицы системы  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

построив соответствующее характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Найдем соответствующие собственные вектора.

1) Для  $\lambda_1 = 1$  и  $h^1 = (a, b, c)^T$  имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = a, \\ a + b = b, \\ 3a + c = c, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ c = -b. \end{cases}$$

Полагая  $b = 1$ , получим  $h^1 = (0, 1, -1)^T$ . Тогда решением системы (801), соответствующим  $\lambda_1 = 1$ , будет вектор-функция  $X_1(t) = e^t h^1$ .

2) Для  $\lambda_2 = 1 + 2i$  и  $h^2 = (a, b, c)^T$  имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (1 + 2i) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2ib, \\ 3a = 2ic. \end{cases}$$

Полагая  $a = 2i$ , получим  $h^2 = (2i, 1, 3)^T$ . Собственному значению  $\lambda_2 = 1 + 2i$  соответствует комплексное решение системы (803)  $X_2(t) = e^{(1+2i)t} h^2$ . Выделим в нем вещественную и мнимую части:

$$e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, построены три вещественных линейно независимых решения заданной системы и их линейная комбинация с произвольными коэффициентами дает ее общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= e^t (-2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t), & y &= e^t (C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t), \\ z &= e^t (-C_1 + 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t). \end{aligned}$$

**№ 817 [Φ]:** 
$$\begin{cases} 2x' - 5y' = 4y - x, \\ 3x' - 4y' = 2x - y. \end{cases}$$

(817)

Система (817) не приведена к нормальному виду, но ее также можно решить методом Эйлера.

Будем искать ее ненулевое решение в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{\lambda t} \\ Be^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (817.1)$$

Подставив (817.1) в заданную систему, будем иметь:

$$\begin{cases} 2A\lambda e^{\lambda t} - 5B\lambda e^{\lambda t} = 4Be^{\lambda t} - Ae^{\lambda t}, \\ 3A\lambda e^{\lambda t} - 4B\lambda e^{\lambda t} = 2Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t}, \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\lambda - 1)A - (5\lambda + 4)B = 0, \\ (3\lambda - 2)A - (4\lambda + 1)B = 0. \end{cases} \quad (817.2)$$

Система (817.2) – система линейных однородных уравнений относительно коэффициентов  $A$  и  $B$ . Она будет иметь ненулевое решение, если определитель матрицы системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda - 1 & -(5\lambda + 4) \\ 3\lambda - 2 & -(4\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0.$$

Построенное уравнение является характеристическим для заданной системы и имеет корни  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = -1$ . Подставив последовательно каждый из них в систему (817.2), найдем соответствующие им решения, и, следовательно, два линейно независимых решения вида (817.1) для заданной системы.

1) Для  $\lambda = \lambda_1 = 1$  система (817.2) равносильна уравнению  $A - B = 0$ .

Тогда  $A = B$ , и полагая  $A = 1$ , получим

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

2) Для  $\lambda = \lambda_2 = -1$  будем иметь  $B = 3A$ . Полагая  $A = 1$ , получим

$$X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение заданной системы является линейной комбинацией найденных решений  $X_1$  и  $X_2$ .

Ответ:  $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ ,  $y = C_1 e^t + 3C_2 e^{-t}$ .

**Правило 2.** Если для собственного значения  $\lambda$  кратности  $k$  имеется только  $m$  ( $m < k$ ) линейно независимых собственных векторов, то решение, соответствующее такому  $\lambda$ , можно искать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k-m}^1(t) \\ P_{k-m}^2(t) \\ \vdots \\ P_{k-m}^n(t) \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t}, \quad (5)$$

где  $P_{k-m}^i(t)$  – многочлены порядка  $m - k$  с неизвестными коэффициентами. Коэффициенты многочленов определяются путем подстановки выражений (5) в систему (1). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  в правой и левой частях уравнений, получим систему линейных уравнений относительно всех коэффициентов. Надо найти ее общее решение. **Коэффициенты многочленов должны зависеть от  $k$  произвольных постоянных.**

№ 808 [Ф]:

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2z - y. \end{cases} \quad (808)$$

Для матрицы системы  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  характеристическим урав-

нением будет уравнение  $(1 - \lambda)^2(2 - \lambda) = 0$ . Матрица  $A$  имеет про-

стое собственное значение  $\lambda_1 = 2$  и собственное значение  $\lambda_2 = 1$  кратности  $k = 2$ .

1) Для  $\lambda_1 = 2$  и  $h^1 = (a, b, c)^T$  имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 2a, \\ a + b - c = 2b, \\ -b + 2c = 2c, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, \\ a = c. \end{cases}$$

Полагая  $c = 1$ , получим  $h^1 = (1, 0, 1)^T$ . Тогда решением системы (808), соответствующим  $\lambda_1 = 2$ , будет вектор-функция  $X_1(t) = e^{2t}h^1$ .

2) Для  $\lambda_2 = 1$  и  $h^2 = (a, b, c)^T$  имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = a, \\ a + b - c = b, \\ -b + 2c = c, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = c. \end{cases}$$

Так как для собственного значения  $\lambda_2 = 1$  нашли один ( $m = 1$ ) собственный вектор  $h^2 = (a, a, a)^T$  (т. е. меньше его кратности  $k = 2$ ), то, согласно [правилу 2](#), соответствующее ему решение можно искать в виде

$$X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + g \end{pmatrix} \cdot e^t. \quad (808.1)$$

Подставив эти выражения для  $x$ ,  $y$  и  $z$  в систему (808), получим:

$$\begin{cases} at + b + a = at + b - ct - d + et + g, \\ ct + d + c = at + b + ct + d - et - g, \\ et + g + e = 2et + 2g - ct - d. \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  в правой и левой частях уравнений, будем иметь:

$$\begin{cases} a = a - c + e, \\ b + c = b - d + g, \\ c = a + c - e, \\ d + c = b + d - g, \\ e = 2e - c, \\ g + e = 2g - d, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = e, \\ a = e, \\ d = g - e, \\ b = e + g. \end{cases}$$

Пусть  $e = C_2$ ,  $g = C_3$ . Получили, что коэффициенты многочленов в (808.1) зависят от двух произвольных постоянных  $C_2$  и  $C_3$ . Таким образом, собственному значению  $\lambda_2 = 1$  соответствует решение:

$$X_2 = \begin{pmatrix} C_2 t + C_2 + C_3 \\ C_2 t - C_2 + C_3 \\ C_2 t + C_3 \end{pmatrix} \cdot e^t.$$

Сложив полученное решение и решение  $X_1$ , умноженное на произвольную постоянную  $C_1$ , получим общее решение системы (808):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 t + C_2 + C_3 \\ C_2 t - C_2 + C_3 \\ C_2 t + C_3 \end{pmatrix} \cdot e^t. \quad (808.2)$$

**Ответ:**

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_2 + C_3) e^t, & y &= (C_2 t - C_2 + C_3) e^t, \\ z &= C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_3) e^t. \end{aligned}$$



### Домашнее задание

[Ф] №№ 799, 802, 818.

Контрольная работа № 3 (часть 2) Срок выполнения: **4.06.19**





## Способы решения системы (8)

**1 способ.** Систему (8) можно решить путем приведения к одному уравнению более высокого порядка (например, методом исключения).

**2 способ.** Решить соответствующую однородную систему, а для построения частного решения применить **метод неопределенных коэффициентов**. Это можно сделать в том случае, если функции  $f_i(t)$  состоят из сумм и произведений функций  $P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0$ ,  $e^{\alpha t}$ ,  $\cos \beta t$ ,  $\sin \beta t$ .

В случае, когда  $f_i(t) = P_{m_i}^i(t)e^{\alpha t}$ , частное решение системы (9) ищем в виде

$$X_q(t) = \begin{pmatrix} Q_{m+s}^1(t)e^{\alpha t} \\ Q_{m+s}^2(t)e^{\alpha t} \\ \vdots \\ Q_{m+s}^n(t)e^{\alpha t} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $Q_{m+s}^i(t)$  - многочлены порядка  $m+s$  с неизвестными коэффициентами,  $m = \max_{i=1..n} m_i$ ,  $s = 0$ , если  $\alpha$  не является собственным значением матрицы  $A$ , и  $s = k$ , если  $\alpha$  является собственным значением матрицы  $A$  и имеет кратности  $k$ .

Неизвестные коэффициенты многочленов  $Q_{m+s}^i(t)$  определяются путем подстановки выражений (12) в систему (9) и сравнения коэффициентов подобных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда

$$f_i(t) = P_{m_i}^i(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + R_{k_i}^i(t)e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

а комплексное число  $a = \alpha + i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ) является или не является собственным значением матрицы  $A$ .

**3 способ.** Найдя общее решение соответствующей однородной системы, применить **метод вариации произвольных постоянных**. Если найдены  $n$  линейно независимых решений  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$  однородной системы (11), то общее решение неоднородной системы записывается в виде

$$X(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t) + \dots + C_n(t)X_n(t), \quad (13)$$

где функции  $C_i(t)$  восстанавливаются интегрированием производных  $C_i'(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Производные же находятся, решая линейную алгебраическую систему

$$W(t)C'(t) = F(t), \quad (14)$$

где  $W(t)$  фундаментальная матрица системы (11) (ее столбцами являются функции  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ ), вектор  $C'(t)$  - вектор производных,  $C'(t) = (C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t))^T$ . Для  $C'(t)$  имеем

$$C'(t) = W^{-1}(t)F(t). \quad (15)$$

При поиске частного решения системы (9) может быть применен **принцип суперпозиции**. Если  $F(t) = \sum_{j=1}^M F_j(t)$ , то, найдя частные решения

$X_q^j(t)$  систем  $\dot{X}(t) = AX(t) + F_j(t)$ ,  $j = \overline{1, M}$ , получим частное решение системы (9) в виде их суммы, т. е.  $X_q(t) = \sum_{j=1}^M X_q^j(t)$ .

**№ 826 [Ф]:**

$$\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases} \quad (826)$$

**1 способ (метод исключения).** Для заданной системы имеем:

$$\begin{cases} y = x' - 2e^t, \\ y' = x + t^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' - 2e^t, \\ x'' - x = 2e^t + t^2. \end{cases}$$

Решаем уравнение  $x'' - x = 2e^t + t^2$  рассмотренным на [заянии 8](#) методом.

## 2 способ (поиск частного решения по виду правой части)

Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases} \quad (826.1)$$

Собственными значениями ее матрицы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  являются

$\lambda_{1,2} = \pm 1$ , и им соответствуют собственные векторы  $h^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и

$h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Тогда общим решением системы (826.1) будет линейная

комбинация функций  $X_1 = e^t h^1$  и  $X_2 = e^{-t} h^2$ :

$$X_{\text{одн}} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (826.2)$$

Представив  $F(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$  в виде суммы функций  $F_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ 0 \end{pmatrix}$  и

$F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$ , найдем частные решения систем

$$\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x, \end{cases} \quad (826.3)$$

и

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x + t^2. \end{cases} \quad (826.4)$$

1) Частное решение первой системы будем искать в виде

$$X_q^1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at+b)e^t \\ (ct+d)e^t \end{pmatrix}.$$

Подставив выражения для  $x$  и  $y$  в (826.3), получим условия для нахождения коэффициентов  $a, b, c$  и  $d$ :

$$\begin{cases} (at+b)e^t + ae^t = (ct+d)e^t - 2e^t, \\ (ct+d)e^t + ce^t = (at+b)e^t, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = c, \\ b + a = d - 2, \\ d + c = b, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ a + c = 2, \\ d = b - c. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1, \\ d = b - 1. \end{cases}$$

Полагая  $b = 0$ , получим  $X_q^1 = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} e^t$ .

2) Частное решение второй системы (826.4) будем искать в виде:

$$X_q^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \end{pmatrix}.$$

Подставив выражения для  $x$  и  $y$  в (826.4), получим условия для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} 2at + b = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \\ 2a_1 t + b_1 = at^2 + bt + c + t^2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0, \\ 2a = b_1, \\ b = c_1, \\ 2a_1 = b, \\ b_1 = c, \\ a + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b = c_1 = 0, \\ a = -1, \\ b_1 = -2, \\ c = -2. \end{cases}$$

Таким образом,  $X_q^2 = \begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -2t \end{pmatrix}$ .

Частное решение неоднородной системы (826) найдем, применив принцип суперпозиции:

$$X_q = X_q^1 + X_q^2 = \begin{pmatrix} te^t - t^2 - 2 \\ (t-1)e^t - 2t \end{pmatrix}.$$

Общим решением заданной системы будет:

$$X = X_{одн} + X_q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t - t^2 - 2 \\ (t-1)e^t - 2t \end{pmatrix}.$$

**3 способ (метод вариации произвольных постоянных)**

**Ответ:**  $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t-1)e^t - 2t.$