



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

8.10.2018

Занятие № 6

Однородные уравнения

[Интегрирование однородных уравнений](#)

Определение 1. Функция $F(x, y)$ называется **однородной**, если $\forall \lambda > 0$ справедливо тождество $F(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^k F(x, y)$. Число k называют **порядком** (или **степенью**) однородной функции.

Примеры

$\frac{x}{y}, \frac{x+2y}{3x-y}, \frac{x^2+4y^2}{x^2}$	– однородные функции нулевого порядка, $k = 0$
$x+y, \frac{2x^2-y^2}{x+2y}, \frac{3xy}{x-5y}$	– однородные функции порядка $k = 1$
$x^2-4xy, \frac{2x^3-2xy^2}{x+y}$	– однородные функции порядка $k = 2$

Определение 2. Уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

в котором правая часть $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка, называют **однородным**.

Уравнение в дифференциалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

будет **однородным**, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными одного и того же порядка.

При $x \neq 0$, полагая $\lambda = \frac{1}{x}$, уравнение (1) приводится к виду

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1')$$

а уравнение (2) – к виду:

$$m\left(\frac{y}{x}\right)dx + n\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0. \quad (2')$$

Здесь $g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, $m\left(\frac{y}{x}\right) = M\left(1, \frac{y}{x}\right)$, $n\left(\frac{y}{x}\right) = N\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Уравнения (1') и (2') с помощью замены

$$z = \frac{y}{x} \quad (\text{т.е. } y = zx) \quad (3)$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Действительно. Так как $y' = z + xz'$, то уравнение (1') при замене (3) приводится к виду:

$$z + xz' = g(z) \Leftrightarrow xz' = g(z) - z. \quad (4)$$

Так как $dy = zdx + xdz$, то уравнение (2') при замене (3) приводится к виду

$$m(z)dx + n(z)(zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow (m(z) + zn(z))dx + xn(z)dz = 0. \quad (5)$$

(4) и (5) – уравнения с разделяющимися переменными.

$$\text{№ 101 [Ф]: } (x + 2y)dx - xdy = 0. \quad (101.1)$$

Уравнение (101.1) является однородным, так как для функций $M(x, y) = x + 2y$ и $N(x, y) = -x$ имеем

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x + 2\lambda y = \lambda(x + 2y) = \lambda M(x, y), \\ N(\lambda x, \lambda y) &= -\lambda x = \lambda N(x, y). \end{aligned}$$

Функции $M(x, y), N(x, y)$ – однородные 1-го порядка.

Легко установить, что $x = 0$ является решением заданного уравнения.

Поделив уравнение (101.1) на x , получим

$$\left(1 + \frac{2y}{x}\right)dx - dy = 0. \quad (101.2)$$

Замена $y = zx$ в полученном уравнении дает:

$$(1 + 2z)dx - (zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow (1 + z)dx - xdz = 0. \quad (101.3)$$

Одним из решений уравнения (101.3) является $z = -1$.

Найдем остальные решения уравнения (101.3). Разделив переменные в уравнении (101.3), будем иметь

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad \ln|1+z| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Полученный общий интеграл уравнения (101.3) можно преобразовать следующим образом:

$$|1+z| = e^C |x|, \quad C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1+z = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (101.3) будет

$$z = Cx - 1, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (101.4)$$

(решение $z = -1$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (101.4), получим общее решение уравнения (101.2).

Ответ:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = x(Cx - 1), \quad C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{№ 103 [\Phi]: } (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0. \quad (103.1)$$

Функции $M(x, y) = y^2 - 2xy$ и $N(x, y) = x^2$ являются однородными порядка 2. Следовательно, заданное уравнение – однородное.

Одним из решений уравнения (103.1) является $x = 0$.

При $x \neq 0$ поделив уравнение (103.1), получим:

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 2 \frac{y}{x} \right) dx + dy = 0. \quad (103.2)$$

Выполнив замену $y = zx$, будем иметь:

$$(z^2 - 2z)dx + xdz + zdx = 0, \quad z(z-1)dx + xdz = 0. \quad (103.3)$$

Очевидно, $z = 0$ и $z = 1$ являются решениями уравнения (103.3).

Разделяя переменные в (103.3), найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{z(z-1)} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right) dz = -\int \frac{1}{x} dx + \ln |C|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\ln \left| \frac{z-1}{z} \right| = -\ln |x| + \ln |C|, \quad \frac{z-1}{z} = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Получили все решения уравнения (103.3):

$$z = 0, \quad \frac{1}{z} = 1 - \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (103.4)$$

(решение $z = 1$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (103.4), получим все решения уравнения (103.2):

$$y = 0, \quad x^2 = y(x - C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ответ:

$$\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \\ x^2 = y(x - C), \quad C \in \mathbb{R}. \end{array}$$

$$\text{№ 107 [\Phi]: } xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad (107.1)$$

Заметим, что $x \neq 0$. При этом уравнение (107.1) можно привести к виду:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad (107.2)$$

Уравнение (107.2) является однородным. Выполним в нем замену $y = zx$. В результате получим

$$z + xz' = z + \operatorname{tg} z, \quad xz' = \operatorname{tg} z. \quad (107.3)$$

Решая уравнение $\operatorname{tg} z = 0$, найдем решения уравнения (107.3)

$$z = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

которые можем потерять при разделении переменных:

$$x \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} z, \quad \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln |\sin z| = \ln |x| + \ln |C|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\sin z = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Так как $\sin z = 0 \Rightarrow z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то общим решением уравнения (107.3) является следующее $\sin z = Cx, C \in \mathbb{R}$. Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\sin \frac{y}{x} = Cx, C \in \mathbb{R}.$

$$\text{№ 109 [Ф]: } xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}. \quad (109.1)$$

Область определения уравнения описывает неравенство $\frac{x + y}{x} > 0$.

Функции $M(x, y) = (x + y) \ln \frac{x + y}{x} + y$ и $N(x, y) = x$ являются однородными порядка 1, так как $\forall \lambda > 0$:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y + \lambda(x + y) \ln \frac{\lambda(x + y)}{\lambda x} = \lambda M(x, y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda N(x, y).$$

Следовательно, уравнение (109.1) является однородным. Полагая $y = zx$, для уравнения (109.1) будем иметь

$$x(z'x + z) - zx = x(1 + z) \ln(1 + z) \Leftrightarrow xz' = (1 + z) \ln(1 + z). \quad (109.2)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = 0$ является решением уравнения.

Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln |\ln(1+z)| = \ln |x| + C, \quad |\ln(1+z)| = C_1 |x|, \quad C_1 > 0,$$

$$\ln(1+z) = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (109.2) будет

$$\ln(1+z) = Cx, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (109.3)$$

(решение $z = 0$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (109.3), получим общее решение уравнения (109.1).

Ответ: $\ln \frac{x+y}{x} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$

Замечание. Так как $\lim_{z \rightarrow -1^-} (z+1)\ln(1+z) = 0$, то, если доопределить ну-

лем правую часть уравнения (109.2) при $z = -1$, решением уравнения (109.2) будет и $z = -1$. Тогда и $y = -x$ будет решением уравнения (109.1).



Домашнее задание

[Ф] №№ 102, 104, 108.

15.10.2018

Занятие № 7

Однородные уравнения

$$\text{№ 106 [Ф]: } (x^2 + y^2)y' = 2xy. \quad (106.1)$$

Уравнение является однородным.

Ответ: $y^2 - x^2 = Cy, C \in R; y = 0.$

$$\text{№ 111 [Ф]: } (y + \sqrt{xy})dx = xdy. \quad (111.1)$$

Область определения уравнения описывает неравенство $xy \geq 0$. Очевидно, уравнение (111.1) имеет решения $x = 0$ и $y = 0$, и является однородным. Найдем другие решения. Полагая $y = zx$, для уравнения (111.1) будем иметь

$$(zx + \sqrt{zx^2})dx = x(zdx + xdz) \Leftrightarrow |x|\sqrt{z}dx = x^2 dz.$$

Так как $|x| = x(\text{sign}x)$, то, разделив переменные, получим

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{(\text{sign}x)}{x} dx, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \frac{(\text{sign}x)}{x} dx + C, \quad C \in R,$$

$$2\sqrt{z} = (\text{sign}x)\ln|x| + C, \quad C \in R.$$

Обратная замена $z = \frac{y}{x}$ дает общий интеграл уравнения (111.1)

$$2\sqrt{\frac{y}{x}} = (\text{sign}x)\ln|x| + C, \quad C \in R,$$

который можно преобразовать следующим образом

$$2\sqrt{\frac{y}{x}} = (\operatorname{sign}x)\ln|x| + C \Leftrightarrow 2x(\operatorname{sign}x)\sqrt{\frac{y}{x}} = x\ln|C_1x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x|\sqrt{\frac{y}{x}} = x\ln|C_1x| \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} = x\ln|C_1x|.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0, \\ 2\sqrt{xy} &= x\ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

$$\text{№ 112 [\Phi]: } xdy = \left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right)dx. \quad (112.1)$$

Область определения уравнения описывает неравенство $|x| \geq |y|$.

Функции $M(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ и $N(x, y) = x$ являются однородными порядка 1, так как $\forall \lambda > 0$

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y + \sqrt{\lambda^2(x^2 - y^2)} = \lambda(y + \sqrt{x^2 - y^2}) = \lambda M(x, y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda N(x, y).$$

Следовательно, уравнение (112.1) является однородным.

Очевидно, $x = 0$ является решением уравнения (112.1), если допустить, что $\sqrt{-y^2} \cdot 0 = 0$ для произвольных y .

При $x \neq 0$, разделим уравнение (112.1) на x , получим

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = (\operatorname{sign}x)\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}.$$

Выполнив замену $z = \frac{y}{x}$, будем иметь

$$xz' + z = (\operatorname{sign}x)\sqrt{1 - z^2} + z \Leftrightarrow xz' = (\operatorname{sign}x)\sqrt{1 - z^2}. \quad (112.2)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = \pm 1$ являются его решениями. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{(\text{sign}x)}{x} dx, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{(\text{sign}x)}{x} dx + C, \quad C \in R,$$

$$\arcsin z = (\text{sign}x) \ln |x| + C, \quad C \in R.$$

Заменив z , получим окончательный ответ

Ответ: $\arcsin \frac{y}{x} = (\text{sign}x) \cdot \ln|x| + C, \quad C \in R, \quad y = \pm x, \quad x \neq 0.$

Уравнения, приводящиеся к однородному

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y - c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (*)$$

если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, с помощью подстановки $y = u + \beta, \quad x = v + \alpha$,

где α, β – решение системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$$

приводится к однородному уравнению

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1v + b_1u}{a_2v + b_2u}\right).$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то $a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1$, и для уравнения (*) будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y - c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = g(a_1x + b_1y). \quad (**)$$

Если $b_1 \neq 0$, то, выполнив в уравнении (**) замену $z = a_1x + b_1y$, придем у уравнению

$$\frac{1}{b_1} \cdot \left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = g(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = b_1g(z) + a_1.$$

№ 116 [Ф]: $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5.$ (116.1)

Так как

$$\begin{cases} x + 4y = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = -1, \end{cases}$$

то с помощью подстановки

$$y = u - 1, \quad x = v + 4$$

уравнение (116.1) приводится к виду

$$(v + 4u) \frac{du}{dv} = 2v + 3u, \quad (v + 4u)du - (2v + 3u)dv = 0. \quad (116.2)$$

Полученное уравнение является однородным.



Домашнее задание

[Ф] №№ 110, 308.

22.10.2018

Занятие № 8

Уравнения, приводящиеся к однородному

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y - c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (*)$$

если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, с помощью подстановки $y = u + \beta$, $x = v + \alpha$,

где α, β – решение системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$$

приводится к однородному уравнению

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1v + b_1u}{a_2v + b_2u}\right).$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, и для уравнения (*) будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y - c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = g(a_1x + b_1y). \quad (**)$$

Если $b_1 \neq 0$, то, выполнив в уравнении (**) замену $z = a_1x + b_1y$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{b_1} \cdot \left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = g(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = b_1g(z) + a_1.$$

№ 116 [Ф]: $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$.

(116.1)

Так как

$$\begin{cases} x + 4y = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = -1, \end{cases}$$

то с помощью подстановки

$$y = u - 1, \quad x = v + 4$$

уравнение (116.1) приводится к виду

$$(v + 4u) \frac{du}{dv} = 2v + 3u, \quad (v + 4u)du - (2v + 3u)dv = 0. \quad (116.2)$$

Полученное уравнение является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u = zv$. Так как $du = vdz + zdv$, то для уравнения (116.2) будем иметь

$$\begin{aligned} v(1 + 4z)(vdz + zdv) &= v(2 + 3z)dv, \\ v(1 + 4z)dz &= -2(2z^2 - z - 1)dv, \\ v(1 + 4z)dz &= -2(2z + 1)(z - 1)dv. \end{aligned} \quad (116.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = 1$ и $z = -1/2$ являются его решениями ($v = 0$ является решением уравнения (116.3), но не является решением уравнения (116.2), поэтому оно исключается из дальнейшего рассмотрения). Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{4z + 1}{2(2z + 1)(z - 1)} dz = -\frac{dv}{v}, \quad \int \frac{4z + 1}{2(2z + 1)(z - 1)} dz = -\int \frac{dv}{v} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Так как

$$\frac{4z + 1}{2(2z + 1)(z - 1)} = \frac{1}{3(2z + 1)} + \frac{5}{6(z - 1)},$$

то для уравнения (116.3) получим общий интеграл

$$\frac{1}{6} \ln |2z+1| + \frac{5}{6} \ln |z-1| + \ln |v| = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

который можно преобразовать к виду

$$(2z+1)(z-1)^5 v^6 = C_1. \quad (116.4)$$

Таким образом, получили решение уравнения (116.3) в виде (116.4).

(решения $z = 1$ и $z = -1/2$ получаются при $C_1 = 0$)

Возвращаясь к переменным x и y :

$$z = \frac{u}{v} = \frac{y+1}{x-4},$$

Получим

$$\left(2 \frac{y+1}{x-4} + 1\right) \left(\frac{y+1}{x-4} - 1\right)^5 (x-4)^6 = C,$$

$$(2y+x-2)(y-x+5)^5 = C.$$

Ответ: $(y-x+5)^5(x+2y-2) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$

$$\text{№ 114 [Ф]: } (2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0. \quad (114.1)$$

С помощью замены $z = 2x + y$, $y = z - 2x$, уравнение (114.1) приводится к виду:

$$5(z-1)dx - (2z-3)dz = 0. \quad (114.2)$$

Очевидно, $z = 1$ является решение. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$5dx - \frac{2z-3}{z-1} dz = 0, \quad \int 5dx - \int \frac{2z-3}{z-1} dz = C,$$

$$5x - \int \left(2 - \frac{1}{z-1}\right) dz = C, \quad 5x - 2z + \ln |z-1| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Полученный общий интеграл можно привести к виду

$$z-1 = C_1 e^{2z-5x}.$$

В результате получили общее решение уравнения (114.2) (**решение $z = 1$ получается при $C_1 = 0$**).

Возвращаясь к переменным x и y , получим

Ответ: $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$, $C \in R$.

$$\text{№ 118 [Ф]: } y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2. \quad (118.1)$$

1 способ. Так как $x + y - 1 = x - 3 + y + 2$, то с помощью замены

$$u = y + 2, \quad v = x - 3,$$

уравнение (118.1) приводится к виду

$$\frac{du}{dv} = 2 \left(\frac{u}{u+v} \right)^2 = 2 \left(\frac{u/v}{u/v+1} \right)^2. \quad (118.2)$$

Уравнение (118.2) является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u = zv$. Так как $du = vdz + zdv$, то для уравнения (118.2) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{vdz + zdv}{dv} &= 2 \left(\frac{z}{z+1} \right)^2, & v \frac{dz}{dv} &= 2 \left(\frac{z}{z+1} \right)^2 - z, \\ v \frac{dz}{dv} &= - \frac{z(z^2+1)}{(z+1)^2} \end{aligned} \quad (118.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = 0$ является его решением. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)} dz = - \frac{dv}{v}, \quad \int \frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)} dz = -\ln|v| + C, \quad C \in R.$$

Так как

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2+1},$$

то будем иметь

$$\ln|z| + 2 \operatorname{arctg}(z) = -\ln|v| + C, \quad \ln|z| + \ln|v| = -2 \operatorname{arctg}(z) + C.$$

Полученный общий интеграл уравнения (118.3) можно привести к виду:

$$zv = C_1 e^{-2 \operatorname{arctg}(z)}.$$

Таким образом, получили общее решение уравнения (118.3) (**решение $z = 0$ получается при $C_1 = 0$**).

Выполнив обратную замену $z = \frac{u}{v} = \frac{y+2}{x-3}$, получим ответ.

Ответ: $y + 2 = C e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}}, \quad C \in \mathbb{R}.$ (118.4)



Домашнее задание

[Ф] №№ 113, 117.

Подготовка к [самостоятельной работе](#)

29.10.2018

Занятие № 9

Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

$$\text{№ 118 [Ф]: } y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2. \quad (118.1)$$

(1 способ см. Занятие № 8)

2 способ. Рассмотрим «перевернутое» уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+y-1}{y+2} \right)^2.$$

И выполним в нем замену

$$z = \frac{x+y-1}{y+2}, \quad x = z(y+2) - y + 1, \quad x' = z'(y+2) + z - 1.$$

В результате получим

$$z'(y+2) + z - 1 = \frac{1}{2} z^2, \quad z'(y+2) = \frac{1}{2} (z^2 - 2z + 2). \\ 2(y+2)dz = (z^2 - 2z + 2)dy \quad (118.5)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Для правой части уравнения имеем

$$z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 > 0.$$

Очевидно, $y = -2$ является решением уравнения (118.5). Остальные решения найдем, разделяя переменные в уравнении (118.5), при этом будем иметь:

$$\frac{2dz}{(z-1)^2 + 1} = \frac{dy}{y+2}, \quad \int \frac{2dz}{(z-1)^2 + 1} = \int \frac{dy}{y+2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ 2 \operatorname{arctg}(z-1) = \ln |y+2| + C, \quad y+2 = C_1 e^{2 \operatorname{arctg}(z-1)}$$

Таким образом, получили решение уравнения (118.5)

$$y+2 = Ce^{2 \operatorname{arctg}(z-1)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(решение $y = -2$ получается при $C = 0$).

Выполнив обратную замену, получим решение заданного уравнения

$$y+2 = Ce^{2 \operatorname{arctg} \frac{x-3}{y+2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Полученное вторым способом решение по форме отличается от полученного первым способом. Однако, оно может быть приведено к виду (118.4), если воспользоваться следующей формулой:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$\text{№ 119 [Ф]: } (y'+1) \ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}. \quad (119.1)$$

Выполнив в уравнении (119.1) замену

$$z = \frac{y+x}{x+3} > 0, \quad y = z(x+3) - x, \quad y' = z'(x+3) + z - 1,$$

получим уравнение

$$(z'(x+3) + z) \ln z = z \Leftrightarrow z'(x+3) \ln z = z(1 - \ln z), \quad (119.2)$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Очевидно, $z = e$ является решением уравнения (119.2). Найдем остальные решения, разделяя переменные:

$$\frac{\ln z}{z(\ln z - 1)} dz = -\frac{dx}{x+3}, \quad \int \frac{\ln z}{z(\ln z - 1)} dz = -\int \frac{dx}{x+3} + C, \quad C \in R,$$

$$\int \frac{\ln z}{\ln z - 1} d \ln z = -\ln |x+3| + C, \quad \ln z + \ln |\ln z - 1| = -\ln |x+3| + C.$$

Полученное решение можно преобразовать следующим образом:

$$\ln |\ln z - 1| = C - \ln(z|x+3|), \quad \ln z - 1 = \frac{C_1}{z(x+3)}.$$

Заметим, что при $C_1 = 0$ $z = e$.

Таким образом, общим решением уравнения (119.2) является:

$$\ln z - 1 = \frac{C}{z(x+3)}, \quad C \in R.$$

Возвращаясь к переменным x и y :

$$z = \frac{y+x}{x+3},$$

получим ответ.

Ответ: $\ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{C}{y+x} + 1, C \in \mathbb{R}.$

№ 126 [Ф]: $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}.$ (126.1)

Заметим, что $y = 0$ не является решением. Поделив уравнение (126.1) на y^2 , будем иметь

$$\frac{y'}{y^2} = 1 - \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y} \right) = 1 - \frac{2}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{y} \right)^2.$$

Выполнив замену $z = \frac{1}{y}$, получим уравнение

$$\frac{dz}{dx} = 2 \left(\frac{z}{x} \right)^2 - 1, \quad (126.2)$$

которое является однородным. Замена

$$u = \frac{z}{x}, \quad z = ux, \quad \frac{dz}{dx} = x \frac{du}{dx} + u,$$

приводит уравнение (126.2) к виду уравнения с разделяющимися переменными

$$x \frac{du}{dx} = 2u^2 - u - 1. \quad (126.3)$$

Так как $2u^2 - u - 1 = (u-1)(2u+1)$, то нетрудно установить, что,

$u = 1$ и $u = -1/2$ являются решениями уравнения (126.3). Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{du}{(u-1)(2u+1)} = \frac{dx}{x}, \quad \int \left(\frac{1/3}{u-1} - \frac{2/3}{2u+1} \right) du = \int \frac{dx}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{3} \ln |u-1| - \frac{1}{3} \ln |2u+1| = \ln |x| + C,$$

$$\frac{u-1}{2u+1} = C_1 x^3, \quad u-1 = C_1 x^3 (2u+1).$$

Вывод: решением уравнения (126.3) является

$$u-1 = Cx^3(2u+1), \quad u = -1/2.$$

(решение $u = 1$ получается при $C = 0$).

Выполнив обратную замену $u = \frac{z}{x} = \frac{1}{xy}$, получим решение заданного уравнения.

Ответ: $1 - xy = Cx^3(2 + xy), C \in \mathbb{R}; xy = -2.$



Домашнее задание

[Ф] № 120, 121, 122.

Подготовка к [самостоятельной работе](#)



Домашнее задание

[Ф] § 9 (Установить, какие из уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными, однородными уравнениями).