[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

3.09.2018

Занятие № 1

Составление дифференциальных уравнений семейства кривых

Для того чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \qquad (*)$$

где C_i, $(i=\overline{1,n})$ - произвольные постоянные принадлежащие некоторой области $\mathbf{C}$, следует:

1) n раз продифференцировать равенство (*), считая y n раз непрерывно дифференцируемой функцией переменной x.
2) из получившихся соотношений и (*) исключить произвольные постоянные C_1, C_2, …, C_n.

№ 17 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий: $y = e^{Cx}$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Пусть y(x) = непрерывно дифференцируемое решение уравнения:

$$y = e^{Cx}, \qquad (1)$$

Дифференцируя равенство (1) по переменной x, получим

$$y' = Ce^{Cx} \quad \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad y' = Cy. \qquad (2)$$

Выразим C из (2):

$$C = \frac{y'}{y} \qquad (y \neq 0).$$

Подставив полученное выражение в (1), получим дифференциальное уравнение

$$y = e^{xy'/y} \quad \text{или} \quad y \ln y = xy'.$$

№ 21 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий: $x^2 + Cy^2 = 2y$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Дифференцируя равенство

$$x^2 + Cy^2 = 2y, \tag{1}$$

по переменной x, получим

$$2x + 2Cyy' = 2y', \quad Cyy' = y' - x.$$

Выразим C из последнего равенства

$$C = \frac{y' - x}{yy'} \qquad (yy' \neq 0)$$

и подставим его в (1). В результате получим дифференциальное уравнение:

$$x^2 + \frac{y' - x}{yy'} y^2 = 2y \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - y)y' - xy = 0.$$

№ 27 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий: $\ln y = ax + by$, где a, b – произвольные вещественные постоянные.

Дважды дифференцируя равенство

$$\ln y = ax + by, \tag{1}$$

по переменной x, получим

$$\frac{y'}{y} = a + by', \tag{2}$$

$$\frac{y''y-y'^2}{y^2}=by''. \tag{3}$$

Из (2) и (3) найдем

$$b=\frac{y''y-y'^2}{y^2y''},\qquad a=\frac{y'^3}{y^2y''}\qquad (yy''\neq 0),$$

которые и подставим в (1). В результате получим дифференциальное уравнений

$$\ln y=\frac{y'^3}{y^2y''}x+\frac{y''y-y'^2}{y^2y''}y\quad\Leftrightarrow\quad y^2y''(\ln y-1)=y'^2(y'x-y).$$

№ 30 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

Согласно условию, если C – абсцисса центра окружности, то $2C$ - его ордината. Уравнение окружностей радиуса 1 и с центром в точке (C, $2C$) имеет вид

$$(x-C)^2+(y-2C)^2=1. \tag{1}$$

Считая $y = y(x)$, продифференцируем равенство (1) по переменной x, получим

$$x-C+(y-2C)y'=0. \tag{2}$$

Из (2) выразим C:

$$C=\frac{x+yy'}{1+2y'}$$

и подставим в (1):

$$\left(x-\frac{x+yy'}{1+2y'}\right)^2+\left(y-2\cdot\frac{x+yy'}{1+2y'}\right)^2=1.$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$(y-2x)^2(y'^2+1)=(1+2y')^2.$$

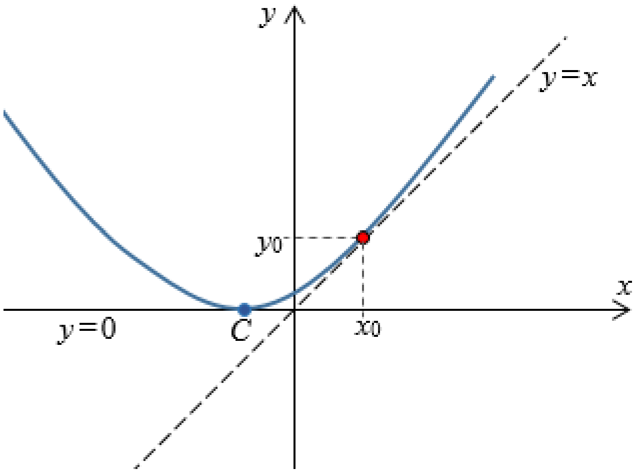
№ 31 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной Oy, и касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

Для параболы, которая имеет ось симметрии, параллельную оси Oy, и касается прямой $y = 0$ (это ось абсцисс Ox), вершина лежит на оси Ox. Общее уравнение семейства таких парабол имеет вид:

$$y = a(x - C)^2, \qquad (1)$$

где: C – абсцисса вершины параболы, произвольная величина; *a – коэффициент, который учитывает направление ветвей параболы и их отклонение от оси симметрии* (пока произвольная величина).

Установим связь между параметрами a и C, используя условие касания параболы (1) прямой $y = x$. Пусть точка (x_0, y_0) – соответствующая параметру C точка касания параболы (1) прямой $y = x$.



Имеем

$$\begin{cases} y'(x_0) = \boxed{2a(x_0 - C) = 1,} \\ y_0 = x_0, \\ y_0 = a(x_0 - C)^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая систему, найдем $a=-\dfrac{1}{4C}$, $C\neq 0$. Найденное a подставим в (1). В результате получим уравнение семейства парабол, удовлетворяющих условию задания:

$$y=-\frac{(x-C)^2}{4C},\quad C\in R\setminus\{0\}. \tag{3}$$

Для построения соответствующего ему дифференциального уравнения, продифференцируем (3) по переменной x, считая $y = y(x)$. Будем иметь

$$y'=-\frac{x-C}{2C} \quad\Leftrightarrow\quad C=\frac{x}{1-2y'}.$$

Теперь из (3) можно исключить C следующим образом:

$$y=-\frac{(x-C)^2}{4C} \;\to\; 2y=-\frac{x-C}{2C}\cdot(x-C) \;\to\; 2y=y'\cdot(x-C) \;\to$$

$$\to\; 2y=y'\cdot\left(x-\frac{x}{1-2y'}\right) \;\to\; 2y=xy'\cdot\frac{-2y'}{1-2y'} \;\to\; x(y')^2=y(2y'-1).$$

Ответ: $x(y')^2=y(2y'-1)$.

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **18**, **20**, **26**, **32**.

Уравнения с разделяющимися переменными (лекция).

10.09.2018

Занятие № 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными

№ 52 [Ф]: Решить уравнение: $\sqrt{y^2+1}\cdot dx = xydy.$ (1)

Очевидно, x = 0 является решением уравнения (1). Найдем остальные решения, выполнив разделение переменных в уравнении и проинтегрировав его

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}, \quad \int\frac{dx}{x} = \int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}, \quad \ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Ответ: x = 0, $\ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C.$

Заметим, что общий интеграл $\ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C$ можно преобразовать следующим образом:

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C \quad \Leftrightarrow \quad |x| = A\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}, \quad A = e^C > 0,$$

$$x = A\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}, \; A \neq 0. \qquad (2)$$

Решение x = 0 можно получить из соотношения (2), если положить *A* = 0. Тогда ответ будет таким:

$$x = A\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}, \; A \in \mathrm{R}.$$

№ 54 [Ф]: Решить уравнение: $y'\operatorname{ctg}x + y = 2.$ (1)

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{ctg}x\frac{dy}{dx} = 2 - y.$$

Очевидно, y = 2 является решением уравнения (1). Найдем остальные:

$$\frac{dy}{y-2} = -\frac{\sin xdx}{\cos x}, \quad \int\frac{dy}{y-2} = \int\frac{d(\cos x)}{\cos x}, \quad \ln|y-2| = \ln|\cos x| + \ln|C|,$$

где C – произвольная постоянная, но $C \neq 0$. Последнее соотношение равносильно следующему

$$|y-2|=|C||\cos x|,\quad y-2=C\cos x.$$

Если положить $C = 0$, получим решение $y = 2$.

Ответ: $y-2=C\cos x,\quad C\in\mathrm{R}.$

Замечание. Если уравнение (1) записать в дифференциалах:

$$\operatorname{ctg} x\, dy+(y-2)dx=0,$$

то в ответ надо было бы включить и решения вида:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z,$$

т.е. когда $\operatorname{ctg} x=0$.

№ 55 [Ф]: Решить уравнение: $y'=3\sqrt[3]{y^2}$. (1)

Очевидно, y = 0 является решением уравнения (1). Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}}=dx,\quad \int\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}}=\int dx,\quad y^{1/3}=x+C,\quad y=(x+C)^3,\quad C\in\mathrm{R}.$$

Ответ: $y=0,\quad y=(x+C)^3,\quad C\in\mathrm{R}.$

Рассмотреть самостоятельно!

№ 60 [Ф]: Решить уравнение: $z'=10^{x+z}$.

Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dz}{dx}=10^x\cdot 10^z,\quad 10^{-z}dz=10^x dx,\quad \int 10^{-z}dz=\int 10^x dx,$$

$$-\frac{10^{-z}}{\ln 10}=\frac{10^x}{\ln 10}-\frac{C}{\ln 10},\quad 10^{-z}=C-10^x,\ C\in\mathrm{R}.$$

Полученный общий интеграл можно разрешить относительно z:

$$z=-\lg(C-10^x).$$

Ответ: $z = -\lg(C - 10^x), \quad C \in \mathrm{R}.$

Домашнее задание

[Ф] №№ 51, 53, 56, 57, 58.

Разобрать примеры:
Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными

17.09.2018

Занятие № 3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $y' = f(ax + by + c), \; a \neq 0, \; b \neq 0,$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = ax + by + c$. Считая $z = z(x)$, получим $z' = a + by' \Rightarrow y' = \dfrac{z' - a}{b}$.

Тогда

$$y' = f(ax + by + c) \quad \overset{z=ax+by+c}{\Rightarrow} \quad z' = bf(z) + a.$$

№ 62 [Ф]: Решить уравнение: $y' = \cos(y - x)$. (1)

Уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если положить

$$y - x = z. \qquad (2)$$

При этом будем иметь

$$\frac{d(z + x)}{dx} = \cos z, \quad \frac{dz}{dx} = \cos z - 1. \qquad (3)$$

Правая часть уравнения $\cos z - 1 = 0$, если

$$z = 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (4)$$

Очевидно, (4) являются решениями уравнения (3). Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx, \quad \int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx.$$

Так как $\sin^2\left(z/2\right) = \dfrac{1-\cos z}{2}$, то

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx, \qquad -\int \frac{dz}{2\sin^2(z/2)} = \int dx, \qquad \operatorname{ctg}\frac{z}{2} = x + C, \quad C \in \mathrm{R}.$$

Получив решения уравнения (3), вернемся к замене (2). В результате получим все решения уравнения (1).

Ответ: $y = x + 2\pi k,\ k \in Z, \quad \operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2} = x + C,\ \ C \in \mathrm{R}.$

№ 65 [Ф]: Решить уравнение: $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$ (1)

<u>1 способ</u>. Выполним замену

$$z = 4x + 2y - 1. \qquad (2)$$

Так как

$$y' = \frac{z' - 4}{2},$$

то уравнение (1) приводится к виду

$$z' = 2\sqrt{z} + 4. \qquad (3)$$

Заметим, что $2\sqrt{z} + 4 > 0$. Разделив переменные в уравнении (3), получим

$$\frac{dz}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = dx, \qquad \int \frac{dz}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = \int dx + C,$$

где C – произвольная постоянная. Так как

$$\int \frac{dz}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = \left(\text{замена}: \quad \sqrt{z}+2=t\right) =$$

$$= \int \frac{t-2}{t}\,dt = t - 2\ln t = \sqrt{z}+2-2\ln(\sqrt{z}+2),$$

то интегрирование уравнения (3) дает

$$\sqrt{z}+2-2\ln(\sqrt{z}+2) = x+C \text{ или } \sqrt{z}-2\ln(\sqrt{z}+2) = x+C.$$

Выполнив обратную замену (2), получим общий интеграл уравнения (1):

$$\boxed{\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x+C, \quad C \in \mathrm{R}.} \qquad (4)$$

<u>2 способ</u>. Уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными и с помощью замены

$$z = \sqrt{4x+2y-1}. \qquad (5)$$

Тогда

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{4x+2y-1}}\cdot(4+2y') = \frac{1}{z}(2+y') \quad \Rightarrow \quad y' = zz'-2.$$

Таким образом, с помощью замены (5) уравнение (1) приводится к виду $zz'-2 = z$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{zdz}{z+2} = dx, \qquad \int \frac{zdz}{z+2} = \int dx + C, \quad z-2\ln(z+2) = x+C.$$

Выполнив обратную замену (4), получим общий интеграл уравнения (1), совпадающий с (4).

Поиск решений, удовлетворяющих заданным условиям

№ 54 [Ф]: Найти решение уравнения $y'\operatorname{ctg}x + y = 2$, удовлетворяющее условию $y(x) \to -1$ при $x \to 0$.

Общее решение уравнения имеет вид (см. занятие № 2):

$$y = 2 + C\cos x, \quad C \in \mathrm{R}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(2 + C\cos x) = 2 + C = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -3.$$

Следовательно, решением уравнения, удовлетворяющим заданному условию, является следующее $\boxed{y = 2 - 3\cos x.}$

№ 55 [Ф]: Найти решение уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, удовлетворяющее условию $y(2) = 0.$

Из множества решений уравнения (см. занятие № 2):

$$y = 0, \quad y = (x + C)^3, \quad C \in \mathrm{R},$$

два удовлетворяют заданному условию:

$$\boxed{y = 0, \quad y = (x - 2)^3.}$$

Рассмотреть самостоятельно!

№ 66 [Ф]: Решить уравнение $x^2 y' - \cos 2y = 1.$

Найти решение уравнения, удовлетворяющее условию, удовлетворяющее условию $y(+\infty) = 9\pi / 4.$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{\cos 2y + 1} = \frac{dx}{x^2}, \qquad \frac{dy}{2\cos^2 y} = \frac{dx}{x^2}.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, будем иметь

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} y = C - \frac{1}{x}, \text{ или } \quad y = arctg\left(2C - \frac{2}{x}\right) + k\pi, \ k \in Z.$$

Домашнее задание

[Ф] №№ **63, 64, 66 (завершить), 67**.

24.09.2018

Занятие № 4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

№ 90 [М]: Решить уравнение: $y' = \dfrac{1}{x+y+1}$. (1)

Рассмотрим перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = x + y + 1,$$

Для которого выполнив замену $z = x + y + 1$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1. \qquad (2)$$

Очевидно, одним из решений уравнения (2) будет $\boxed{z = -1}$. Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1, \quad \frac{dz}{z+1} = dy, \quad \int \frac{dz}{z+1} = \int dy + C, \quad \ln|z+1| = y + C, \ C \in R.$$

Заменив z на $(x + y + 1)$, получим все решения заданного уравнения:

$$x + y + 2 = 0, \quad \ln|x + y + 2| = y + C, \ C \in R. \qquad (3)$$

Так как

$$\ln|x + y + 2| = y + C, \ C \in R \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 2 = C_1 e^y, \quad C_1 \neq 0,$$

то все решения (2) можно записать следующим образом:

$$x + y + 2 = C_1 e^y, \quad C_1 \in R.$$

№ 146 [М]: Решить уравнение:

$$(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) – уравнение с разделяющимися переменными:

$$y^2(1+x)dx+x^2(1-y)dy=0.$$

Очевидно $\boxed{x = 0 \text{ и } y = 0}$ являются решениями уравнения. Найдем другие решения, разделяя переменные:

$$\frac{1+x}{x^2}dx+\frac{1-y}{y^2}dy=0, \quad \int\frac{1+x}{x^2}dx+\int\frac{1-y}{y^2}dy=C,$$

$$\ln|x|-\frac{1}{x}-\ln|y|-\frac{1}{y}=C, \quad \ln\frac{|x|}{|y|}-\frac{x+y}{xy}=C,\ C\in R.$$

В результате получили

Ответ: $x=0, \quad y=0, \ \ln\frac{|x|}{|y|}-\frac{x+y}{xy}=C,\ C\in R.$

№ 68, а [Ф]:

Найти ортогональные траектории к линиям семейства $y = Cx^2$

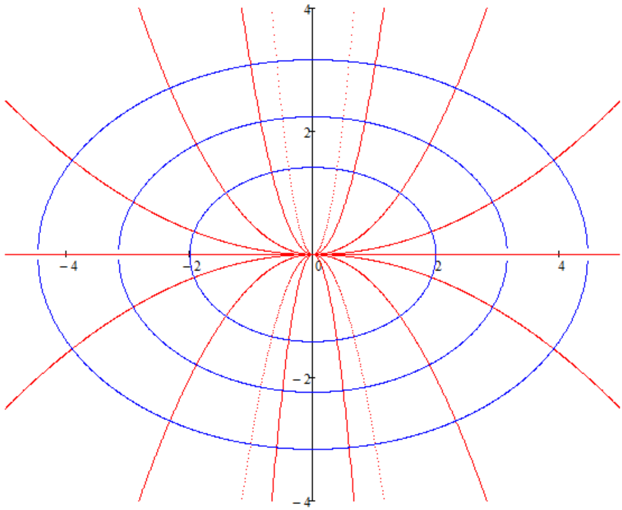
Сначала составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых. Дифференцируя по x уравнение заданного семейства (см. занятие № 1) и исключая параметр С, получим уравнение $y'=2y/x$. Заменяя в этом уравнении y' на $-1/y'$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий $y'=-x/2y$. Найдем его решение:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y} \iff 2ydy=xdx, \ \int 2ydy=\int xdx+C,$$

$$y^2+x^2/2=C, \quad C\in R.$$

Ответ: $2y^2+x^2=C, \quad C\in R.$

Иллюстрация:



Кривые заданного семейства (параболы)

Ортогональные траектории (эллипсы)

№ 68, в [Ф]:

Найти ортогональные траектории к линиям семейства $Cx^2 + y^2 = 1$.

1. Составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых:

$$\begin{cases} Cx^2 + y^2 = 1, \\ Cx + yy' = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad xyy' = y^2 - 1.$$

2. Замена y' на $-1/y'$ дает дифференциальное уравнение ортогональных траекторий:

$$xy = (1 - y^2)y'. \qquad (*)$$

3. Находим ортогональные траектории, решая уравнение (*):

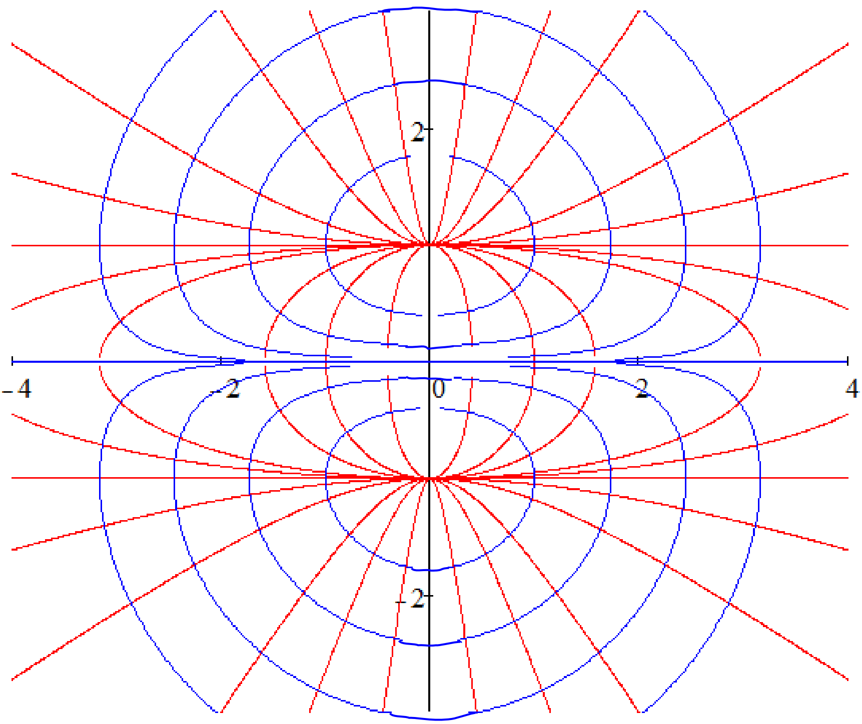
$$\frac{1-y^2}{y}dy = xdx, \quad \int \frac{1-y^2}{y}dy = \int xdx + C, \ C \in R,$$

$$\ln|y| - y^2/2 = x^2/2 + C \quad \Leftrightarrow \quad y = C_1 e^{\frac{x^2+y^2}{2}}, \ C_1 \in R \setminus \{0\}.$$

Учитывая, что $y = 0$ также является решением уравнения (*), получаем

Ответ: $y^2 = Ce^{x^2+y^2}$, $C \geq 0$.

Иллюстрация:



Кривые заданного семейства

Ортогональные траектории

№ 78 [Ф]: В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак непрерывно подается вода (5 *л* в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

Пусть t – независимая переменная, время (*мин*); x(t) – количество соли в баке в момент времени t. Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от t до t + Δt. С одной стороны, это изменение определяет разность:

$$x(t+\Delta t)-x(t).$$

Так как в произвольный момент времени $\tau\in$[t, t+Δt] концентрация соли в растворе составляет $x(\tau)$/100 (*кг/л*), то в момент времени τ убыль соли за счет вытекания смеси равна 5 $x(\tau)$/100 (*кг*), а за время от t до t + Δt:

$$\int_t^{t+\Delta t}\frac{5x(\tau)}{100}d\tau=\frac{1}{20}\int_t^{t+\Delta t}x(\tau)d\tau.$$

Таким образом, получаем

$$x(t+\Delta t)-x(t)=-\frac{1}{20}\int_t^{t+\Delta t}x(\tau)d\tau.$$

(знак «–» определяет уменьшение количества соли в баке).

Применив к интегралу теорему о среднем, предполагая, что функция $x(\tau)$ является непрерывной, получим

$$x(t+\Delta t)-x(t)=-\frac{1}{20}x(\tau^*)\Delta t,\quad \tau^*\in[t,t+\Delta t].$$

Разделим полученное соотношение на Δt и перейдем к пределу при Δt$\to$0. Если считать функцию $x(\tau)$ непрерывно дифференцируемой, то в результате предельного перехода получим уравнение

$$x'(t)=-\frac{1}{20}x(t).$$

Построив общее решение уравнения $x(t) = Ce^{-t/20}$, где $C \in$ R, выделим из него частное, используя начальное условие $x(0) = 10$. Так как при этом C = 10, то изменение количества соли со временем будет описывать функция $x(t) = 10e^{-t/20}$. Теперь можно узнать, сколько соли в баке останется через 1 час: $x(60) = 10e^{-3}$.

Домашнее задание

[**М**]: № 142: $y' = (y-1)(x+1)$;

[**М**]: № 147: $(1+y^2)\left(e^{2x}dx - e^y dy\right) - (1+y)dy = 0.$

[**Ф**]: №№ **68 (б), 71**.

1.10.2018

Занятие № 5. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Задача

Скорость увеличения площади молодого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна радиусу листа R и количеству солнечного света Q, падающего на него. Количество солнечного света пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью к листу.

Найдите зависимость между площадью листа S и временем t, если в 6 *ч* утра эта площадь составляла 1600 $см^2$, а в 18 *ч* того же дня 2500 см. Принять, что угол α между направлением луча Солнца и вертикалью в 6 *ч* утра и в 18 ч равен 90°, а в полдень – 0°.

1 ЯНВАРЯ 1837 ГОДА

Немецкий ботаник Рихард Шомбургк вместе со старшим братом Робертом, известным путешественником, обследовавший по заданию Лондонского Географического общества Британскую Гвиану (ныне Республика Гайана), в заводях бассейна Амазонки обнаружил гигантскую кувшинку. В честь взошедшей полгода спустя на британский престол королевы Виктории она была названа викторией-регией, в переводе с латыни — «Виктория царственная». Круглые с бортами листья этой кувшинки достигают в диаметре 2 м и не тонут под грузом 50 кг, ее ароматные и пышные цветки «живут» около полутора суток, успевая за это время трижды поменять свой цвет.

Домашнее задание

[**Ф**]: №№ **302, 309, 312, 319, 352.**

Дополнение к задаче. Построить график функции $S(t)$ на промежутке $t \in [0; 12]$. Выяснить, в какой момент времени наблюдается максимальный прирост площади.