[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

---

16.05.2018

Занятие № 13

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений

II. Метод Эйлера (метод собственных векторов)

Систему линейных однородных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (1)$$

можно записать в векторной форме

$$\dot{X}(t) = AX(t), \qquad (2)$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица из коэффициентов системы, а $X(t)$ – вектор неизвестных функций $x_i(t)$, $\dot{X}(t)$ – вектор производных функций $x_i(t)$:

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot{X}(t)=\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Систему (2) можно решить **методом Эйлера**, который заключается в следующем. Решение системы (2) ищем в виде вектор-функции

$$X(t)=e^{\lambda t}h, \quad h=(h_1,h_2,\dots,h_n)^T. \tag{3}$$

Функция (3) является решением системы (2), если λ – собственное значение матрицы A, а h – собственный вектор этой матрицы, соответствующий числу λ. Найдя собственные значения λ_i матрицы A и соответствующие собственные вектора h^i , можно построить общее решение системы (2).

Правило 1. Если для каждого собственного значения количество собственных векторов равно кратности этого собственного значения, то общее решение системы дифференциальных уравнений описывается формулой

$$X(t)=C_1e^{\lambda_1 t}h^1+C_2e^{\lambda_2 t}h^2+\dots+C_ne^{\lambda_n t}h^n. \tag{4}$$

При этом функции $X_i(t)=e^{\lambda_i t}h^i$, $i=\overline{1,\ n}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

№ 798 [Ф]:

$$\begin{cases} x'=2x-y+z, \\ y'=x+2y-z, \\ z'=x-y+2z. \end{cases} \tag{798}$$

Найдем собственные значения матрицы системы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

построив соответствующее характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3.$$

Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор, решая уравнение $Ah^i=\lambda_i h^i$.

1) Для $\lambda_1=1$ и $h^1=(a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b+c=0, \\ a+b-c=0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=0, \\ c=b. \end{cases}$$

Полагая $b=1,$ получим $h^1=(0,\ 1,\ 1)^T$.

2) Для $\lambda_2=2$ и $h^2=(a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -b+c=0, \\ a-c=0, \\ a-b=0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=c, \\ b=c. \end{cases}$$

Полагая $c=1,$ получим $h^2=(1,\ 1,\ 1)^T$.

3) Для $\lambda_3=3$ и $h^3=(a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a-b+c=0, \\ a-b-c=0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=0, \\ a=c. \end{cases}$$

Полагая $c=1,$ получим $h^3=(1,\ 0,\ 1)^T$.

В соответствии с правилом 1 по формуле (4) запишем общее решение заданного уравнения:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2e^{2t}+C_3e^{3t} \\ C_1e^t+C_2e^{2t} \\ C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\boxed{x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \quad y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}, \quad z = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}.}$

Если среди собственных чисел матрицы A имеются комплексные числа, то строится соответствующее такому собственному числу решение системы (2) через комплексные функции. Чтобы выразить решение через вещественные функции (в случае вещественной матрицы A), надо воспользоваться тем, что вещественная и мнимая части комплексного решения, соответствующего собственному числу $\lambda = \alpha \pm i\beta \quad (\beta \neq 0)$, являются линейно независимыми решениями.

№ 801 [Ф]:
$$\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z. \end{cases} \tag{801}$$

Найдем собственные значения матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

построив соответствующее характеристическое уравнение:
$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$
Найдем соответствующие собственные вектора.

1) Для $\lambda_1 = 1$ и $h^1 = (a,\ b,\ c)^T$ имеем:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b - c = a, \\ a + b = b, \\ 3a + c = c, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0, \\ c = -b. \end{cases}$$

Полагая $b = 1$, получим $h^1 = (0,\ 1, -1)^T$. Тогда решением системы (801), соответствующим $\lambda_1 = 1$, будет вектор-функция $X_1(t) = e^t h^1$.

2) Для $\lambda_2 = 1+2i$ и $h^2 = (a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (1+2i) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2ib, \\ 3a = 2ic. \end{cases}$$

Полагая $a = 2i$, получим $h^2 = (2i,\ 1,\ 3)^T$. Собственному значению $\lambda_2 = 1+2i$ соответствует комплексное решение системы (803) $X_2(t) = e^{(1+2i)t} h^2$. Выделим в нем вещественную и мнимую части:

$$e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, построены три вещественных линейно независимых решения заданной системы и их линейная комбинация с произвольными коэффициентами дает ее общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$x = e^t(-2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t), \quad y = e^t(C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t),$$
$$z = e^t(-C_1 + 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t).$$

№ 817 [Ф]:

$$\begin{cases} 2x' - 5y' = 4y - x, \\ 3x' - 4y' = 2x - y. \end{cases} \tag{817}$$

Система (817) не приведена к нормальному виду, но ее также можно решить методом Эйлера.

Будем искать ее ненулевое решение в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{\lambda t} \\ Be^{\lambda t} \end{pmatrix}. \qquad (817.1)$$

Подставив (817.1) в заданную систему, будем иметь:

$$\begin{cases} 2A\lambda e^{\lambda t} - 5B\lambda e^{\lambda t} = 4Be^{\lambda t} - Ae^{\lambda t}, \\ 3A\lambda e^{\lambda t} - 4B\lambda e^{\lambda t} = 2Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2\lambda - 1)A - (5\lambda + 4)B = 0, \\ (3\lambda - 2)A - (4\lambda + 1)B = 0. \end{cases} \qquad (817.2)$$

Система (817.2) – система линейных однородных уравнений относительно коэффициентов A и B. Она будет иметь ненулевое решение, если определитель матрицы системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda - 1 & -(5\lambda + 4) \\ 3\lambda - 2 & -(4\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0.$$

Построенное уравнение является характеристическим для заданной системы и имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1.$ Подставив последовательно каждый из них в систему (817.2), найдем соответствующие им решения, и, следовательно, два линейно независимых решения вида (817.1) для заданной системы.

1) Для $\lambda = \lambda_1 = 1$ система (817.2) равносильна уравнению $A - B = 0.$ Тогда $A = B,$ и полагая $A = 1,$ получим

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

2) Для $\lambda = \lambda_2 = -1$ будем иметь $B = 3A.$ Полагая $A = 1,$ получим

$$X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение заданной системы является линейной комбинацией найденных решений X_1 и X_2.

Ответ: $\boxed{x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \;\; y = C_1 e^t + 3C_2 e^{-t}.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ 799, 802, 818.

23.05.2018

Занятие № 14

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Правило 2. Если для собственного значения λ кратности k имеется только m ($m < k$) линейно независимых собственных векторов, то решение, соответствующее такому λ, можно искать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k-m}^1(t) \\ P_{k-m}^2(t) \\ \vdots \\ P_{k-m}^n(t) \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t}, \qquad (5)$$

где $P_{k-m}^i(t)$ – многочлены порядка $m-k$ с неизвестными коэффициентами. Коэффициенты многочленов определяются путем подстановки выражений (5) в систему (1). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t в правой и левой частях уравнений, получим систему линейных уравнений относительно всех коэффициентов. Надо найти ее общее решение. **Коэффициенты многочленов должны зависеть от k произвольных постоянных**.

№ 808 [Ф]:

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2z - y. \end{cases} \qquad (808)$$

Для матрицы системы $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ характеристическим уравнением будет уравнение $(1-\lambda)^2(2-\lambda)=0$. Матрица A имеет простое собственное значение $\lambda_1=2$ и собственное значение $\lambda_2=1$ кратности $k = 2$.

1) Для $\lambda_1=2$ и $h^1=(a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a-b+c=2a,\\ a+b-c=2b,\\ -b+2c=2c,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}b=0,\\ a=c.\end{cases}$$

Полагая $c=1$, получим $h^1=(1,\ 0,\ 1)^T$. Тогда решением системы (808), соответствующим $\lambda_1=2$, будет вектор-функция $X_1(t)=e^{2t}h^1$.

2) Для $\lambda_2=1$ и $h^2=(a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a-b+c=a,\\ a+b-c=b,\\ -b+2c=c,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a=c,\\ b=c.\end{cases}$$

Так как для собственного значения $\lambda_2=1$ нашли один (m = 1) собственный вектор $h^2=(a,\ a,\ a)^T$ (т. е. меньше его кратности k = 2), то, согласно правилу 2, соответствующее ему решение можно искать в виде

$$X_2=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at+b\\ ct+d\\ et+g\end{pmatrix}\cdot e^t. \qquad (808.1)$$

Подставив эти выражения для x, y и z в систему (808), получим:

$$\begin{cases} at+b+a=at+b-ct-d+et+g, \\ ct+d+c=at+b+ct+d-et-g, \\ et+g+e=2et+2g-ct-d. \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях *t* в правой и левой частях уравнений, будем иметь:

$$\begin{cases} a=a-c+e, \\ b+c=b-d+g, \\ c=a+c-e, \\ d+c=b+d-g, \\ e=2e-c, \\ g+e=2g-d, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c=e, \\ a=e, \\ d=g-e, \\ b=e+g. \end{cases}$$

Пусть $e=C_2$, $g=C_3$. Получили, что коэффициенты многочленов в (808.1) зависят от двух произвольных постоянных C_2 и C_3. Таким образом, собственному значению $\lambda_2=1$ соответствует решение:

$$X_2=\begin{pmatrix} C_2t+C_2+C_3 \\ C_2t-C_2+C_3 \\ C_2t+C_3 \end{pmatrix}\cdot e^t.$$

Сложив полученное решение и решение X_1, умноженное на произвольную постоянную C_1, получим общее решение системы (808):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} C_2t+C_2+C_3 \\ C_2t-C_2+C_3 \\ C_2t+C_3 \end{pmatrix}\cdot e^t. \qquad (808.2)$$

Ответ:

$$\boxed{\begin{aligned} & x=C_1e^{2t}+(C_2t+C_2+C_3)e^t, \quad y=(C_2t-C_2+C_3)e^t, \\ & z=C_1e^{2t}+(C_2t+C_3)e^t. \end{aligned}}$$

Замечание. Полученное общее решение (808.2) можно представить в виде линейной комбинации:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Функции $e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e^{t}\begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix}$, $e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ являются линейно независимыми решениями системы (808) и, следовательно, образуют ее фундаментальную систему решений. Действительно,

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & (t+1)e^{t} & e^{t} \\ 0 & (t-1)e^{t} & e^{t} \\ e^{2t} & te^{t} & e^{t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0.$$

Заметим, что решение $e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответствует собственному значению $\lambda_2 = 1$. Здесь вектор $h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным (полагая a = 1).

Существует и другой метод построения линейно независимых функций, которые являются решениями системы (2) и соответствуют собственному значению λ матрицы A, имеющему кратность k > 1. Этот метод основан на построении **собственного вектора** и **присоединенного** (присоединенных) **к нему вектора** (векторов). Количество присоединенных векторов равно разности (p = k – m). Собственный вектор h_0 и присоединенные к нему p векторов $h_1,\ h_2,...,\ h_p$ находятся, решая уравнения:

$$\begin{aligned}
&Ah_0 = \lambda h_0, \quad h_0 \neq 0,\\
&Ah_1 = \lambda h_1 + h_0,\\
&Ah_2 = \lambda h_2 + h_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&Ah_p = \lambda h_p + h_{p-1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Набору векторов $h_0,\ h_1,\ h_2,...,\ h_p$ соответствует p + 1 линейно независимых решений $X_0,\ X_1,...,\ X_p$ системы $\dot{X}(t) = AX(t)$:

$$\begin{aligned}
&X_0 = e^{\lambda t} h_0,\\
&X_1 = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h_0 + h_1\right),\\
&X_2 = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}h_0 + \frac{t}{1!}h_1 + h_2\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&X_p = e^{\lambda t}\left(\frac{t^p}{p!}h_0 + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}h_1 + \ \dots\ + \frac{t}{1!}h_{p-1} + h_p\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Дополнение к задаче № 808

Найдем рассмотренным выше методом линейно независимые решения системы (808), соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1$. Так как для $\lambda_2 = 1$ имеем k = 2 и m = 1, то надо найти один ($p = k - m = 1$) присоединенный вектор $h_+ = (a_1,\ b_1,\ c_1)^T$ к собственному вектору $h^2 = (a,\ a,\ a)^T$, решая второе уравнение системы (6):

$$A\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-b_1+c_1=a,\\a_1-c_1=a,\\-b_1+c_1=a,\end{cases}\iff\begin{cases}b_1=-a+c_1,\\a_1=a+c_1.\end{cases}$$

Полагая $a=1$ и $c_1=0$, будем иметь:

$$h^2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad h_+=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Согласно формулам (7), построенным векторам соответствуют следующие линейно независимые решения системы (808):

$$h^2\to X_2=e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad h_+\to X_3=e^t(t\cdot h^2+h_+)=e^t\begin{pmatrix}t+1\\t-1\\t\end{pmatrix}.$$

Учитывая решение X_1 системы (808), соответствующее собственному значению $\lambda_1=2$, запишем общее решение:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=X=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}t+1\\t-1\\t\end{pmatrix}.$$

(Сравните решение с тем, которое было получено первым способом)

№ 811 [Ф]:

$$\begin{cases}x'=2x-y-z,\\y'=2x-y-2z,\\z'=y-x+2z.\end{cases}\qquad(811)$$

Ответ:

$$\boxed{x=(C_1+C_3e)e^t,\ y=(C_2+2C_3t)e^t,\ z=(C_1-C_2-C_3-C_3t)e^t.}$$

Домашнее задание

Контрольная работа № 3 (часть 2)

30.05.2018

Занятие № 15

Системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{8}$$

Систему (8) можно записать в векторной форме

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t), \tag{9}$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица из коэффициентов системы, а $X(t)$ – вектор неизвестных функций $x_i(t)$, $\dot{X}(t)$ – вектор производных функций $x_i(t)$, $F(t)$ – вектор-функция с компонентами $f_i(t)$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (9) имеет следующую структуру

$$X(t) = X_{одн}(t) + X_{ч}(t), \qquad (10)$$

где $X_{одн}$ – общее решение соответствующей однородной системы

$$\dot{X}(t) = AX(t), \qquad (11)$$

$X_{ч}$ – какое-нибудь частное решение неоднородной системы (9).

Способы решения системы (8)

1 способ. Систему (8) можно решить путем приведения к одному уравнению более высокого порядка (например, методом исключения).

2 способ. Решить соответствующую однородную систему, а для построения частного решения применить ***метод неопределенных коэффициентов***. Это можно сделать в том случае, если функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$.

В случае, когда $f_i(t) = P^i_{m_i}(t) e^{\alpha t}$, частное решение системы (9) ищем в виде

$$X_{ч}(t) = \begin{pmatrix} Q^1_{m+s}(t)e^{\alpha t} \\ Q^2_{m+s}(t)e^{\alpha t} \\ \vdots \\ Q^n_{m+s}(t)e^{\alpha t} \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ - многочлены порядка $m+s$ с неизвестными коэффициентами, $m = \max\limits_{i=1..n} m_i$, $s = 0$, если α не является собственным значением матрицы A, и $s = k$, если α является собственным значением матрицы A и имеет кратности k.

Неизвестные коэффициенты многочленов $Q^i_{m+s}(t)$ определяются путем подстановки выражений (12) в систему (9) и сравнения коэффициентов подобных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда

$$f_i(t) = P^i_{m_i}(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + R^i_{k_i}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

а комплексное число $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ $(\beta \neq 0)$ является или не является собственным значением матрицы A.

3 способ. Найдя общее решение соответствующей однородной системы, применить ***метод вариации произвольных постоянных***. Если найдены n линейно независимых решений $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ однородной системы (11), то общее решений неоднородной системы записывается в виде

$$X(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t) + \ldots + C_n(t)X_n(t), \tag{13}$$

где функции $C_i(t)$ восстанавливаются интегрированием производных $C_i'(t),\ i = \overline{1,n}$. Производные же находятся, решая линейную алгебраическую систему

$$W(t)C'(t) = F(t), \tag{14}$$

где $W(t)$ фундаментальная матрица системы (11) (ее столбцами являются функции $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$), вектор $C'(t)$ - вектор производных, $C'(t) = (C_1'(t), C_2'(t), \ldots, C_n'(t))^T$. Для $C'(t)$ имеем

$$C'(t) = W^{-1}(t)F(t). \tag{15}$$

При поиске частного решения системы (9) может быть применен **принцип суперпозиции**. Если $F(t) = \sum_{j=1}^{M} F_j(t)$, то, найдя частные решения $X^j_ч(t)$ систем $\dot{X}(t) = AX(t) + F_j(t),\ \ j = \overline{1,M}$, получим частное решение системы (9) в виде их суммы, т. е. $X_ч(t) = \sum_{j=1}^{M} X^j_ч(t)$.

№ 826 [Ф]: $$\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases} \tag{826}$$

1 способ (метод исключения). Для заданной системы имеем:

$$\begin{cases} y = x' - 2e^t, \\ y' = x + t^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' - 2e^t, \\ x'' - x = 2e^t + t^2. \end{cases}$$

Решаем уравнение $x'' - x = 2e^t + t^2$ рассмотренным на занятии 8 методом.

2 способ (поиск частного решения по виду правой части)

Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases} \tag{826.1}$$

Собственными значениями ее матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ являются $\lambda_{1,2} = \pm 1$, и им соответствуют собственные векторы $h^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тогда общим решением системы (826.1) будет линейная комбинация функций $X_1 = e^t h^1$ и $X_2 = e^{-t} h^2$:

$$X_{одн} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{826.2}$$

Представив $F(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$ в виде суммы функций $F_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ и $F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$, найдем частные решения систем

$$\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x, \end{cases} \qquad (826.3)$$

и

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x + t^2. \end{cases} \qquad (826.4)$$

1) Частное решение первой системы будем искать в виде

$$X_ч^1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at+b)e^t \\ (ct+d)e^t \end{pmatrix}.$$

Подставив выражения для x и y в (826.3), получим условия для нахождения коэффициентов a, b, c и d:

$$\begin{cases} (at+b)e^t + ae^t = (ct+d)e^t - 2e^t, \\ (ct+d)e^t + ce^t = (at+b)e^t, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = c, \\ b + a = d - 2, \\ d + c = b, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ a + c = 2, \\ d = b - c. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1, \\ d = b - 1. \end{cases}$$

Полагая $b = 0$, получим $X_ч^1 = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} e^t.$

2) Частное решение второй системы (826.4) будем искать в виде:

$$X_ч^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ a_1t^2 + b_1t + c_1 \end{pmatrix}.$$

Подставив выражения для x и y в (826.4), получим условия для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} 2at+b=a_1t^2+b_1t+c_1, \\ 2a_1t+b_1=at^2+bt+c+t^2, \end{cases} \to \begin{cases} a_1=0, \\ 2a=b_1, \\ b=c_1, \\ 2a_1=b, \\ b_1=c, \\ a+1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b=c_1=0, \\ a=-1, \\ b_1=-2, \\ c=-2. \end{cases}$$

Таким образом, $X_ч^2=\begin{pmatrix} -t^2-2 \\ -2t \end{pmatrix}$.

Частное решение неоднородной системы (826) найдем, применив принцип суперпозиции:

$$X_ч=X_ч^1+X_ч^2=\begin{pmatrix} te^t-t^2-2 \\ (t-1)e^t-2t \end{pmatrix}.$$

Общим решением заданной системы будет:

$$X=X_{одн}+X_ч=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} te^t-t^2-2 \\ (t-1)e^t-2t \end{pmatrix}.$$

3 способ (метод вариации произвольных постоянных)

Ответ: $\boxed{x=C_1e^t+C_2e^{-t}+te^t-t^2-2, \quad y=C_1e^t-C_2e^{-t}+(t-1)e^t-2t.}$

Домашнее задание

[**Ф**] № **829**.