[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

---

Занятие № 12 (самостоятельное изучение)

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений

I. Метод исключения неизвестных

Путем исключения неизвестных система сводится к дифференциальному уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией.

№ 786 [Ф]:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \qquad (786)$$

Выразив из первого уравнения y:

$$y = x' - 2x, \qquad (786.1)$$

и подставив полученное для y выражение во второе уравнение системы, получим

$$(x' - 2x)' = 3x + 4(x' - 2x) \quad \Leftrightarrow \quad x'' - 6x' + 5x = 0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$. Его корнями будут $\lambda_1 = 1$,

$\lambda_2 = 5$. Тогда $x = C_1e^t + C_2e^{5t}$. Подставляя выражение для x в (786.1), получим $y = (C_1e^t + 5C_2e^t) - 2(C_1e^t + C_2e^{5t)}) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

Ответ: $\boxed{x = C_1e^t + C_2e^{5t}, \quad y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.}$

В матричной форме: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

№ 813 [Ф]: $\begin{cases} x'' = 2x - 3y, \\ y'' = x - 2y. \end{cases}$ (813)

Выразив из второго уравнения x:

$$x = y'' + 2y, \qquad (813.1)$$

и подставив полученное выражение в первое уравнение системы, получим

$$(y'' + 2y)'' = 2(y'' + 2y) - 3y \quad \Leftrightarrow \quad y^{(4)} - y = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$. Тогда $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$. Подставляя выражение для y в (813.1), получим $x = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$.

Ответ: $\boxed{\begin{aligned} &x = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t, \\ &y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t. \end{aligned}}$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

№ 832 [Ф]: $$\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = x + y + 5e^{-t}. \end{cases} \qquad (832)$$

Выразив из второго уравнения x:

$$x = y' - y - 5e^{-t}, \qquad (832.1)$$

и подставив полученное выражение в первое уравнение системы, после приведения подобных слагаемых получим уравнение

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{3t} - 30e^{-t}. \qquad (832.2)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$ имеет вид: $y_{одн} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$. Частное решение неоднородного уравнения (832.2) можно найти методом неопределенных коэффициентов. При этом его следует искать в виде

$$y_ч = Ae^{3t} + Be^{-t}. \qquad (832.3)$$

Подстановка выражения (832.3) в (832.2) дает:

$$-Ae^{3t} + 15Be^{-t} = 2e^{3t} - 30e^{-t} \quad \Rightarrow \quad A = -2, \;\; B = -2.$$

Таким образом, получали общее решение уравнения (832.2)

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}.$$

Подставляя выражение для y в (832.1), получим $x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}$.

Ответ: $$\boxed{\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}, \\ y &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \end{aligned}}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

№ 796 [Ф]:
$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases} \tag{796}$$

Выразив из первого уравнения y:
$$y = x + z - x', \tag{796.1}$$
и подставив полученное выражение для y во второе и третье уравнения заданной системы, получим
$$\begin{cases} x'' = 2x' + z' - 2x, \\ z' = x - z + x', \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'' = 3x' - x - z, \\ z' = x - z + x'. \end{cases} \tag{796.2}$$
Выразив z из первого уравнения системы (966.2):
$$z = 3x' - x - x'', \tag{796.3}$$
из второго уравнения системы (796.2) исключим переменную z. В результате получим уравнение
$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0. \tag{796.4}$$
Соответствующее характеристическое уравнение
$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) = 0$$
имеет корни $\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \pm 1.$ Следовательно, общим решением уравнения (796.4) будет
$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t}. \tag{796.5}$$
Подставив (796.5) в (796.3), найдем
$$z = C_1 e^{2t} + C_2 e^t - 5C_3 e^{-t}. \tag{796.6}$$
Подставив (796.5) и (796.6) в (796.1), найдем
$$y = C_2 e^t - 3C_3 e^{-t}.$$

Ответ:
$$\boxed{\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t}, \\ y &= C_2 e^t - 3C_3 e^{-t}, \\ z &= C_1 e^{2t} + C_2 e^t - 5C_3 e^{-t}. \end{aligned}}$$

Задания для самостоятельной работы

№ 787 $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{cases}$	**№ 789** $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$
№ 797 $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = y - x + z, \\ z' = x - z. \end{cases}$	**№ 814** $\begin{cases} x'' = 3x + 4y, \\ y'' = -x - y. \end{cases}$
№ 843 $\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{t}, \\ y' = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$	

II. Метод собственных векторов