



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. [djvu](#)

28.02.2018

Занятие № 4

Уравнения, допускающие понижение порядка



[Некоторые типы уравнений, допускающих понижение порядка¹](#)

Дифференциальное уравнение n -го порядка ($n > 1$) имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где F есть непрерывная функция своих аргументов, при этом левая часть зависит, по крайней мере, от старшей производной $y^{(n)}$.

Рассмотрим некоторые приемы понижения порядка уравнения (1), которые зависят от вида функции F .

I. Если уравнение (1) не содержит искомой функции, т.е. оно имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, то заменой $z = y^{(k)}$ получим уравнение $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$, порядок которого ниже на k единиц.

¹ Подробнее см., например, в кн.: Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* – М.: Едиториал УРСС, 2004 (гл. IV, § 2–4).

Заменой $z = y'$ уравнение приводится к виду $x^2 z' = z^2$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = 0$ является решением. Ненулевые решения найдем, разделяя переменные:

$$x^2 \frac{dz}{dx} = z^2, \quad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}, \quad \int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} - C_1,$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C_1, \quad z = \frac{x}{C_1 x + 1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Возвращаясь к замене, получим:

$$1) \quad y' = 0, \quad y = C;$$

$$2) \quad y' = \frac{x}{C_1 x + 1},$$

$$y = \int \frac{x dx}{C_1 x + 1} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C, & \text{если } C_1 = 0, \\ \frac{1}{C_1} \left(x - \frac{1}{C_1} \ln|C_1 x + 1| + C_2 \right), & \text{если } C_1 \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $C_1 y = x - \frac{1}{C_1} \ln|C_1 x + 1| + C_2, \quad 2y = x^2 + C, \quad y = C.$

II. Если уравнение (1) не содержит независимой переменной x , т.е. оно имеет вид $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв y за новую “независимую” переменную и сделав замену $y' = p(y)$. При такой замене для производных порядка выше первого будем иметь:

$$y'' = \frac{d}{dx}(p(y)) = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p' \cdot p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p'(y)p(y)) = \frac{d}{dy}(p' \cdot p) \cdot y' = \frac{d}{dy}(p' \cdot p) \cdot p = p'' p^2 + (p')^2 p,$$

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= \frac{d}{dx}(p'' p^2 + (p')^2 p) = \frac{d}{dy}(p'' p^2 + (p')^2 p) \cdot y' = \\ &= \frac{d}{dy}(p'' p^2 + (p')^2 p) \cdot p = p''' p^3 + 4p'' p' p^2 + (p')^3 p, \end{aligned}$$

и т.д. Заметим, что $y^{(k)} = g_k(p, p', p'', \dots, p^{(k-1)})$. Следовательно, при указанной замене будет получено уравнение $(n-1)$ -го порядка относительно новой неизвестной функции p :

$$F_1(y, p, p', p'', \dots, p^{(n-1)}) = 0.$$

№ 425 [Φ]: $y'' = 2yy'$. (425.1)

Выполнив замену $y' = p(y)$, получим

$$pp' = 2yp. \quad (425.2)$$

Очевидно, $p = 0$ является решением. Для него будем иметь

$$y' = 0 \rightarrow y = C. \quad (425.3)$$

Другие решения найдем, разделив обе части уравнения (425.2) на p :

$$pp' = 2yp \rightarrow p' = 2y \rightarrow p = y^2 + C, \quad C \in R.$$

Выполнив обратную замену, получим уравнение:

$$y' = y^2 + C, \quad (425.4)$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Построим его решение, рассматривая три случая:

1) Если $C = 0$, то будем иметь $y' = y^2$. Очевидно, оно имеет решение $y = 0$. Ненулевые решения найдем, разделяя переменные:

$$y' = y^2 \rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx \rightarrow -\frac{1}{y} = x + C_1 \rightarrow y = -\frac{1}{x + C_1}.$$

2) Если $C > 0$, то, для удобства, обозначив $C = C_1^2$, решим уравнение $y' = y^2 + C_1^2$. Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{dy}{y^2 + C_1^2} = dx \rightarrow \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} = x + C_2 \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} = C_1(x + C_2).$$

3) Если $C < 0$, то, обозначив $C = -C_1^2$, будем иметь $y' = y^2 - C_1^2$. Очевидно, $y = \pm C_1$ являются решениями уравнения. Другие решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = dx \rightarrow \frac{1}{2C_1} \ln \left| \frac{y - C_1}{y + C_1} \right| = x + C_2.$$

Учитывая, что решения $y = 0$ и $y = \pm C_1$ входят в первое найденное множество решений (425.3), запишем ответ.

Ответ:

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} = C_1(x + C_2), \quad \ln \left| \frac{y - C_1}{y + C_1} \right| = 2C_1(x + C_2),$$

$$y = -\frac{1}{x + C}, \quad y = C.$$

III. Понижение порядка уравнения приведением обеих частей уравнения к полной производной

№ 456 [Ф]: $y' y''' = 2(y'')^2$. (456.1)

Сначала понизим порядок уравнения заменой $z = y'$. В результате будем иметь:

$$z \cdot z'' = 2(z')^2. \tag{456.2}$$

Заметим, что $z = C_1$ является решением уравнения (456.2) и тогда, решая уравнение $y' = C_1$, найдем $y = C_1 x + C_2$. Другие решения уравнения (456.3) найдем, выполнив следующую цепочку преобразований:

$$z \cdot z'' = 2(z')^2 \rightarrow \frac{z''}{z'} = \frac{2z'}{z} \rightarrow (\ln|z'|)' = 2(\ln|z|)' \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \ln|z'| &= \ln z^2 + \ln|-C_1| \rightarrow z' = -C_1 z^2 \rightarrow \frac{dz}{z^2} = -C_1 dx \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{1}{z} = -C_1 x - C_2 \rightarrow z = \frac{1}{C_1 x + C_2}, \quad C_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Возвращаясь к замене, будем иметь:

$$y' = \frac{1}{C_1 x + C_2}, \quad C_1 \neq 0 \rightarrow y = \frac{1}{C_1} \ln|C_1 x + C_2| + C_3.$$

Ответ: $y = \frac{1}{C_1} \ln|C_1 x + C_2| + C_3; \quad y = C_1 x + C_2.$

IV. Если уравнение однородно относительно искомой функции и ее производных, т.е. не меняется при одновременной замене $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ на $ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}$, то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где z – новая неизвестная функция переменной x .

№ 463 [Ф]: $xyy'' - x(y')^2 = yy'$ (463.1)

Функция $F(x, y, y', y'') = xyy'' - x(y')^2 - yy'$ является однородной относительно y, y', y'' . Действительно,

$$F(x, ky, ky', ky'') = k^2 F(x, y, y', y'').$$

Выполним замену $y' = yz$. Так как $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$, то уравнение (463.1) принимает вид

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 = y^2z \rightarrow xy^2z' = y^2z. \quad (463.2)$$

В результате порядок заданного уравнения понижен на единицу. Очевидно, $y = 0$ является решением. Другие решения найдем, разделив обе части уравнения (463.2) на y^2 :

$$xz' = z. \quad (463.3)$$

$z = 0$ является решением. Далее, разделив переменные в (463.2), будем иметь:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|z| = \ln|x| + \ln|C| \rightarrow z = Cx.$$

Решение $z = 0$ будет содержаться в полученной формуле при $C = 0$.
Возвращаясь к замене, будем иметь

$$y' = yz \rightarrow y' = Cxy \rightarrow y = C_2 e^{C_1 x^2}.$$

Заметим, что решение $y = 0$ не было потеряно.

Ответ: $y = C_2 e^{C_1 x^2}$.

№ 422 [Ф]: $2xy' y'' = (y')^2 - 1$ (422.1)

Заменой $y' = z$ понизим порядок уравнения, получим

$$2xzz' = z^2 - 1. \quad (422.2)$$

Уравнение (422.2) является уравнением с разделяющимися переменными. Для него $z = \pm 1$ – решения, и им соответствуют решения заданного уравнения:

$$y' = \pm 1 \rightarrow y = \pm x + C.$$

Другие решения найдем, разделяя переменные в уравнении (422.2):

$$\frac{2zdz}{z^2 - 1} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|z^2 - 1| = \ln|x| + \ln|C_1| \rightarrow z^2 = C_1 x + 1, C_1 \neq 0,$$

$$(y')^2 = C_1 x + 1 \rightarrow y' = \pm \sqrt{C_1 x + 1} \rightarrow y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2,$$

$$9C_1^2 (y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3, C_1 \neq 0.$$

Ответ: $9C_1^2 (y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3; y = \pm x + C.$



Домашнее задание

[Ф] №№ 433, 435, 437, 460.

7.03.2018

Занятие № 5

Уравнения, допускающие понижение порядка

$$\text{№ 426 [Ф]: } yy''+1 = (y')^2$$

(426.1)

Замечание. Уравнение не имеет решений вида $y = C$.

Выполнив замену $y' = p(y)$, получим

$$ypp'+1 = p^2 \rightarrow ypp' = p^2 - 1.$$

Очевидно, $p = \pm 1$ – решения уравнения. Тогда

$$y' = \pm 1 \rightarrow y = \pm x + C.$$

Другие решения найдем, разделяя переменные

$$\begin{aligned} ypp' = p^2 - 1 &\rightarrow \frac{pdp}{p^2 - 1} = \frac{dy}{y} \rightarrow \ln|p^2 - 1| = 2\ln|y| + \ln|C| \rightarrow \\ &\rightarrow p^2 = Cy^2 + 1, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Выполнив обратную замену, получим:

$$(y')^2 = Cy^2 + 1 \rightarrow y' = \pm\sqrt{Cy^2 + 1}.$$

Полученные уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными, решения которых получим, рассматривая два случая $C > 0$ и $C < 0$.

1. Если $C > 0$, то, полагая $C = C_1^2$, решим уравнение $y' = \sqrt{C_1^2 y^2 + 1}$.

Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 + 1}} = \pm dx \rightarrow \frac{1}{C_1} \ln|C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 + 1}| = \pm x + C_2.$$

2. Если $C < 0$, то, полагая $C = -C_1^2$, решим уравнение

$y' = \sqrt{1 - C_1^2 y^2}$. Разделяя переменные, будем иметь (в силу замечания, сделанного выше, потери решений не происходит):

$$\frac{dy}{\sqrt{1-C_1^2 y^2}} = \pm dx \rightarrow \frac{1}{C_1} \arcsin(C_1 y) = \pm x + C_2.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} y &= \pm x + C, \\ \ln|C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 + 1}| &= C_1(\pm x + C_2); \\ \arcsin(C_1 y) &= C_1(\pm x + C_2). \end{aligned}$$

№ 434 [Ф]: $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$. (434.1)

Выполнив замену $y' = p(y)$, получим

$$pp' + p^2 = 2e^{-y}.$$

Заменой $p^2 = u(y)$ уравнение сводится к линейному

$$u' + 2u = 4e^{-y}. \tag{434.2}$$

Для соответствующего однородного уравнения имеем:

$$u' + 2u = 0 \rightarrow u = Ce^{-2y}.$$

Применяя метод вариации произвольной постоянной, будем искать решение уравнения (434.2) в виде:

$$u = C(y)e^{-2y}. \tag{434.3}$$

Подставляя (434.3) в (434.2), получим

$$C'(y) = 4e^y \rightarrow C(y) = 4e^y + C_1.$$

Найдя общее решение уравнения (434.2):

$$u = (4e^y + C_1)e^{-2y},$$

выполним обратные замены:

$$p^2 = (4e^y + C_1)e^{-2y} \rightarrow (y')^2 = (4e^y + C_1)e^{-2y} \rightarrow y' = \pm \frac{\sqrt{4e^y + C_1}}{e^y}.$$

Решим полученные уравнения, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{4e^y + C_1}}{e^y} \rightarrow \frac{e^y dy}{\sqrt{4e^y + C_1}} = \pm dx \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{4e^y + C_1} = \pm x + C_2.$$

Замечание. При разделении не происходит потеря решений, так как уравнение (434.1) не имеет решений вида $y = C$.

Ответ: $\sqrt{4e^y + C_1} = 2(C_2 \pm x)$.

Замечание. Полученное решение можно преобразовать к виду

$$e^y + C_1 = (x + C_2)^2.$$

№ 432 [Ф]: $(y'')^3 + xy'' = 2y'$ (432.1)

Заменой $y' = z$ понизим порядок уравнения, получим

$$(z')^3 + xz' = 2z. \quad (432.2)$$

Уравнение (432.2) является уравнением, не разрешенным относительно производной. Построим его решение методом введения параметра. Введя параметр $p = z'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dz = p dx, \\ z = \frac{1}{2}(p^3 + xp), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(3p^2 dp + p dx + x dp) = p dx, \\ z = \frac{1}{2}(p^3 + xp), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3p^2 + x) dp = p dx, \\ z = \frac{1}{2}(p^3 + xp), \end{cases} \quad \begin{cases} p = 0, \\ \frac{dx}{dp} = \frac{x}{p} + 3p, \\ z = \frac{1}{2}(p^3 + xp). \end{cases}$$

1. Если $p = 0$, то будем иметь:

$$z = 0 \rightarrow y' = 0 \rightarrow y = C.$$

2. Методом вариации решим уравнение

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x}{p} + 3p.$$

Решением соответствующего однородного уравнения является

$$x = Cp.$$

Тогда для $x = C(p)p$, будем иметь

$$C'(p)p + C(p) = C(p) + 3p \rightarrow C'(p) = 3 \rightarrow C(p) = 3p + C_1.$$

Следовательно, ,

$$\begin{cases} x = 3p^2 + C_1p, \\ z = \frac{1}{2}(p^3 + xp), \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3p^2 + C_1p, \\ z = \frac{1}{2}(4p^3 + C_1p^2). \end{cases}$$

Возвращаясь к замене $y' = z$, получим

$$dy = zdx = \frac{1}{2}(4p^3 + C_1p^2)d(3p^2 + C_1p),$$

$$dy = (12p^4 + 5C_1p^3 + \frac{C_1^2p^2}{2})dp,$$

$$y = \frac{12}{5}p^5 + \frac{5C_1}{4}p^4 + \frac{C_1^2p^3}{6} + C_2.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = 3p^2 + C_1p, \\ y = \frac{12}{5}p^5 + \frac{5C_1}{4}p^4 + \frac{C_1^2p^3}{6} + C_2, \\ y = C. \end{cases}$$



Домашнее задание

[Ф] №№ 438, 447, 451.

14.03.2018

Занятие № 6

Уравнения, допускающие понижение порядка

Построить решение уравнения $x = e^{y''} (y' - 1)$ (1)

Построим решение уравнения методом введения параметра. Запишем уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y'' = p, \\ x = e^p (p - 1). \end{cases}$$

Так как $dy' = y'' dx$, то будем иметь

$$dy' = p(e^p (p - 1) + e^p) dp, \quad dy' = p^2 e^p dp.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$y' = (p^2 - 2p + 2)e^p + C_1.$$

Так как $dy = y' dx$, то

$$dy = ((p^2 - 2p + 2)e^p + C_1) p e^p dp$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} y &= \int ((p^2 - 2p + 2)e^p + C_1) p e^p dp = \\ &= \frac{4p^3 - 14p^2 + 22p - 11}{8} e^{2p} + C_1(p - 1)e^p + C_2. \end{aligned}$$

В результате получили решение уравнения (1) в параметрическом виде.

Ответ:

$$\begin{cases} x = e^p (p - 1), \\ y = \frac{4p^3 - 14p^2 + 22p - 11}{8} e^{2p} + C_1(p - 1)e^p + C_2. \end{cases}$$



$$\text{№ 501 [Ф]: } yy'' = 2x(y')^2, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 0.5. \quad (501.1)$$

Так как уравнение является однородным относительно y и y' , то можно понизить его порядок, выполнив замену $y' = yz$ (см. **занятие № 4**). В результате получим уравнение

$$y^2(z^2 + z') = 2xy^2z^2. \quad (501.2)$$

Очевидно, уравнение имеет решение $y = 0$. Но оно не удовлетворяет начальным условиям и исключается из дальнейшего рассмотрения. Разделив уравнение на y^2 , получим

$$z^2 + z' = 2xz^2. \quad (501.3)$$

Используя заданные начальные условия, построим начальное условие для уравнения (501.3):

$$y'(2) = y(2)z(2) \rightarrow z(2) = \frac{y'(2)}{y(2)} = \frac{1}{4}. \quad (501.4)$$

Очевидно, следует искать ненулевое решение уравнения (501.3). Найдем его, разделяя переменные:

$$\begin{aligned} z' + z^2 = 2xz^2 &\rightarrow z' = (2x-1)z^2 \rightarrow -\frac{dz}{z^2} = (1-2x)dx \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{z} = x - x^2 + C \rightarrow z = \frac{1}{x - x^2 + C}. \end{aligned}$$

Подчинив найденное решение уравнения (501.3) условию (501.4):

$z(2) = \frac{1}{C-2} = \frac{1}{4}$, установим, что $C = 6$. Возвращаясь к замене, решим уравнение $y' = y \cdot \frac{1}{x - x^2 + 6}$. Разделяя переменные, найдем его ненулевое решение:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-x^2+x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} \right) dx \rightarrow$$

$$\ln|y^5| = \ln \left| \frac{x+2}{x-3} \right| + \ln|C| \rightarrow y^5 = C \cdot \frac{x+2}{x-3}.$$

Используя начальное условие $y(2)=2$, найдем $C = -8$.

Ответ: $(3-x)y^5 = 8(x+2)$.



Домашнее задание

Выполнить задания домашней контрольной работы на тему «Уравнения, допускающие понижение порядка». Срок сдачи работы **28 марта**. [Примерный вариант](#)