[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

---

24.11.2017

Занятие № 13

Уравнения в полных дифференциалах

Интегрирование уравнений в полных дифференциалах

Уравнения

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует функция $u(x,y)$, для которой $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y) = C, \qquad (2)$$

где C – произвольная постоянная. Будем считать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области D (односвязная область, в которой рассматривается уравнение). Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, является выполнение тождества

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (3)$$

Задача решения уравнения в полных дифференциалах сводится к классической задаче математического анализа о *восстановлении функции двух переменных по ее дифференциалу.* Т.е. следует найти функцию, для которой:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y). \qquad (4)$$

№ 186 [Ф]: $2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$ (186.1)

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x,$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Следовательно, уравнение (186.1) является уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 - y^2. \qquad (186.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y) = x^2 y + \varphi(y), \qquad (186.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (186.3) во второе условие системы (186.2), будем иметь

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2. \qquad (186.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = -y^2, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c,$$

где c – произвольная постоянная. Однако, при нахождении функции $\varphi(y)$ можно полагать $c = 0$. Итак, получили

$$u(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3,$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x^2 y - \frac{1}{3}y^3 = C \quad \text{или} \quad 3x^2 y - y^3 = C, \quad C \in R.}$

№ 190 [Ф]: $$\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0. \qquad (190.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{6x^2}{y^3}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{6x^2}{y^3},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{3x^2+y^2}{y^2}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{2x^3+5y}{y^3}. \qquad (190.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\varphi(y), \qquad (190.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (190.3) во второе условие (190.2), будем иметь

$$-\frac{2x^3}{y^3}+\varphi'(y)=-\frac{2x^3+5y}{y^3}. \qquad (190.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=-\frac{5}{y^2}, \quad \varphi(y)=\frac{5}{y}+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c=0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (190.3). В результате получим

$$u(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\frac{5}{y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C.}$

№ 191 [Ф]: $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$ (191.1)

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},\qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right),\qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\sqrt{x^2-y}. \tag{191.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}+\varphi(y), \tag{191.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (191.3) во второе условие (191.2), будем иметь

$$-\sqrt{x^2-y}+\varphi'(y)=-\sqrt{x^2-y}. \tag{191.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=0,\quad \varphi(y)=c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (191.3). В результате получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}=C.}$

№ 194 [Ф]: $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0.$ (194.1)

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{x\cos y}{\sin^2 y},\qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{2x\cos y}{\cos 2y-1}=-\frac{x\cos y}{\sin^2 y},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{x}{\sin y}+2,\\[2ex] \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}=-\dfrac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}.\end{cases} \tag{194.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2\sin y}+2x+\varphi(y), \tag{194.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (194.3) во второе условие (194.2), будем иметь

$$-\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y}+\varphi'(y)=-\frac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}. \tag{194.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=-\frac{\cos y}{2\sin^2 y},\quad \varphi(y)=\frac{1}{2\sin y}+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c=0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (194.3). В результате получим

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2\sin y}+2x+\frac{1}{2\sin y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{\dfrac{x^2}{2\sin y}+2x+\dfrac{1}{2\sin y}=C \quad \text{или} \quad x^2+1=2(C-2x)\sin y.}$

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **187, 189, 193**.

Выполнить пробный вариант самостоятельной работы № 2 **«Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения, сводящиеся к ним»**

1.12.2017

Занятие № 14

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Пусть уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

не является уравнением в полных дифференциалах. Дифференцируемая функция $\mu=\mu(x,y)\neq 0,$ после умножения на которую уравнение (1) становится уравнением в полных дифференциалах, называется **интегрирующим множителем** этого уравнения. Чтобы уравнение

$$\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=0 \tag{2}$$

было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial[\mu P(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial[\mu Q(x,y)]}{\partial x}. \tag{3}$$

Соотношение (3) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\mu(x,y)$. Это уравнение является линейным уравнением с частными производными первого порядка, которое можно записать в виде

$$Q(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial x} - P(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right). \qquad (4)$$

Рассмотрим случай, когда достаточно легко найти решение уравнения (4), а, следовательно, и интегрирующий множитель уравнения (1).

Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель вида $\mu(x,y) = \mu(\omega(x,y))$, **где** $\omega(x,y)$ **- известная функция, если дробь**

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - P\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}$$

является функций от $\omega(x,y)$ **, т.е.**

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - P\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial y}} = f(\omega(x,y)). \qquad (5)$$

Тогда для нахождения интегрирующего множителя получим уравнение[1]:

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \mu(\omega)\cdot f(\omega),$$

которое имеет решение

$$\mu(\omega) = C\cdot e^{\int f(\omega)d\omega}. \qquad (6)$$

Полагая, C = 1, получим интегрирующий множитель уравнения (1).

---

[1] Следует из (4), так как по правилу дифференцирования сложной функции имеем: $\dfrac{\partial\mu(\omega(x,y))}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{d\omega}\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\mu(\omega(x,y))}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{d\omega}\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$.

В частности,

если выполнено условие,	то интегрирующий множитель является функцией
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=f(x)$	$\mu=\mu(x)$
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P}=f(y)$	$\mu=\mu(y)$
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q-P}=f(x+y)$	$\mu=\mu(x+y)$
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{yQ-xP}=f(xy)$	$\mu=\mu(xy)$

Необходимо следить за тем, чтобы умножение уравнения (1) на интегрирующий множитель не приводило к потере решений и появлению посторонних решений.

№ 354 [M]: $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)dy=0.$ (354.1)

Уравнение определено при $y\neq 0$ и не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}+1\right)=-\frac{x}{y^2}\neq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}-1\right)=\frac{1}{y}.$$

В этом случае

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{-P}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)\cdot\frac{1}{-\left(\frac{x}{y}+1\right)}=\frac{1}{y}=f(y).$$

Следовательно, интегрирующий множитель является функцией y и находится по формуле (6):

$$\mu(y)=Ce^{\int\frac{1}{y}dy}=C\,|\,y\,|.$$

Уравнение определено в совокупности полуплоскостей $y > 0$ и $y < 0$. В полуплоскости $y > 0$ удобно взять $C = 1$, а в полуплоскости $y < 0$ $C = -1$. Тогда для обеих полуплоскостей $\mu(y) = y.$ После умножения на этот множитель уравнение (354.1) примет вид

$$(x+y)dx+(x-y)dy=0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=x+y,\qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=x-y. \tag{354.2}$$

Из первого равенства найдем

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+\varphi(y). \tag{354.3}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=x+\varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства (354.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y)=-y\quad\Rightarrow\quad\varphi(y)=-\frac{y^2}{2}+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (354.3). В результате получим

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 + 2xy = C.$$

Ответ: $\boxed{x^2 - y^2 + 2xy = C.}$

Замечание. Уравнение (354.1) является однородным уравнением. С помощью замены $x = uy$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$(u+1)y\,du + (u^2 + 2u - 1)dy = 0.$$

№ 355 [M]: $(x^2 + y)dx - xdy = 0.$ (355.1)

Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{Q} = -\frac{2}{x},$$

то интегрирующий множитель является функцией x и находится по формуле (6), считая $C = 1$:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Прежде, чем умножить заданное уравнение на $\mu(x)$, заметим, что $\boxed{x = 0}$ является решением уравнения (355.1). После умножения на интегрирующий множитель уравнение (355.1) примет вид

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{x}. \tag{355.2}$$

Из второго равенства найдем

$$u(x,y) = -\frac{y}{x} + \varphi(x). \qquad (355.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства (355.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(x)$ выражение в (355.3). В результате получим

$$u(x,y) = x - \frac{y}{x}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$x - \frac{y}{x} = C$$

который с ранее выделенным решением $x = 0$ дает ответ.

Ответ: $\boxed{x - \frac{y}{x} = C; \quad x = 0.}$

Замечание. Уравнение (355.1) является линейным относительно у. При $dx \neq 0$ уравнение можно привести к виду $xy' = y + x^2$ и решить, например, с помощью метода Лагранжа (метода вариации произвольной величины).

№ 358 [М]: $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0. \qquad (358.1)$

Здесь $P(x,y) = x\sin y + y\cos y, \quad Q(x,y) = x\cos y - y\sin y.$

Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{Q} = (x\cos y + \cos y - y\sin y - \cos y) \cdot \frac{1}{x\cos y - y\sin y} = 1,$$

то интегрирующий множитель является функцией x и находится по формуле (6), считая $C = 1$:

$$\mu(x) = e^{-\int 1dx} = e^{x}.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (358.1) примет вид

$$e^{x}(x\cos y - y\sin y)dy + e^{x}(x\sin y + y\cos y)dx$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^{x}(x\sin y + y\cos y), \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = e^{x}(x\cos y - y\sin y). \end{cases} \qquad (358.2)$$

Из первого равенства системы найдем

$$u(x,y) = e^{x}(x\sin y + y\cos y - \sin y) + \varphi(y). \qquad (358.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства системы (358.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (358.3). В результате получим

$$u(x,y) = e^{x}(x\sin y + y\cos y - \sin y).$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^{x}(x\sin y + y\cos y - \sin y) = C.$$

Ответ: $\boxed{e^{x}(x\sin y - \sin y + y\cos y) = C.}$

Домашнее задание

[Матвеев] №№ 356, 357, 362.

8.12.2017

Занятие № 15

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$d(xy) = ydx + xdy, \qquad d(y^2) = 2ydy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \qquad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

$$d(\ln y) = \frac{dy}{y}, \qquad d(y^n) = ny^{n-1}dy \quad \text{и т. п.}$$

№ 195 [Ф]: $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0.$ (195.1)

<u>1 способ</u>. Здесь $P(x, y) = x^2 + y^2 + x$, $Q(x, y) = y$. Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Но так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{Q} = 2,$$

то существует интегрирующий множитель, который является функцией x и находится по формуле:

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (195.1) примет вид

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах[2]. Заметим, что так как $\mu(x) = e^{2x} \neq 0,$ то при преобразовании заданного уравнения не происходит потеря решений или приобретение посторонних решений. В результате будем иметь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = e^{2x}y. \end{cases} \tag{195.2}$$

Из второго равенства системы найдем

$$u(x,y) = \frac{e^{2x}y^2}{2} + \varphi(x). \tag{195.3}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^{2x}y^2 + \varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства системы (195.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = e^{2x}(x^2 + x), \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{d\left(e^{2x}x^2\right)}{dx} \;\Rightarrow\; \varphi(x) = \frac{e^{2x}x^2}{2} + c,$$

---

[2] Проверка: $\dfrac{\partial(e^{2x}(x^2 + y^2 + x))}{\partial y} = 2ye^{2x}, \quad \dfrac{\partial(e^{2x}y)}{\partial x} = 2ye^{2x}.$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(x)$ выражение в (195.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{e^{2x}(x^2 + y^2)}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^{2x}(x^2 + y^2) = C. \qquad (195.4)$$

<u>2 способ</u>. Применим метод выделения полных дифференциалов. Для заданного уравнения имеем:

$$(x^2 + y^2)dx + xdx + ydy = 0, \quad 2(x^2 + y^2)dx + d(x^2 + y^2) = 0,$$

$$2dx + \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0, \quad 2dx + d(\ln(x^2 + y^2)) = 0,$$

$$d(2x + \ln(x^2 + y^2)) = 0, \quad 2x + \ln(x^2 + y^2) = C.$$

Полученный общий интеграл потенцированием приводится к виду (195.4).

Заметим, что точка $(x, y) = (0, 0)$ является для заданного уравнения особой точкой, поэтому приведенные выше преобразования выполнены при условии $x^2 + y^2 \neq 0$.

Ответ: $\boxed{e^{2x}(x^2 + y^2) = C.}$

№ 199 [Ф]: $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0. \qquad (199.1)$

<u>1 способ</u>. Здесь $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = -(xy + x^3)$. Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -(y + 3x^2).$$

Но так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q}=\frac{2y+y+3x^2}{-x(y+x^2)}=-\frac{3}{x}=f(x),$$

то существует интегрирующий множитель, который является функцией x и находится по формуле:

$$\mu(x)=Ce^{-3\int\frac{1}{x}dx}=\frac{C}{|x^3|}.$$

Так как C произвольная отличная от нуля постоянная, то интегрирующий множитель можно выбрать так $\mu(x)=\dfrac{1}{x^3}$. Прежде, чем умножить заданное уравнение на $\mu(x)$, заметим, что $\boxed{x=0}$ является решением заданного уравнения. Умножив уравнение (199.1) на $\mu(x)$ получим

$$\frac{y^2}{x^3}dx-\left(\frac{y}{x^2}+1\right)dy=0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах[3]. Имеем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{y^2}{x^3},\\[2ex] \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\left(\dfrac{y}{x^2}+1\right).\end{cases} \tag{199.2}$$

Из первого равенства системы найдем

$$u(x,y)=-\frac{y^2}{2x^2}+\varphi(y). \tag{199.3}$$

Отсюда

---

[3] Проверка: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y^2}{x^3}\right)=\dfrac{2y}{x^3},\quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\left(\dfrac{y}{x^2}+1\right)\right)=\dfrac{2y}{x^3}.$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{y}{x^2}+\varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства системы (199.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y)=-1 \quad\Rightarrow\quad \varphi(y)=-y+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая c = 0, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (199.3). В результате получим

$$u(x,y)=-\frac{y^2}{2x^2}-y.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$\frac{y^2}{2x^2}+y=C \text{ или } y^2=x^2(C-2y).$$

2 способ. Применим метод выделения полных дифференциалов. Для заданного уравнения имеем:

$$y^2dx-xydy-x^3dy=0,\quad y(ydx-xdy)-x^3dy=0.$$

Выделив решение $\boxed{x = 0,}$ далее последнее уравнение разделим на x^3. Будем иметь

$$\frac{y(ydx-xdy)}{x^3}-dy=0,\quad \frac{y}{x}d\left(\frac{y}{x}\right)+dy=0,\quad d\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)+2dy=0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{y^2}{x^2}+2y=C \text{ или } y^2=x^2(C-2y).$$

Ответ: $\boxed{e^{2x}(x^2+y^2)=C;\quad x=0.}$

Если в уравнении $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ можно выделить полный дифференциал некоторой функции $\psi(x,y)$, то иногда уравнение упрощается, если от переменных (x, y) перейти к переменным (x, u) или (y, u), где $u = \psi(x, y)$.

№ 202 [Ф]: $y^2 dx + (xy + \operatorname{tg} xy)dy = 0.$ (202.1)

Для заданного уравнения имеем

$$y^2 dx + xydy + \operatorname{tg} xy\, dy = 0, \quad y(ydx + xdy) + \operatorname{tg} xy\, dy = 0,$$

$$yd(xy) + \operatorname{tg} xy\, dy = 0.$$

Выполнив в последнем уравнении замену $u = xy$, будем иметь

$$ydu + \operatorname{tg} u\, dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Его решение $y \sin u = C$, $C \in R$. Выполнив обратную замену, получим ответ.

Ответ: $\boxed{y \sin(xy) = C.}$

№ 206 [Ф]: $ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{tg} \dfrac{y}{x} dx.$ (206.1)

Заметим, что $x \neq 0$. Так как $ydx - xdy = -x^2 d\left(\dfrac{y}{x}\right)$, то заданное уравнение приводится к виду

$$x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) + 2x^3 \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) + 2x \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx = 0.$$

Выполнив в последнем уравнении замену $u = \dfrac{y}{x}$, будем иметь

$$du + 2x \operatorname{tg} u\, dx = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Его решение $e^{x^2} \sin u = C$, $C \in R$. Выполнив обратную замену, получим ответ.

Ответ: $\boxed{e^{x^2} \sin \frac{y}{x} = C.}$

№ 200 [Ф]: $$\left(y-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{dy}{y}=0. \qquad (200.1)$$

Заметим, что $x \neq 0$, $y \neq 0$. Преобразуем уравнение следующим образом

$$ydx-\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0, \quad ydx-\frac{ydx-xdy}{xy}=0,$$

$$xdx-\frac{ydx-xdy}{y^2}=0, \quad d(x^2)-2d\left(\frac{x}{y}\right)=0.$$

Интегрируя полученное уравнение найдем общий интеграл заданного уравнения

$$x^2-\frac{2x}{y}=C \quad \text{или} \quad (x^2-C)y=2x.$$

Ответ: $\boxed{(x^2-C)y=2x.}$

Домашнее задание

[**Филиппов**] №№ **196, 197, 203, 201, 219**.

Задания **§ 9** (Филиппов).

15.12.2017

Занятие № 16

Уравнения 1-порядка (обзорное занятие)

№ 360 [М]: $$x\left(4+\frac{1}{x^2-y^2}\right)dx-y\left(4-\frac{1}{x^2-y^2}\right)dy=0. \qquad (360.1)$$

Заметим, что $|x| \neq |y|$. Преобразуем заданное уравнение следующим образом

$$4(xdx - ydy) + \frac{1}{x^2 - y^2}(xdx + ydy) = 0,$$

$$2d(x^2 - y^2) + \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot \frac{d(x^2 + y^2)}{2} = 0,$$

$$4(x^2 - y^2)d(x^2 - y^2) + d(x^2 + y^2) = 0,$$

$$2d\left((x^2 - y^2)^2\right) + d(x^2 + y^2) = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение найдем общий интеграл для заданного уравнения.

Ответ: $\boxed{2(x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 = C.}$

№ 359 [М]: $x^2 y^3 + y + (x^3 y^2 - x)y' = 0.$ (359.1)

Запишем уравнение в дифференциалах:

$$(x^2 y^3 + y)dx + (x^3 y^2 - x)dy = 0. \quad (359.2)$$

1 способ. Здесь $P(x, y) = x^2 y^3 + y,\ Q(x, y) = x^3 y^2 - x.$ Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 y^2 + 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 1.$$

Но так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{yQ - xP} = \frac{1}{-xy} = f(xy),$$

то существует интегрирующий множитель, который является функцией $\omega = xy$ и находится по формуле:

$$\mu(\omega) = Ce^{-\int \frac{1}{\omega} d\omega} = \frac{C}{|\omega|}, \quad \mu(xy) = \frac{1}{xy}.$$

Прежде, чем умножить уравнение (359.2) на $\mu(xy)$, заметим, что $\boxed{x = 0,\ y = 0}$ являются его решениями[4]. Умножив уравнение (359.2) на $\mu(xy)$ получим

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах[5]. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = xy^2 + \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 y - \dfrac{1}{y}. \end{cases} \tag{359.3}$$

Из первого равенства системы найдем

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y^2 + \ln|x| + \varphi(y). \tag{359.4}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 y + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства системы (359.3) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\ln|y| + c,$$

---

[4] Очевидно, $y = 0$ является решением уравнения (359.1). А $x = 0$ является решением «перевернутого» уравнения $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x^3 y^2 - x}{x^2 y^3 + y}$.

[5] Проверка: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2xy, \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y - \dfrac{1}{y}\right) = 2xy.$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (359.4). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \ln|x| - \ln|y|.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \ln|x| - \ln|y| = C \text{ или } x^2y^2 + \ln\frac{x^2}{y^2} = C.$$

<u>2 способ</u>. Заметим, что $\boxed{x = 0, \ y = 0}$ являются решениями уравнения (359.2). Для поиска других решений применим метод выделения полных дифференциалов. Для уравнения (359.2) имеем:

$$x^2y^2(ydx + xdy) + ydx - xdy = 0, \quad x^2y^2d(xy) + y^2d\left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

$$x^2d(xy) + d\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad xyd(xy) + \frac{y}{x}d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Полагая, $u = xy, \ v = \dfrac{x}{y}$, получим уравнение $udu + \dfrac{1}{v}dv = 0.$ Интегрируя его и выполняя обратную замену, найдем общий интеграл уравнения (359.2):

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C \text{ или } x^2y^2 + \ln\frac{x^2}{y^2} = C.$$

Ответ: $\boxed{x^2y^2 + \ln\dfrac{x^2}{y^2} = C; \quad y = 0; \ x = 0.}$

№ 207 [Ф]: $y^2dx + (e^x - y)dy = 0.$ (207.1)

Выполним преобразование уравнения следующим образом

$$y(ydx-dy)+e^{x}dy=0,\quad e^{-x}(ydx-dy)+\frac{dy}{y}=0,$$

$$-d(ye^{-x})+\frac{dy}{y}=0,\quad -ye^{-x}+\ln|y|=C.$$

К полученному общему интегралу добавим решение $y = 0$.

Ответ: $\boxed{\ln|y|-ye^{-x}=C;\quad y=0.}$

№ 301 [Ф]: $xy'+x^2+xy-y=0.$ (301.1)

Уравнение является линейным неоднородным. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$xy'+y(x-1)=0.$$

Решая его как уравнение с разделяющимися переменными, получим $y=Cxe^{-x}$. Далее применим метод вариации произвольной постоянной:

$$x\left(C'(x)xe^{-x}+C(x)e^{x}-C(x)xe^{-x}\right)+C(x)xe^{-x}(x-1)+x^2=0,$$

$$x^2e^{-x}C'(x)=-x^2,\quad C'(x)=-e^{x},\quad C(x)=-e^{x}+C_1,\quad C_1\in R.$$

Следовательно, $y=C(x)xe^{-x}=-x+C_1xe^{-x},\quad C_1\in R.$

Ответ: $\boxed{y=x(Ce^{-x}-1).}$

Домашнее задание

Подготовка к контрольной работе

№ 302, 303, 305, 306, 311

Самостоятельная работа № 2

Самостоятельная работа № 3