[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

3.11.2017

Занятие № 10

Линейные уравнения 1-го порядка

[Интегрирование линейных уравнений]()

> Уравнение вида
> $$a(x)y'+b(x)y = f(x),$$
> называют **линейным**. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение будет *однородным*, иначе *неоднородным*.

№ 136 [Ф]: $xy'-2y = 2x^4$. (136.1)

<u>1 способ</u> (*метод Лагранжа, метод вариации произвольной постоянной*). Рассмотрим соответствующее однородное уравнение
$$xy'-2y = 0. \qquad (136.2)$$
Заметим, что функция $y \equiv 0$ является его решением. Другие решения найдем, разделяя переменные:
$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx, \quad \ln|y| = \ln x^2 + \ln|C|, \quad C \neq 0; \quad y = Cx^2, \quad C \in R \setminus \{0\}.$$
Получили, что все решения однородного уравнения (136.2) описывает формула $y = Cx^2$, $C \in R$ (решение $y \equiv 0$ можно получить из

последней формулы при C = 0). Решение заданного уравнения (136.1) будем искать в виде:

$$y = C(x)x^2. \qquad (136.3)$$

Подставив выражение (136.3) в уравнение (136.1), получим:

$$x\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right) - 2C(x)x^2 = 2x^4, \quad x^3C'(x) = 2x^4,$$

$$C'(x) = 2x, \quad C(x) = x^2 + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (136.3). В результате получим решение заданного уравнения:

$$y = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2, \quad C \in R$$

<u>2 способ</u> (*метод Бернулли*). Будем искать решение уравнения (136.1) в виде произведения двух функций:

$$y = u(x)v(x). \qquad (136.4)$$

Подставляя (136.4) в заданное уравнение, получим

$$x(u'c + uv') - 2uv = 2x^4, \quad xu'v + u(xv' - 2v) = 2x^4. \qquad (136.5)$$

Выберем функцию v так, чтобы $xv' - 2v = 0$. Решив это уравнение как уравнение с разделяющимися переменными, получим $v = cx^2$. В качестве функции $v(x)$ можно взять функцию $v(x) = x^2$ (**Функция $v(x)$ в (136.4) является одним из решений однородного уравнения, соответствующего заданному**). Осталось найти общее решение уравнения (136.5):

$$xu' \cdot x^2 = 2x^4, \quad x^3u' = 2x^4, \quad u' = 2x, \quad u = x^2 + C.$$

Выражения для функций $u(x)$ и $v(x)$ подставляем в (136.4). В результате получим все решения заданного уравнения (136.1).

Ответ: $\boxed{y = Cx^2 + x^4, \quad C \in R.}$

Замечание. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xdy = \left(2y + 2x^4\right)dx,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv 0$.

№ 137 [Ф]: $(2x + 1)y' = 4x + 2y.$ (137.1)

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$(2x+1)y'=2y,\quad \frac{dy}{y}=\frac{2dx}{2x+1},\quad y=C(2x+1),\quad C\in R.$$

(при разделении переменных решение $y\equiv 0$ не потеряно !).

Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y=C(x)(2x+1). \tag{137.2}$$

Имеем

$$(2x+1)\big(C'(x)(2x+1)+2C(x)\big)=4x+2C(x)(2x+1),$$

$$C'(2x+1)^2=4x,\quad C'(x)=\frac{4x}{(2x+1)^2},\quad C'(x)=\frac{2(2x+1)-2}{(2x+1)^2},$$

$$C'(x)=\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{(2x+1)^2},\quad C(x)=\ln|2x+1|+\frac{1}{2x+1}+C_1,\ C_1\in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (137.2). В результате найдем решение заданного уравнения.

Ответ: $\boxed{y=(2x+1)(C+\ln|2x+1|)+1,\quad C\in R.}$

Замечание. Если заданное уравнение записать в виде:

$$(2x+1)dy=(4x+2y)dx.$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x\equiv -{}^1/_2$.

№ 138 [Ф]: $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\sec x.$ (138.1)

Для соответствующего однородного имеем

$$y'+y\,\mathrm{tg}\,x=0,\quad \frac{dy}{y}=-\mathrm{tg}x\,dx,\quad \ln|y|=\ln|\cos x|+\ln|C|,\quad y=C\cos x.$$

(при разделении переменных решение $y\equiv 0$ не будет потеряно, если $C\in R$!).

Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y=C(x)\cos x. \tag{138.2}$$

Имеем

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$C(x) = \operatorname{tg} x + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (138.2). В результате найдем решение заданного уравнения

$$y = (\operatorname{tg} x + C_1)\cos x = \sin x + C_1 \cos x.$$

2 способ (*метод интегрирующего множителя*). Умножая обе части уравнения (138.1) на $\frac{1}{\cos x}$, получим

$$\frac{1}{\cos x} y' + y \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d}{dx}\left(y \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y \cdot \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x + C, \quad y = \sin x + C\cos x, \quad C \in R.$$

Ответ: $\boxed{y = \sin x + C\cos x, \quad C \in R.}$

№ 145 [Ф]: $(x + y^2)dy = ydx.$ (145.1)

Уравнение не является линейным относительно переменной y. Однако оно линейное относительно x. Заметим, что $\boxed{y \equiv 0}$ является решением уравнения. Для поиска других решений будем считать x функцией y. Считая $dy \neq 0$, имеем

$$y\frac{dx}{dy} = x + y^2. \tag{145.2}$$

Соответствующее однородное уравнение $y\frac{dx}{dy} = x$ имеет решение $x = Cy$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\big(C'(y)y + C(y)\big) = C(y)y + y^2, \quad C'(y)y^2 = y^2,$$

$$C'(y) = 1, \quad C(y) = y + C_1, \ C_1 \in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y = (y + C_1)y = y^2 + C_1 y.$

Ответ: $\boxed{x = y^2 + Cy, \quad C \in R; \quad y = 0.}$

№ 148 [Ф]: $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y\, dy.$ (148.1)

Условие $y > 0$ определяет область определения уравнения. Уравнение не является линейным относительно переменной y. Однако оно линейное относительно x. Имеем

$$ydx = (2x + y - 4\ln y)dy, \quad y\frac{dx}{dy} = 2x + y - 4\ln y. \tag{148.2}$$

Соответствующее однородное уравнение $y\dfrac{dx}{dy} = 2x$ имеет решение $x = Cy.^2$ Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\left(C'(y)y^2 + 2yC(y)\right) = 2C(y)y^2 + y - 4\ln y, \; y^3C'(y) = y - 4\ln y,$$

$$C'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{4\ln y}{y^3}, \qquad C(y) = -\frac{1}{y} - 4\int\frac{\ln y}{y^3}dy + C_1, \; C_1 \in R.$$

Так как

$$4\int\frac{\ln y}{y^3}dy = -2\int \ln y\, d\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2\ln y}{y^2} + 2\int\frac{dy}{y^3} = -\frac{2\ln y + 1}{y^2},$$

то

$$C(y) = \frac{2\ln y + 1}{y^2} - \frac{1}{y} + C_1, \; C_1 \in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y^2 = 2\ln y + 1 - y + C_1 y^2, \quad C_1 \in R.$

Ответ: $\boxed{x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2, \quad C \in R.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ 139, 140, 141, 144.

10.11.2017

Занятие № 11

Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к ним

№ 149 [Ф]: $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$. (149.1)

Уравнение не является линейным относительно переменной y. Заметим, что $\boxed{y \equiv 0}$ является решением уравнения, а для поиска других решений рассмотрим «перевернутое» уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x - y^2}{y}, \tag{149.1}$$

которое является линейным относительно x. Соответствующее однородное уравнение $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3x}{y}$ имеет решение $x = Cy^3$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(y)x^3 + 3x^2C(y) = \frac{3C(y)y^3 - y^2}{y}, \quad C'(y)y^3 = -y,$$

$$C(y) = -\frac{1}{y^2}, \quad C(y) = \frac{1}{y} + C_1, \; C_1 \in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y^3 = \left(\dfrac{1}{y} + C_1\right)y^3 = y^2 + C_1y^3$.

Ответ: $\boxed{x = y^2 + Cy^3, \;\; C \in R; \;\; y = 0.}$

Уравнение Бернулли

$$y' = a(x)y + b(x)y^m, \quad b(x) \neq 0, \quad m \neq 0,1,$$

с помощью замены $z = y^{1-m}$ приводится к линейному

$$z' = (1-m)\big(a(x)z + b(x)\big).$$

При $m > 0$ следует учесть, что $\boldsymbol{y = 0}$ является решением уравнения Бернулли.

№ 151 [Ф]: $y' + 2y = y^2 e^x$. (151.1)

Уравнение является уравнением Бернулли (m = 2). Его решения, отличные от $\boxed{y \equiv 0}$, найдем следующим образом. Разделив обе части уравнения (151.1) на y^2, получим

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x. \quad (151.2)$$

Так как $\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y}\right)$, то, выполнив в уравнении (151.2) замену $z = \frac{1}{y}$, получим

$$z' - 2z = -e^x. \quad (151.3)$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным. Соответствующее однородное уравнение $z' - 2z = 0$ имеет решение $z = Ce^{2x}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = -e^x, \quad C'(x) = -e^{-x},$$

$$C(x) = e^{-x} + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (151.3) является:

$$z = C(x)e^x = (e^{-x} + C_1)e^{2x} = e^x + C_1 e^{2x}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\frac{1}{y} = e^x + Ce^{2x}, \quad y(e^x + Ce^{2x}) = 1, \quad C \in R.$$

Ответ: $\boxed{y(e^x + Ce^{3x}) = 1, \quad C \in R; \quad y = 0.}$

№ 154 [Ф]: $xy^2 y' = x^2 + y^3.$ (154.1)

Так как $y^2 y' = \dfrac{dy^3}{dx} \cdot \dfrac{1}{3}$, то выполнив в уравнении замену $z = y^3$, получим

$$xz' = 3(x^2 + z). \tag{154.2}$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным. Соответствующее однородное уравнение $xz' = 3z$ имеет решение $z = Cx^3$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$x(C'(x)x^3 + 3x^2 C(x)) = 3x^2 + 3C(x)x^3, \quad C'(x)x^4 = 3x^2,$$

$$C'(x) = \frac{3}{x^2}, \quad C(x) = -\frac{3}{x} + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Общим решением уравнения (154.2) будет

$$z = C(x)x^3 = \left(-\frac{3}{x} + C_1\right)x^3 = C_1 x_3 - 3x^2.$$

Выполнив обратную замену, получим ответ.

Ответ: $\boxed{y^3 = Cx^3 - 3x^2, \quad C \in R.}$

Замечание 1. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xy^2 dy = (x^2 + y^3)dx,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv 0$.

Замечание 2. Уравнение (154.1) является уравнением Бернулли. Действительно, $xy^2 y' = x^2 + y^3 \;\Rightarrow\; xy' = \dfrac{x^2}{y^2} + y$. При этом $m = -2$.

№ 157 [Ф]: $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0.$ (157.1)

Уравнение является уравнением Бернулли (m = 3). Очевидно, $\boxed{y \equiv 0}$ является его решением. Остальные решения будем искать следующим образом. Разделив обе части уравнения (157.1) на y^3, получим

$$x \cdot \frac{y'}{y^3} + \frac{2}{y^2} + x^5 e^x = 0. \qquad (157.2)$$

Так как $\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^2}\right)$, то, выполнив в уравнении (157.2) замену $z = \frac{1}{y^2}$, получим линейное уравнение

$$xz' - 4z = 2x^5 e^x. \qquad (157.3)$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения $xz' - 4z = 0$ является $z = Cx^4$. Решая уравнение (157.3) методом вариации, будем иметь

$$x(C'(x)x^4 + 4x^3 C(x)) - 4C(x)x^4 = 2x^5 e^x, \quad C'(x)x^5 = x^5 e^x,$$

$$C'(x) = 2e^x, \quad C(x) = 2e^x + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Тогда

$$z = C(x)x^4 = C_1 x^4 + 2x^4 e^x, \; C_1 \in R,$$

является общим решением уравнения (157.3).
Выполнив обратную замену:

$$\frac{1}{y^2} = (C_1 + 2e^x)x^4,$$

получим решение заданного уравнения (157.1).

Ответ: $\boxed{y^2 x^4 (2e^x + C) = 1, \quad C \in R; \quad y = 0.}$

Замечание 1. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xdy + (2y + x^5 y^3 e^x)dx = 0,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv 0$.

Домашнее задание

[Ф] №№ **146, 147, 152, 153, 155**.

17.11.2017

Занятие № 12

Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к ним

№ 159 [Ф]: $y'x^3\sin y = xy' - 2y.$ (159.1)

Очевидно, $\boxed{y = 0}$, является решением уравнения. Для поиска других решений преобразуем уравнение следующим образом. Разделив обе части уравнения на $y' \neq 0$, получим уравнение

$$2y\frac{dx}{dy} - x = -x^3\sin y, \qquad (159.2)$$

которое является уравнением Бернулли. Заметим, что оно имеет решение $\boxed{x = 0.}$ Для поиска остальных решений разделим обе части уравнения на x^2 и выполним замену $x^{-2} = z(y)$. В результате получим линейное неоднородное уравнение

$$yz' + z = \sin y. \qquad (159.3)$$

Соответствующее однородное уравнение $yz' + z = 0$ имеет решение $z = \dfrac{C}{y}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\left(\frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2}\right) + \frac{C(y)}{y} = \sin y, \quad C'(x) = \sin y,$$

$$C(x) = C_1 - \cos y, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (159.3) является:

$$z=\frac{C(y)}{y}=\frac{C_1}{y}-\frac{\cos y}{y}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\frac{1}{x^2}=\frac{C_1}{y}-\frac{\cos y}{y},\quad x^2(C_1-\cos y)=y.$$

Ответ: $\boxed{x^2(C-\cos y)=y,\ \ C\in R;\ \ y=0;\ \ x=0.}$

№ 161 [Ф]: $xdx=(x^2-2y+1)dy.$ (161.1)

Выполнив замену $x^2=z(y)$, получим линейное уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}=z-2y+1 \iff \frac{dz}{dy}=2z-2(2y-1). \qquad (161.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $z'=2z$ имеет решение $z=Ce^{2y}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(y)e^{2y}+2C(y)e^{2y}=2C(y)e^{2y}-2(2y-1),\quad C'(y)=-2(2y-1)e^{-2y},$$

$$C(y)=\int(2y-1)d(e^{-2y})+C_1,\quad C(y)=2ye^{-2y}+C_1,\quad C_1\in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (161.2) является:

$$z=C(y)e^{2y}=2y+C_1e^{2y}.$$

Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{x^2=Ce^{2y}+2y,\ \ C\in R.}$

Замечание. Уравнение (161.2) может быть приведено к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $2z-4y+2=u(y)$. См. занятие № 3

№ 163 [Ф]: $x(e^y-y')=2.$ (163.1)

Так как

$$e^y - y' = e^y(1 - e^{-y}y') = e^y(1 + (e^{-y})'),$$

то, выполнив в уравнении (163.1) замену $e^{-y} = z(x)$, получим линейное уравнение

$$x(1 + z') = 2z. \qquad (163.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $xz' = 2z$ имеет решение $z = Cx^2$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$x(1 + C'(x)x^2 + 2xC(x)) = 2C(x)x^2, \quad x^3C'(x) = -x,$$

$$C'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad C(x) = \frac{1}{x} + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (163.2) является:

$$z = C(x)x^2 = x + C_1x^2.$$

Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{e^{-y} = x + Cx^2, \quad C \in R.}$

Уравнение Рикка́ти

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x),$$

в случае, если известно его некоторое частное решение y_*, может быть приведено к уравнению Бернулли заменой $y = z + y_*$.

Не существует общего метода нахождения частного решения y_*. Иногда частное решение удается найти исходя из вида свободного члена уравнения $c(x)$. Например, для уравнения Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x} \cdot y + \frac{C}{x^2},$$

где A, B и C – вещественные постоянные (причем $(B+1)^2 \geq 4AC$) частное решение можно найти в виде $y_* = \dfrac{a}{x}$.

№ 167 [Ф]: $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4.$ (167.1)

Поделив обе части уравнения на x^2, получим

$$y' + \frac{y}{x} + y^2 = \frac{4}{x^2}. \qquad (167.2)$$

Это уравнение Риккати. Его общее решение можно найти, зная хотя бы одно частное решение. Попытаемся искать его в виде $y_* = \dfrac{a}{x}$.

Подставляя y_* в уравнение (167.2), будем иметь:

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \quad a^2 = 4, \quad a = \pm 2.$$

Таким образом, получили два частных решения уравнения (167.2): $y = \dfrac{2}{x}$ и $y = -\dfrac{2}{x}$. Для преобразования уравнения (167.2) возьмем первое из них. Замена $y = z + \dfrac{2}{x}$ приводит уравнение (167.2) к уравнению

$$z' - \frac{2}{x^2} + \frac{z}{x} + \frac{2}{x^2} + z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \quad z' + \frac{5z}{x} + z^2 = 0 \qquad (167.3)$$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли.

Ответ: $\boxed{y = \dfrac{2}{x}; \quad y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{Cx^5 - x}, \quad C \in R.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ 164, 167 (завершить), 168.