



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

8.09.2017

Занятие № 1

Составление дифференциальных уравнений семейства кривых

Для того чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (*)$$

где $C_i, (i = \overline{1, n})$ - произвольные постоянные принадлежащие некоторой области S , следует:

- 1) n раз продифференцировать равенство (*), считая y n раз непрерывно дифференцируемой функцией переменной x , т.е.
- 2) из получившихся соотношений и (*) исключить произвольные постоянные C_1, C_2, \dots, C_n .

№ 17 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий:

$y = e^{Cx}$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Пусть $y(x)$ = непрерывно дифференцируемое решение уравнения:

$$y = e^{Cx}, \quad (1)$$

Дифференцируя равенство (1) по переменной x , получим

$$y' = Ce^{Cx} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} y' = Cy. \quad (2)$$

Выразим C из (2):

$$C = \frac{y'}{y} \quad (y \neq 0).$$

Подставив полученное выражение в (1), получим дифференциальное уравнение

$$y = e^{xy'/y} \quad \text{или} \quad y \ln y = xy'.$$

№ 21 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий:

$x^2 + Cy^2 = 2y$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Дифференцируя равенство

$$x^2 + Cy^2 = 2y, \tag{1}$$

по переменной x , получим

$$2x + 2Cy y' = 2y', \quad Cy y' = y' - x.$$

Выразим C из последнего равенства

$$C = \frac{y' - x}{yy'} \quad (yy' \neq 0)$$

и подставим его в (1). В результате получим дифференциальное уравнение:

$$x^2 + \frac{y' - x}{yy'} y^2 = 2y \Leftrightarrow (x^2 - y)y' - xy = 0.$$

№ 27 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий:

$\ln y = ax + by$, где a, b – произвольные вещественные постоянные.

Дважды дифференцируя равенство

$$\ln y = ax + by, \tag{1}$$

по переменной x , получим

$$\frac{y'}{y} = a + by', \tag{2}$$

$$\frac{y''y - y'^2}{y^2} = by''. \quad (3)$$

Из (2) и (3) найдем

$$b = \frac{y''y - y'^2}{y^2y''}, \quad a = \frac{y'^3}{y^2y''} \quad (yy'' \neq 0),$$

которые и подставим в (1). В результате получим дифференциальное уравнений

$$\ln y = \frac{y'^3}{y^2y''}x + \frac{y''y - y'^2}{y^2y''}y \Leftrightarrow y^2y''(\ln y - 1) = y'^2(y'x - y).$$

№ 30 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

Согласно условию, если C – абсцисса центра окружности, то $2C$ – его ордината. Уравнение окружностей радиуса 1 и с центром в точке $(C, 2C)$ имеет вид

$$(x - C)^2 + (y - 2C)^2 = 1. \quad (1)$$

Считая $y = y(x)$, продифференцируем равенство (1) по переменной x , получим

$$x - C + (y - 2C)y' = 0. \quad (2)$$

Из (2) выразим C :

$$C = \frac{x + yy'}{1 + 2y'}$$

и подставим в (1):

$$\left(x - \frac{x + yy'}{1 + 2y'}\right)^2 + \left(y - 2 \cdot \frac{x + yy'}{1 + 2y'}\right)^2 = 1.$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$(y - 2x)^2(y'^2 + 1) = (1 + 2y')^2.$$



Домашнее задание

[Ф] №№ 18, 20, 26, 32.

Уравнения с разделяющимися переменными (лекция).

15.09.2017

Занятие № 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

[Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными](#)

№ 52 [Ф]: Решить уравнение: $\sqrt{y^2 + 1} \cdot dx = xydy$. (1)

Очевидно, $x = 0$ является решением уравнения (1). Найдем остальные решения, выполнив разделение переменных в уравнении и проинтегрировав его

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad \ln |x| = \sqrt{y^2 + 1} + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Ответ: $x = 0$, $\ln |x| = \sqrt{y^2 + 1} + C$.

Заметим, что общий интеграл $\ln |x| = \sqrt{y^2 + 1} + C$ можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln |x| = \sqrt{y^2 + 1} + C &\Leftrightarrow |x| = A \cdot e^{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad A = e^C > 0, \\ x &= A \cdot e^{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad A \neq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение $x = 0$ можно получить из соотношения (2), если положить $A = 0$. Тогда ответ будет таким:

$$x = A \cdot e^{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad A \in \mathbf{R}.$$

№ 54 [Ф]: Решить уравнение: $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$. (1)

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{ctg} x \frac{dy}{dx} = 2 - y.$$

Очевидно, $y = 2$ является решением уравнения (1). Найдем остальные:

$$\frac{dy}{y-2} = -\frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \quad \ln |y-2| = \ln |\cos x| + \ln |C|,$$

где C – произвольная постоянная, но $C \neq 0$. Последнее соотношение равносильно следующему

$$|y-2| = |C| |\cos x|, \quad y-2 = C \cos x.$$

Если положить $C = 0$, получим решение $y = 2$.

Ответ: $y - 2 = C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}$.

№ 55 [Ф]: Решить уравнение: $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. (1)

Очевидно, $y = 0$ является решением уравнения (1). Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = dx, \quad \int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \int dx, \quad y^{1/3} = x + C, \quad y = (x + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y = 0, \quad y = (x + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}$.

№ 60 [Ф]: Решить уравнение: $z' = 10^{x+z}$. (1)

Уравнение (1) является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dz}{dx} = 10^x \cdot 10^z, \quad 10^{-z} dz = 10^x dx, \quad \int 10^{-z} dz = \int 10^x dx,$$

$$-\frac{10^{-z}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{C}{\ln 10}, \quad 10^{-z} = C - 10^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Полученный общий интеграл можно разрешить относительно z :

$$z = -\lg(C - 10^x).$$

Ответ: $z = -\lg(C - 10^x)$, $C \in \mathbb{R}$.

№ 62 [Ф]: Решить уравнение: $y' = \cos(y - x)$. (1)

Уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если положить

$$y - x = z. \tag{2}$$

При этом будем иметь

$$\frac{d(z + x)}{dx} = \cos z, \quad \frac{dz}{dx} = \cos z - 1. \tag{3}$$

Правая часть уравнения $\cos z - 1 = 0$, если

$$z = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Очевидно, (4) являются решениями уравнения (3). Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx, \quad \int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx.$$

Так как $\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1 - \cos z}{2}$, то

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx, \quad -\int \frac{dz}{2\sin^2(z/2)} = \int dx, \quad \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Получив решения уравнения (3), вернемся к замене (2). В результате получим все решения уравнения (1).

Ответ: $y = x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{ctg} \frac{y - x}{2} = x + C$, $C \in \mathbb{R}$.



Домашнее задание

[Ф] №№ 51, 53, 56, 57, 58.

Разобрать примеры:

[Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными](#)

22.09.2017

Занятие № 3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = ax + by + c$. Считая $z = z(x)$, получим $z' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$.

Тогда

$$y' = f(ax + by + c) \quad \begin{matrix} z = ax + by + c \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad z' = bf(z) + a.$$

№ 65 [Ф]: Решить уравнение: $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$. (1)

1 способ. Выполним замену

$$z = 4x + 2y - 1. \quad (2)$$

Так как

$$y' = \frac{z' - 4}{2},$$

то уравнение (1) приводится к виду

$$z' = 2\sqrt{z} + 4. \quad (3)$$

Заметим, что $2\sqrt{z} + 4 > 0$. Разделив переменные в уравнении (3), получим

$$\frac{dz}{2(\sqrt{z}+2)} = dx, \quad \int \frac{dz}{2(\sqrt{z}+2)} = \int dx + C,$$

где C – произвольная постоянная. Так как

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{2(\sqrt{z}+2)} &= (\text{замена: } \sqrt{z}+2=t) = \\ &= \int \frac{t-2}{t} dt = t - 2 \ln t = \sqrt{z}+2 - 2 \ln(\sqrt{z}+2), \end{aligned}$$

то интегрирование уравнения (3) дает

$$\sqrt{z}+2 - 2 \ln(\sqrt{z}+2) = x + C \quad \text{или} \quad \sqrt{z} - 2 \ln(\sqrt{z}+2) = x + C.$$

Выполнив обратную замену (2), получим общий интеграл уравнения (1):

$$\boxed{\sqrt{4x+2y-1} - 2 \ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.} \quad (4)$$

2 способ. Уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными и с помощью замены

$$z = \sqrt{4x+2y-1}. \quad (5)$$

Тогда

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{4x+2y-1}} \cdot (4+2y') = \frac{1}{z} (2+y') \Rightarrow y' = zz' - 2.$$

Таким образом, с помощью замены (5) уравнение (1) приводится к виду $zz' - 2 = z$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{zdz}{z+2} = dx, \quad \int \frac{zdz}{z+2} = \int dx + C, \quad z - 2 \ln(z+2) = x + C.$$

Выполнив обратную замену (4), получим общий интеграл уравнения (1), совпадающий с (4).

Поиск решений, удовлетворяющих заданным условиям

№ 54 [Ф]: Найти решение уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, удовлетворяющее условию $y(x) \rightarrow -1$ при $x \rightarrow 0$.

Общее решение уравнения имеет вид (см. занятие № 2):

$$y = 2 + C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + C \cos x) = 2 + C = -1 \Rightarrow C = -3.$$

Следовательно, решением уравнения, удовлетворяющим заданному условию, является следующее $y = 2 - 3 \cos x$.

№ 55 [Ф]: Найти решение уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, удовлетворяющее условию $y(0) = 2$.

Из множества решений уравнения (см. занятие № 2):

$$y = 0, \quad y = (x + C)^3, \quad C \in \mathbb{R},$$

два удовлетворяют заданному условию:

$$y = 0, \quad y = (x - 2)^3.$$

№ 66 [Ф]: Решить уравнение $x^2 y' - \cos 2y = 1$. (1)

Найти решение уравнения, удовлетворяющее условию, удовлетворяющее условию $y(+\infty) = 9\pi/4$.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{\cos 2y + 1} = \frac{dx}{x^2}, \quad \frac{dy}{2 \cos^2 y} = \frac{dx}{x^2}.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, будем иметь

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} y = C - \frac{1}{x}, \quad \text{или} \quad y = \operatorname{arctg} \left(2C - \frac{2}{x} \right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Домашнее задание

[Ф] №№ 63, 64, 66 (завершить), 67.

29.09.2017

Занятие № 4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

№ 90 [М]: Решить уравнение: $y' = \frac{1}{x + y + 1}$. (1)

Рассмотрим перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = x + y + 1,$$

Для которого выполнив замену $z = x + y + 1$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1. \quad (2)$$

Очевидно, одним из решений уравнения (2) будет $z = -1$. Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1, \quad \frac{dz}{z + 1} = dy, \quad \int \frac{dz}{z + 1} = \int dy + C, \quad \ln |z + 1| = y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Заменив z на $(x + y + 1)$, получим все решения заданного уравнения:

$$x + y + 2 = 0, \quad \ln|x + y + 2| = y + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Так как

$$\ln|x + y + 2| = y + C, \quad C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x + y + 2 = C_1 e^y, \quad C_1 \neq 0,$$

то все решения (2) можно записать следующим образом:

$$x + y + 2 = C_1 e^y, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

№ 146 [M]: Решить уравнение:

$$(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) – уравнение с разделяющимися переменными:

$$y^2(1+x)dx + x^2(1-y)dy = 0.$$

Очевидно $x=0$ и $y=0$ являются решениями уравнения. Найдем другие решения, разделяя переменные:

$$\frac{1+x}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0, \quad \int \frac{1+x}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = C,$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|y| - \frac{1}{y} = C, \quad \ln \frac{|x|}{|y|} - \frac{x+y}{xy} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

В результате получили

Ответ: $x=0, y=0, \ln \frac{|x|}{|y|} - \frac{x+y}{xy} = C, C \in \mathbb{R}.$

№ 68, а [Ф]:

Найти ортогональные траектории к линиям семейства $y = Cx^2$

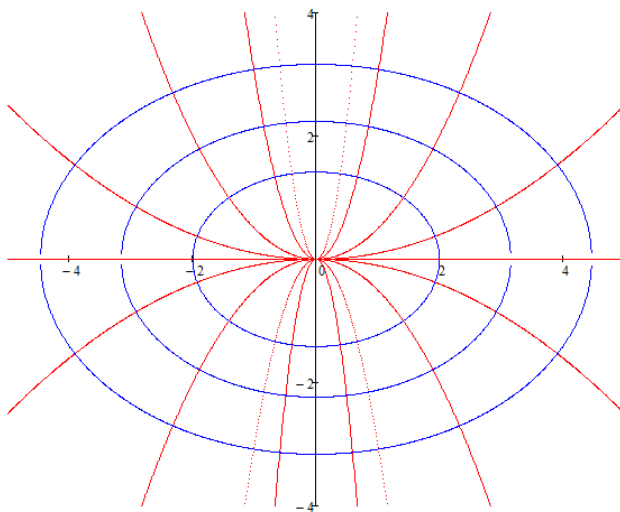
Сначала составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых. Дифференцируя по x уравнение заданного семейства (см. задание № 1) и исключая параметр C , получим уравнение $y' = \frac{2y}{x}$. Заменяя в этом уравнении y' на $-1/y'$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий $y' = -\frac{x}{2y}$. Найдем его решение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \Leftrightarrow 2ydy = xdx, \quad \int 2ydy = \int xdx + C,$$

$$y^2 + x^2/2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $2y^2 + x^2 = C, C \in \mathbb{R}.$

Иллюстрация:



— Кривые заданного семейства (параболы)

— Ортогональные траектории (эллипсы)

№ 68, в [Ф]:

Найти ортогональные траектории к линиям семейства $Cx^2 + y^2 = 1$.

1. Составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых:

$$\begin{cases} Cx^2 + y^2 = 1, \\ Cx + yy' = 0, \end{cases} \Rightarrow xyu' = y^2 - 1.$$

2. Замена y' на $-1/y'$ дает дифференциальное уравнение ортогональных траекторий:

$$xy = (1 - y^2)y'. \quad (*)$$

3. Находим ортогональные траектории, решая уравнение (*):

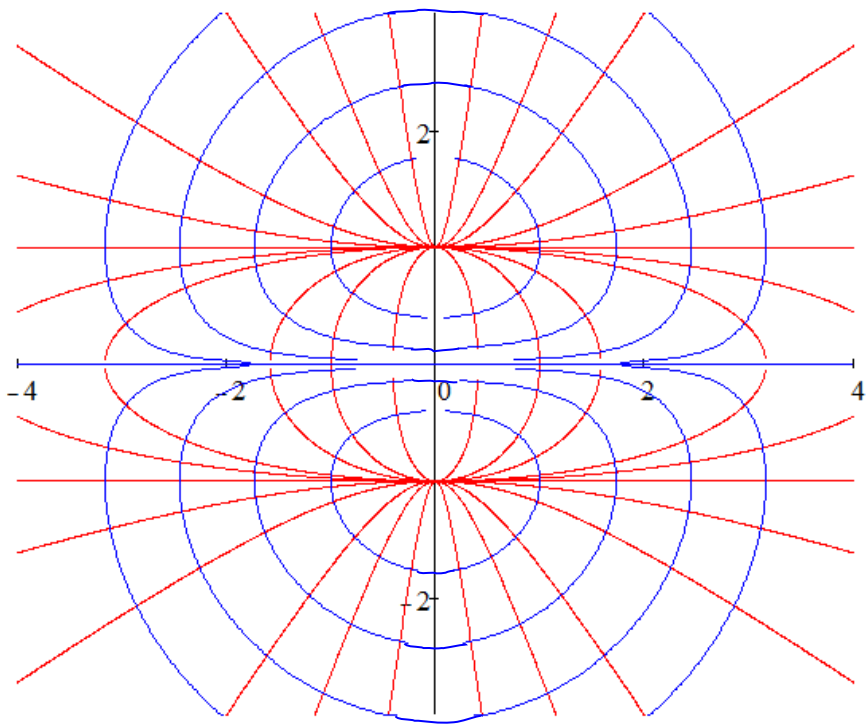
$$\frac{1-y^2}{y} dy = x dx, \quad \int \frac{1-y^2}{y} dy = \int x dx + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln|y| - y^2/2 = x^2/2 + C \Leftrightarrow y = C_1 e^{\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Учитывая, что $y = 0$ также является решением уравнения (*), получаем

Ответ: $y^2 = Ce^{x^2+y^2}, \quad C \geq 0.$

Иллюстрация:



— Кривые заданного семейства

— Ортогональные траектории

№ 78 [Ф]: В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

Пусть t – независимая переменная, время (мин); $x(t)$ – количество соли в баке в момент времени t . Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. С одной стороны, это изменение определяет разность:

$$x(t + \Delta t) - x(t).$$

Так как в произвольный момент времени $\tau \in [t, t + \Delta t]$ концентрация соли в растворе составляет $x(\tau)/100$ (кг/л), то в момент времени τ убыль соли за счет вытекания смеси равна $5 x(\tau)/100$ (кг), а за время от t до $t + \Delta t$:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{5x(\tau)}{100} d\tau = \frac{1}{20} \int_t^{t+\Delta t} x(\tau) d\tau.$$

Таким образом, получаем

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -\frac{1}{20} \int_t^{t+\Delta t} x(\tau) d\tau.$$

(знак «–» определяет уменьшение количества соли в баке).

Применив к интегралу теорему о среднем, предполагая, что функция $x(\tau)$ является непрерывной, получим

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -\frac{1}{20} x(\tau^*) \Delta t, \quad \tau^* \in [t, t + \Delta t].$$

Разделим полученное соотношение на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Если считать функцию $x(\tau)$ непрерывно дифференцируемой, то в результате предельного перехода получим уравнение

$$x'(t) = -\frac{1}{20} x(t).$$

Построив общее решение уравнения $x(t) = Ce^{-t/20}$, где $C \in \mathbb{R}$, выделим из него частное, используя начальное условие $x(0) = 10$. Так как при этом $C = 10$, то изменение количества соли со временем будет описывать функция $x(t) = 10e^{-t/20}$. Теперь можно узнать, сколько соли в баке останется через 1 час: $x(60) = 10e^{-3}$.



Домашнее задание

[М]: № 142: $y' = (y - 1)(x + 1)$;

[М]: № 147: $(1 + y^2)(e^{2x} dx - e^y dy) - (1 + y)dy = 0$.

[Ф]: №№ 68 (б), 71.