Уравнения в частных производных первого порядка

Некоторые задачи классической механики, механики сплошных сред, акустики, оптики, гидродинамики, переноса излучения сводятся к уравнениям в частных производных первого порядка. К решению некоторых из них применимы аналитические методы, разработанные в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Общая теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для случая трех переменных была разработана Лагранжем в работах 70-х гг. XVIII в. Распространение теории на случай n переменных осуществил Коши (1819) [1].

1. Основные понятия. Классификация уравнений

Уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение вида[1]

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ – независимые переменные, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция[2] в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, причем в каждой точке области G

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0.$$

Уравнение (1) сокращенно можно записать в виде[3]

$$F(x, u, \operatorname{grad} u) = 0, \tag{1'}$$

[1]Далее будет использоваться и другая запись частной производной первого порядка. Например, для для функции $u = u(x, y, z)$:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u'_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u'_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

[2]Здесь для функции F аргументы $p_i,\ i = 1, \ldots, n$, обозначают частные производные u'_{x_i}.

[3]Часто для записи градиента функции $u(x)$ используется оператор ∇ («набла»), т. е. вместо $\operatorname{grad} u$ пишут ∇u. Тогда уравнение $(1')$ можно записать в виде $F(x, u, \nabla u) = 0$.

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\operatorname{grad} u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Определение 1. *Функция $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная в области $D \subset \mathbb{R}^n$, называется* **решением уравнения** *(1), если:*
1) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция в D,
2) для всех точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ точка $(x, \varphi, \varphi'_{x_1}, \ldots, \varphi'_{x_n}) \in G$,
3) $F\left(x_1, \ldots, x_n, \varphi, \varphi'_{x_1}, \ldots, \varphi'_{x_n}\right) \equiv 0$ для любых $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Решение уравнения (1) в $(n{+}1)$-мерном пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n, u$ задает некоторую гладкую поверхность размерности n, которая называется **интегральной поверхностью уравнения** (1).

В зависимости от того, как неизвестная функция u и ее частные производные входят в уравнение (1), различают **линейные** и **нелинейные** уравнения.

Линейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение вида

$$A_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = B(x)u + f(x), \tag{2}$$

где $A_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $B(x)$ и $f(x)$ – заданные функции точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^2(x) \neq 0$ для любого $x \in D$. Функции A_i и B называют коэффициентами уравнения. Линейность уравнения определяется тем, что неизвестная функция $u(x)$ и все ее частные производные входят в уравнение линейно.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (2) называют **однородным**, иначе – **неоднородным**.

Если уравнение (1) не может быть записано в виде (2), то его называют **нелинейным**. Если в нем функция F является линейной относительно всех производных неизвестной функции $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, то уравнение (1) называют **квазилинейным**. Квазилинейное уравнение может быть записано в следующем виде

$$A_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = B(x, u). \tag{3}$$

Приведем примеры уравнений в частных производных первого порядка.

1. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

является линейным однородным. Оно очень упрощенно описывает процесс переноса вещества потоком воздуха с известной скоростью $v(x,t)$ в трубке постоянного поперечного сечения, ось которой совпадает с осью x. Здесь неизвестная функция $u(x,t)$ – линейная плотность вещества в сечении x трубки в момент времени t.

2. Квазилинейное **уравнение Хопфа**[4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

описывает динамику скорости $u(x,t)$ течения жидкости, кинематическая вязкость которой равна нулю. Это же уравнение описывает и одномерное течение облака невзаимодействующих пылинок (u имеет смысл скорости пыли).

3. Основное уравнение геометрической оптики – **уравнение эйконала**

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{2\pi n}{c\lambda}\right)^2$$

является нелинейным. Из него находится фаза волны (эйконал) $\varphi(x,y,z)$ как функция координат. Здесь n – показатель преломления среды, λ – длина волны, c – скорость света в вакууме.

4. Уравнения движения одномерного баротропного газа (однородная квазилинейная система)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

где c – скорость звука, и v – плотность и скорость газа.

2. Однородное линейное уравнение

Пусть точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. В области D рассмотрим однородное линейное уравнение в частных производных первого порядка вида

$$A_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{4}$$

[4]**Хопф** Эберхард (1902–1983) – немецкий математик.

Пусть коэффициенты $A_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ – непрерывно дифференцируемые в D функции, для которых

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in D.$$

Уравнению (4) можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Если считать коэффициенты $A_i(x)$ компонентами вектора $\mathbf{A}(x)$ в n-мерном пространстве, то уравнение (4) означает равенство нулю производной функции $u(x)$ вдоль направления вектора $\mathbf{A}$.

Очевидно, что уравнение (4) имеет решение вида $u \equiv C$, где C – константа. Но уравнение (4) имеет бесконечно много решений и отличных от константы. Например, решением уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ является любая непрерывная функция Φ, не зависящая от x_1, т. е. $u(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(x_2, \ldots, x_n)$ (это решение получается интегрированием уравнения по переменной x_1). В общем случае поиск решений уравнения (4) сводится к построению решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Сопоставим уравнению (4) систему обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых **уравнениями характеристик**:

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{A_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n(x_1, \ldots, x_n)}. \qquad (5)$$

Эту систему называют системой дифференциальных уравнений в *симметричной форме*, соответствующей однородному линейному уравнению с частными производными (4) (или **характеристической системой**). В случае двух независимых переменных она состоит из одного уравнения. При сделанных предположениях относительно коэффициентов $A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_n)$ система (5) имеет ровно $n - 1$ независимых первых интегралов.

Определение 2. **Первым интегралом системы** *(5) называется отличная от постоянной функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, которая тождественно равна некоторой константе во всех точках $(x_1, \ldots, x_n)$ интегральной кривой системы (5).*

Часто первым интегралом называют не функцию ψ, а соотношение $\psi = C$, где C – константа.

Интегральные кривые системы уравнений (5) называют **характеристиками уравнения в частных производных** (4).

Теорема 1. ([5]). *Всякое решение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (4) является первым интегралом системы (5), и, обратно, всякий первый интеграл $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ системы (5) является решением уравнения (4).*

Например, уравнению

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (*)$$

соответствует система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z},$$

которая имеет следующие интегралы

$$\psi_1 = xz, \qquad \psi_2 = x\sqrt{y}.$$

Тогда функции $u_1 = xz$ и $u_2 = x\sqrt{y}$ являются решениями данного уравнения. Убедитесь в этом самостоятельно, выполнив подстановку выражений для u_1 и u_2 в уравнение $(*)$.

Допустим, что $A_n(x) \neq 0$ в D и найдены $n-1$ независимых первых интегралов системы (5):

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n). \tag{6}$$

Условием независимости интегралов (6) является отличие от нуля якобиана[5] [5, 6]

$$J = \frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0, \quad \forall x \in D. \tag{7}$$

Введем новые независимые переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$\begin{array}{l} \xi_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), \\ \xi_n = \psi_n(x_1, \ldots, x_n), \end{array} \tag{8}$$

[5] **Якобианом** функций $\psi_i(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, называется определитель порядка m, i-я строка которого содержит частные производные первого порядка функции ψ_i по переменным $x_1, \ldots, x_m$. Кратко он обозначается символом $\frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$.

где функция $\psi_n(x_1, \ldots, x_n)$ может быть любой непрерывно дифференцируемой в D функцией, но при которой преобразование (8) является невырожденным, и новое обозначение для зависимой переменной

$$v = v(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \text{причем} \quad u(x) = v(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)). \tag{9}$$

Покажем, что при замене (8)-(9) уравнение (4) приводится к простейшему виду, когда легко построить его решение.

Действительно, выразим производные, входящие в уравнение (4), через новые переменные, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Подставив эти выражения в уравнение (4) и выполнив группировку слагаемых, получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(A_1(x) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + \ \ldots \ + A_n(x) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi_i} +$$
$$+ \left(A_1(x) \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} + \ \ldots \ + A_n(x) \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi_n} = 0$$

Так как функции ψ_i для $i = 1, \ldots, n-1$ являются первыми интегралами системы (5), то, по теореме 1, они являются решениями уравнения (4). Следовательно, последнее уравнение принимает вид

$$\left(A_1(x) \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} + \ \ldots \ + A_n(x) \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi_n} = 0.$$

А так как преобразование (8) является невырожденным, то функция ψ_n не может быть решением уравнения (4), и значит, будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_n} = 0. \tag{10}$$

Таким образом, с помощью невырожденного преобразования (8) уравнение (4) приведено к виду (10), который называется **каноническим**.

Интегрируя уравнение (10) по ξ_n, получим его решение

$$v(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}),$$

где Φ – произвольная функция, которая не зависит от ξ_n и имеет непрерывные производные по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Возвращаясь к старым переменным, получим решение уравнения (4)

Теорема 2. ([5].) *Всякое решение $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (4) представимо в виде*

$$u = \Phi(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)), \qquad (11)$$

где $\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$ – некоторая дифференцируемая функция своих аргументов $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, а $\psi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ – первые интегралы системы (5), удовлетворяющие условию независимости (7).

Формула (11) представляет **общее решение** уравнения (4). Заметим, что здесь общее решение уравнения содержит не произвольные постоянные (как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений), а произвольную функцию.

Таким образом, задача построения общего решения уравнения (4) равносильна задаче нахождения $n-1$ независимых первых интегралов соответствующей ему системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5).

Пример 1. Найти общее решение $u = u(x, y)$ уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Решение. Составим уравнение характеристик

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Это уравнение имеет решение $x^2 + y^2 = C$. Покажите это самостоятельно.

Следовательно, первым интегралом является функция:

$$\psi = x^2 + y^2.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$u = \Phi(x^2 + y^2),$$

и оно представляет собою семейство поверхностей вращения с осью вращения Ou. В частности, при $\Phi(\psi) = \psi$ получим параболоид вращения:

$$u = x^2 + y^2,$$

при $\Phi(\psi) = \sqrt{\psi}$ получим конус

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$\square$

Построить первые интегралы характеристической системы (5) для случая $n > 2$ часто удается путем отыскания интегрируемых комбинаций. *Интегрируемой комбинаций* называют дифференциальное уравнение, которое является следствием системы уравнений (5) и интегрируется в квадратурах. Из каждой интегрируемой комбинации получается первый интеграл системы (5).

Пример 2. Найти общее решение $u = u(x, y, z)$ уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Решение. Составим уравнения характеристик в симметричной форме:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{x - y}.$$

Решая систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x - y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}, \\ \dfrac{dz}{dx} = 1 - \dfrac{y}{x} = 1 + \dfrac{dy}{dx}, \end{cases}$$

находим два первых интеграла:

$$xy = C_1 \quad \text{и} \quad z - y - x = C_2.$$

Тогда общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$u(x, y, z) = \Phi(xy, z - x - y).$$

где $\Phi(a, b)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

$\square$

Для составления интегрируемых комбинаций системы (5) можно воспользоваться следующим **правилом равных дробей**. *Если имеются равные дроби*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n},$$

и произвольные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *такие, что* $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n \neq$ $\neq 0$, *то*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n}.$$

Пример 3. Найти решение уравнения

$$(x+z)u'_x + (y+z)u'_y + (x+y)u'_z = 0.$$

Решение. Для нахождения независимых первых интегралов составим уравнения характеристик в симметричной форме

$$\frac{dx}{x+z} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{x+y}.$$

По свойству равных дробей имеем

$$\frac{dx-dz}{z-y} = \frac{dy-dz}{z-x} \;\Rightarrow\; (x-z)d(x-z) = (y-z)d(y-z).$$

Интегрируя последнее равенство, получим первый интеграл

$$\psi_1(x,y,z) = (x-z)^2 - (y-z)^2 = (x-y)(x+y-2z).$$

По свойству равных дробей составим еще одно равенство

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)} = \frac{dx-dy}{x-y} \;\Leftrightarrow\; \frac{d(x+y+z)}{x+y+z} = \frac{2d(x-y)}{x-y},$$

интегрирование которого дает еще один первый интеграл

$$\psi_2(x,y,z) = \frac{x+y+z}{(x-y)^2}$$

Тогда общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$u(x,y,z) = \Phi\left((x-y)(x+y-2z), \frac{x+y+z}{(x-y)^2}\right).$$

где $\Phi(a,b)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

□

Пример 4. Найти решение уравнения

$$xu'_x + yu'_y + xyu'_z = 0, \quad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Решение. Составим характеристическую систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}. \tag{$*$}$$

Один первый интеграл найдем, решая уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = C_1.$$

Следовательно, $\psi_1(x,y,z) = \dfrac{x}{y}$. Еще один первый интеграл найдем, рассматривая второе уравнение характеристической системы $(*)$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy},$$

исключив из него x с помощью уже найденного первого интеграла ψ_1. Так как $x = C_1 y$, то будем иметь

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{C_1 y^2} \;\Rightarrow\; C_1 y dy = dz \;\Rightarrow\; C_1 y^2 - 2z = C_2 \;\Rightarrow\; xy - 2z = C_2.$$

Следовательно, $\psi_2(x,y,z) = xy - 2z$, и общее решение заданного уравнения запишется в виде

$$u(x,y,z) = \Phi\left(\frac{x}{y}, xy - 2z\right).$$

□

Что касается линейного уравнения общего вида (2), то построить его общее решение можно следующим образом. Прежде всего надо найти первые интегралы соответствующей характеристической системы (5). И выполнив замену (8)-(9), привести уравнение (2) к каноническому виду

$$\tilde{A}(\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi_n} = \tilde{B}(\xi)v + \tilde{f}(\xi). \tag{12}$$

Здесь коэффициент $\tilde{A}(\xi)$ и правая часть $\tilde{B}(\xi)v + \tilde{f}(\xi)$ определяются соответственно выражениями

$$A_1(x)\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} + \ \ldots \ + A_n(x)\frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \quad \text{и} \quad B(x)u + f(x),$$

в которых старые переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$, используя замену (8), выражены через новые $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Затем надо решить полученное уравнение (12), используя методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, когда независимой переменной является ξ_n. Остальные переменные $\xi_i,\ i = 1, \ldots, n-1$, рассматриваются при этом как фиксированные параметры, от которых будет зависеть произвольная функция в записи общего решения. Получив таким образом решение уравнения (12), далее следует вернуться к старым переменным.

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$xu'_x + yu'_y = u, \quad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Решение. Составим уравнение характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Его первым интегралом является функция $\psi(x, y) = \frac{y}{x}$. Введем новые независимые переменные по следующему правилу:

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = x.$$

Покажите, что такое преобразование является невырожденным при $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Введем обозначение v для неизвестной функции при переходе к новым независимым переменным ξ и η :

$$v(\xi, \eta) = v\left(\frac{y}{x}, x\right) = u(x, y). \tag{$*$}$$

Так как для производных u'_x и u'_y имеем:

$$u'_x = -\frac{y}{x^2}v'_\xi - v'_\eta, \quad u'_y = \frac{1}{x}v'_\xi,$$

то их подстановка в заданное уравнение приводит его к виду: $xv'_\eta = v$. Учитывая замену $\eta = x$, получим уравнение

$$\eta v_\eta = v.$$

Рассматривая полученное уравнение «как уравнение с разделяющимися переменными», можно построить его общее решение в виде

$$v(\xi, \eta) = \eta\varphi(\xi),$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция.

Тогда общее решение заданного уравнения, согласно замене $(*)$, описывает функция:

$$u(x,y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$\square$

Замечание. Общее решение уравнения (2) может быть построено и методом решения квазилинейных уравнений, который не требует приведения уравнения (2) к каноническому виду.

3. Задача Коши для однородного линейного уравнения

Для выделения из общего решения единственного частного необходимо задать дополнительные условия. К таким условиям, например, относятся начальные условия. Часто задают начальные условия, фиксируя одну из независимых переменных.

Будем рассматривать **начальную задачу**, или **задачу Коши**, для уравнения (4) в следующей постановке. Среди всех решений уравнения (4) найти такое решение

$$u = F(x_1, \ldots, x_n), \tag{13}$$

которое удовлетворяет **начальным условиям**:

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_n^{(0)}, \tag{14}$$

где φ – заданная непрерывно дифференцируемая функция от переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

В случае, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных, задача Коши состоит в том, чтобы найти решение

$$u = F(x,y),$$

которое удовлетворяет начальным условиям:

$$u = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где $\varphi(y)$ – заданная функция от y. Геометрически это означает, что среди всех интегральных поверхностей ищется интегральная поверхность $u = F(x,y)$, которая проходит через заданную кривую $u = \varphi(y)$, лежащую в плоскости $x = x_0$ параллельной плоскости yOu.

Принимая во внимание общее решение уравнения $u = \Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$, решение задачи Коши сводится к определению вида функции Φ такой, чтобы

$$\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})\big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{15}$$

Обозначим

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \overline{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \overline{\psi}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \overline{\psi}_{n-1}, \end{cases} \tag{16}$$

то равенство (15) можно переписать в виде

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{17}$$

Система (16) разрешима относительно $x_1, \ldots, x_{n-1}$ по крайней мере, в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ если $A_n(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \neq 0$, что мы и предполагаем. Разрешая систему (16) относительно $x_1, \ldots, x_{n-1}$, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \end{cases} \tag{18}$$

Если теперь в качестве Φ взять функцию

$$\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})),$$

то условие (17) будет выполнено.

Следовательно, функция

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}))$$

дает искомое решение задачи Коши. Здесь функция φ есть та самая функция, которая участвует в начальных условиях.

Таким образом, мы приходим к следующему *алгоритму решения задачи Коши*:

1) составить соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и найти $n-1$ независимых интегралов:

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_1(x_1,\ldots,x_n),\\ \psi_2(x_1,\ldots,x_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n).\end{array}\right. \tag{19}$$

2) заменить в интегралах (19) независимую переменную заданным ее значением $x_n^{(0)}$:

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^{(0)})=\overline{\psi}_1,\\ \psi_2(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^{(0)})=\overline{\psi}_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^{(0)})=\overline{\psi}_{n-1}.\end{array}\right. \tag{20}$$

3) разрешить систему (20) относительно $x_1,\ldots,x_{n-1}$:

$$\left\{\begin{array}{l}x_1=\omega_1(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}),\\ x_2=\omega_2(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}).\end{array}\right. \tag{21}$$

4) построить функцию

$$u=\varphi(\omega_1(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})), \tag{22}$$

которая и дает решение задачи Коши.

Пример 6. Найти решение задачи Коши

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$u=\varphi(y),\quad \text{при}\quad x=0.$$

Решение. Согласно описанному алгоритму, имеем

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x},$$

$$\psi=x^2+y^2,\quad y^2=\overline{\psi},\quad \omega=\sqrt{\overline{\psi}}.$$

Тогда искомое решение

$$u=\varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Таким образом, получена поверхность вращения с осью вращения Ou, проходящая через кривую $u = \varphi(y)$, или, что то же, поверхность, образованную вращением кривой $u = \varphi(y)$ вокруг оси Ou.

В частности, если $\varphi(y) = y$, то $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ – конус, полученный вращением прямой $u = y$ вокруг оси Ou. □

Пример 7. Найти решение задачи Коши

$$xu'_x + yu'_y + xyu'_z = 0, \quad u(x, y, 0) = x^2 + y^2.$$

Решение. Соответствующая уравнению характеристическая система имеет следующие два первых интеграла (см. пример 4):

$$\psi_1(x, y, z) = \frac{x}{y}, \quad \psi_2(x, y, z) = xy - 2z.$$

Рассматривая их при $z = 0$, составим систему уравнений

$$\frac{x}{y} = \overline{\psi}_1, \quad xy = \overline{\psi}_2,$$

из которой найдем

$$y^2 = \frac{\overline{\psi}_2}{\overline{\psi}_1}, \quad x^2 = \overline{\psi}_1 \overline{\psi}_2.$$

Тогда для заданной функции $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ будем иметь

$$\varphi(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2) = \left(\overline{\psi}_1 + \frac{1}{\overline{\psi}_1} \right) \overline{\psi}_2.$$

Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$u(x, y, z) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) (xy - 2z).$$

□

4. Квазилинейные уравнения

Пусть точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит области $D \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$A_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = B(x, u), \tag{23}$$

считая, что $A_i(x, u)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $B(x, u)$ являются дифференцируемыми функциями аргументов x, u в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Уравнению (23) поставим в соответствие следующее линейное уравнение

$$A_1(x,u)\frac{\partial v}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x,u)\frac{\partial v}{\partial x_n} + B(x,u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0, \qquad (24)$$

с неизвестной функцией $v = v(x,u)$.

В основе метода решения квазилинейного уравнения лежит следующая теорема [5].

Теорема 3. *Пусть $v = V(x,u)$ – решение уравнения (24). Пусть уравнение $V(x,u) = 0$ определяет в области D переменных $x = (x_1,\ldots,x_n)$ некоторую дифференцируемую функцию $u = \varphi(x)$, и пусть $\dfrac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ в D для $u = \varphi$. Тогда $u = \varphi(x)$ является решением уравнения (23).*

Опишем *алгоритм построения решения квазилинейного уравнения.*

1) выписать характеристическую систему для линейного уравнения (24):

$$\frac{dx_1}{A_1(x,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n(x,u)} = \frac{du}{B(x,u)} \qquad (25)$$

Характеристики линейного уравнения (24) называют **характеристиками квазилинейного уравнения** (23).

2) найти n независимых первых интегралов системы (25):

$$\psi_1(x,u),\ldots,\psi_n(x,u). \qquad (26)$$

3) по формуле (11) построить общее решение уравнения (24):

$$v(x,u) = \Phi(\psi_1(x,u),\ldots,\psi_n(x,u)).$$

4) полагая $v = 0$, записать уравнение для определения множества решений уравнения (23):

$$\Phi(\psi_1(x,u),\ldots,\psi_n(x,u)) = 0. \qquad (27)$$

Выражение (27) называется **общим интегралом**, или **общим решением**, уравнения (23). Если u входит только в один из первых интегралов (26), например, в последний, то общее решение можно записать и так:

$$\psi_n(x,u) = F(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}), \qquad (28)$$

где F – произвольная дифференцируемая функция. Если будет возможно разрешить равенство (28) относительно u, то получим общее решение уравнения (23) в явном виде.

Замечание 1. Не исключена возможность, что могут быть такие решения уравнения (23), для которых уравнение (24) удовлетворяется не тождественно по (x, u), а только при $u = \varphi(x)$ тождественно по x. Такие решения не содержатся в формуле (27) и называются *специальными.* Специальное решение – случай исключительный [5], и поэтому далее их рассматривать не будем.

Замечание 2. Описанным способом может быть построено решение и линейного уравнения (2).

Пример 8. В области $x > 0,\ y > 0$ найти решение уравнения

$$u_x + u_y = x + y,$$

Решение. Уравнение является линейным неоднородным. Построим его решение, используя метод решения квазилинейных уравнений. Составим уравнения характеристик в симметричной форме:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{x+y}.$$

Решая систему, найдем два первых независимых интеграла:

$$\psi_1(x, y, u) = x - y, \quad \psi_2(x, y, u) = xy - u.$$

Следовательно, решения заданного уравнения определяются из уравнения

$$\Phi(x - y, xy - u) = 0$$

с произвольной функцией Φ. Разрешив это уравнение относительно последнего аргумента, получим

$$u(x, y) = xy + F(x - y), \tag{$*$}$$

где F – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Замечание. Используя свойство равных дробей, можно построить интегрируемую комбинацию:

$$\frac{xdx + ydy}{x+y} = \frac{du}{x+y} \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 - 2u = C.$$

Построенная комбинация дает первый интеграл $\psi_2(x,y,u) = x^2 + y^2 - 2u$, который отличается от указанного выше. И тогда решение заданного уравнения строится следующим образом

$$x^2 + y^2 - 2u = F(x-y) \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \tilde{F}(x-y).$$

При этом полученное решение по сути совпадает с решением $(*)$. Действительно, в силу произвольности функции $\tilde{F}$, справедливы следующие преобразования

$$u = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{2}(x-y)^2 + \tilde{F}(x-y) = xy + \tilde{F}(x-y).$$

□

Пример 9. Найти решения уравнения

$$\sin y \cdot u_x + e^x \cdot u_y = 2x \sin y \cdot u^2.$$

Решение. Очевидно, заданное уравнение является квазилинейным. Для построения общего решения найдем два независимых первых интеграла системы уравнений:

$$\frac{dx}{\sin y} = \frac{dy}{e^x} = \frac{du}{2x\sin y \cdot u^2}.$$

Рассматривая два уравнения

$$\frac{dx}{\sin y} = \frac{dy}{e^x} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{\sin y} = \frac{du}{2x\sin y \cdot u^2},$$

получим

$$\psi_1(x,y,u) = e^x + \cos y, \qquad \psi_2(x,y,u) = x^2 + \frac{1}{u}.$$

Тогда общий интеграл заданного уравнения имеет вид:

$$\Phi\left(e^x + \cos y, x^2 + \frac{1}{u}\right) = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно второго аргумента, получим

$$x^2 + \frac{1}{u} = F(e^x + \cos y) \qquad \Rightarrow \qquad u = \big(F(e^x+\cos y) - x^2\big)^{-1}.$$

где F – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. □

Пример 10. Найти решения уравнения

$$(2y-u)\,u'_x + y\,u'_y = u.$$

Решение. Составим характеристическую систему

$$\frac{dx}{2y-u} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}.$$

Решая уравнение

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{u}{y} = C_1,$$

найдем первый интеграл $\psi_1(x,y,u) = \dfrac{u}{y}$.

Используя правило равных дробей, составим интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx}{2y-u} = \frac{2dy-du}{2y-u} \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2dy - du \qquad \Rightarrow \qquad x - 2y + u = C_2.$$

Откуда получаем еще один первый интеграл $\psi_2(x,y,u) = x - 2y + u$. Следовательно, общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$\Phi\left(\frac{u}{y}, x - 2y + u\right) = 0,$$

где Φ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. □

Замечание. В рамках данного учебного пособия мы не рассматриваем вопросы, связанные с решением задачи Коши для квазилинейного уравнения, а также методы решения других нелинейных уравнений с частными производными первого порядка. Для их изучения можно порекомендовать следующую учебную литературу [2, 3, 4, 5, 7].

Вопросы для самопроверки

1) Какое уравнение называют дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка?
2) Какое уравнение называют линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка?
3) Какое уравнение называют квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных?
4) Укажите метод решения однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка.
5) Что называется характеристиками линейного уравнения?
6) В чем заключается задача Коши для однородного линейного уравнения в частных производных.
7) Сформулируйте правило решения задачи Коши для однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка.
8) Опишите метод решения квазилинейных уравнений.

Список использованной и рекомендованной литературы

1. *Александрова Н. В.* История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.

2. *Егоров А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 384 с.

3. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория Базовых знаний, 2000. 344 с.

4. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 472 с.

5. *Тихонов В. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука. Физматлит, 1998. 232 с.

6. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.

7. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., все годы изданий.