Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа (операционный метод)

Операционное исчисление — один из наиболее экономичных методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и пользуется большой популярностью у инженеров. Метод был предложен известным американским электротехником и физиком О. Хевисайдом (1892 г.). Он предложил формальные правила обращения с оператором $\frac{d}{dx}$ и некоторыми функциями от этого оператора, используя которые решил ряд важнейших задач электродинамики. Однако операционное исчисление не получило в трудах О. Хевисайда математического обоснования («его математика возникала в физическом контексте, из которого ее нелегко было выделить» (*Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. с. 118*), многие его результаты оставались недоказанными. Лишь в 20-е годы XX века метод получил обоснование в работах Бромвича (T. J. I'A. Bromwich) и Карсона (J. R. Carson)[1].

1. Понятие оригинала и изображения по Лапласу

Определение 1. **Функцией-оригиналом** *называется любая комплекснозначная функция $f(x)$ действительного аргумента x, удовлетворяющая условиям:*

1) *$f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, за исключением, быть может, конечного числа точек точек разрыва 1-го рода;*

2) *для всех $x < 0$ $\quad f(x) = 0$;*

3) *существуют такие постоянные $M > 0$ и $a > 0$, при которых*

$$|f(x)| \leqslant M \cdot e^{ax} \text{ для } \forall x. \qquad (\star)$$

[1]Попытки строгого обоснования и «математически приемлемого» изложения исчисления напоминали «общий штурм» – английский математик Бромвич (1916), американский инженер Карсон (1925), голландский инженер-электрик Ван-дер-Поль (1929–1932) привлекли результаты различных теорий, связали исчисление Хевисайда с преобразованием Лапласа, с теорией функций комплексной переменной (здесь и далее: *Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.*).

Точная нижняя грань a_0 всех чисел a, для которых справедливо неравенство ($\star$), называется *показателем роста функции* $f(x)$. Заметим, что для любой ограниченной функции показатель роста $a_0 = 0$. Простейшим оригиналом является **функция Хевисайда**

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, для любой функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x) \cdot \chi(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ x \geqslant 0, \\ 0, \ x < 0. \end{cases}$$

Если при $x \geqslant 0$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 3 определения 1, то функция $\varphi(x)\chi(x)$ является оригиналом. В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, записывать $\varphi(x)$ вместо $\varphi(x)\chi(x)$, считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных значений аргумента x.

Определение 2. *Функция $F(p)$ комплексного переменного p ($p \in \mathbb{C}$), определяемая интегралом*

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx, \tag{1}$$

называется **преобразованием Лапласа**, *или* **изображением по Лапласу**[2], *функции $f(x)$.*

Для указания соответствия между оригиналом и изображением будем использовать следующую запись[3]. Используются и другие варианты записи соответствия между оригиналами и изображениями. Например, $\quad f(x) \leftrightarrow F(p) \quad$ или $\quad L\{f(x)\} = F(p)$.:

$$f(x) \risingdotseq F(p).$$

[2]В мемуарах П. Лапласа (1782–1812) современные *оригинал* и *изображение* именуются *fonction determinant* и *fonction generatrice* – «определяющая функция» и «производящая». Эти названия, хотя и признанные неудачными, сохранились до XX в. Хевисайд употреблял названия «подоператорная функция» (1892). Оператор он обозначал буквой p, которая употребляется в современном исчислении.

[3]Названия original и image и знак $\risingdotseq$ предложил Ван дер Поль в статьях 1929–1932 гг. В русской литературе термин *изображение* и символ $\risingdotseq$, по-видимому, впервые появились в книге харьковских математиков А. М. Эфроса и А. М. Данилевского «Операционное исчисление и контурные интегралы» (1937), а термин *оригинал* – только в 1953 г.

Для любого оригинала $f(x)$ его изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a_0$ (a_0 показатель роста функции $f(x)$), где несобственный интеграл (1) сходится.

Пример 1. Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(x) = \sin 3x.$$

Решение. Для функции $f(x) = \sin 3x$ имеем $a_0 = 0$. Поэтому изображение $F(p)$ будет определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Применим формулу (1) к заданной функции, используя при выполнении преобразований правило интегрирования по частям и ограничение на множество значений переменной p, обеспечивающее сходимость интеграла:

$$\begin{aligned}
F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} \sin 3x \, dx = \\
&= -\frac{1}{p} e^{-px} \sin 3x \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \frac{3}{p} \int_0^{+\infty} e^{-px} \cos 3x \, dx = \\
&= \frac{3}{p} \left\{ -\frac{1}{p} e^{-px} \cos 3x \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{3}{p} \int_0^{+\infty} e^{-px} \sin 3x \, dx \right\} = \\
&= \frac{3}{p^2} - \frac{9}{p^2} \int_0^{+\infty} e^{-px} \sin 3x \, dx = \frac{3}{p^2} - \frac{9}{p^2} F(p).
\end{aligned}$$

Получили равенство:

$$F(p) = \frac{3}{p^2} - \frac{9}{p^2} F(p).$$

Откуда находим

$$F(p) = \frac{3}{p^2 + 9}.$$

Таким образом, справедливо следующее соответствие:

$$\sin 3x \risingdotseq \frac{3}{p^2 + 9}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

$\square$

2. Свойства преобразования Лапласа

На практике при построении изображений используются различные приемы, основанные на свойствах преобразования Лапласа. Перечислим основные свойства, справедливость которых легко установить с помощью определений изображения и оригинала.

1. **Свойство линейности**. Если $f(x) \risingdotseq F(p),\ g(x) \risingdotseq G(p)$, то для любых $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p), \quad \operatorname{Re} p > \max(a_0, b_0).$$

Здесь и далее $a_0,\ b_0$ – показатели роста функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

2. **Теорема подобия**. Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\alpha > 0$

$$f(\alpha x) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha a_0.$$

3. **Теорема смещения**. Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$e^{\lambda x} f(x) \risingdotseq F(p - \lambda), \quad \operatorname{Re} p > a_0 + \operatorname{Re} \lambda.$$

4. **Дифференцирование оригинала.** Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема. Тогда

$$\begin{aligned}
&f'(x) \risingdotseq pF(p) - f(+0),\\
&f''(x) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(x) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - \ldots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0),
\end{aligned}$$

где $f^{(k)}(+0) = \lim\limits_{x \to +0} f^{(k)}(x),\ k = \overline{0,\, n-1}$.

Замечание. При построении изображений производных непрерывных в нуле функций в записи аргумента функции и ее производных знак "плюс"опускается.

5. **Дифференцирование изображения.** Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-x)^n f(x), \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

В частности, при $n = 1$ имеем

$$F'(p) \risingdotseq -x f(x).$$

6. **Интегрирование оригинала**. Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

7. **Интегрирование изображения**. Если интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp$ сходится и $F(p) \risingdotseq f(x)$, то

$$\int\limits_p^\infty F(p)\,dp \risingdotseq \frac{f(x)}{x}, \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

8. **Теорема об умножении изображений (теорема о свертке)** Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, $g(x) \risingdotseq G(p)$, то

$$F(p)G(p) \risingdotseq \int\limits_0^x f(t)g(x-t)\,dt = \int\limits_0^x f(x-t)g(t)\,dt,$$

когда $\operatorname{Re} p > \max(a_0, b_0)$. Интегралы в правой части соответствия называют *сверткой функций* $f(x)$ и $g(x)$.

9. **Теорема запаздывания**. Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\xi > 0$

$$f(x-\xi)\chi(x-\xi) \risingdotseq e^{-\xi p}F(p), \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

Оригинал по изображению восстанавливается единственным образом, с точностью до значений в точках разрыва. На практике обычно используют готовые таблицы оригиналов и изображений[4]. В таблице 1 перечислены основные оригиналы и изображения, часто встречающиеся в приложениях.

Пример 2. Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу основных оригиналов и изображений, найти изображения следующих функций:

1) $f(x) = e^{-4x}\sin 3x \cos 2x$;

2) $f(x) = e^{(x-2)}\sin(x-2)$;

3) $f(x) = x^2 e^{3x}$;

4) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$.

[4]Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., 1965.

Таблица 1. Основные оригиналы и изображения

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\dfrac{1}{p}$	$\cos\omega x$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
x^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\sin\omega x$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{p+\lambda}$	$x\cos\omega x$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$x^n e^{-\lambda x}$	$\dfrac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$	$x\sin\omega x$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$

Решение. 1) Преобразуем выражение для функции $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = e^{-4x}\sin 3x\cos 2x = \frac{1}{2}e^{-4x}(\sin 5x + \sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-4x}\sin 5x + \frac{1}{2}e^{-4x}\sin x.$$

Так как

$$\sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1} \quad \text{и} \quad \sin 5x \risingdotseq \frac{5}{p^2+25},$$

то, используя свойство линейности и теорему смещения, для изображения функции $f(x)$ будем иметь:

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{(p+4)^2+25} + \frac{1}{(p+4)^2+1}\right).$$

2) Так как

$$\sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \quad e^x\sin x \risingdotseq \frac{1}{(p-1)^2+1},$$

то, используя теорему запаздывания, будем иметь

$$f(x) = e^{x-2}\sin(x-2) \risingdotseq F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p-1)^2+1}.$$

3) Так как $x^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$, то по теореме смещения имеем:

$$f(x) = x^2e^{3x} \risingdotseq F(p) = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

Приведем для сравнения способ построения изображения функции $f(x) = x^2 e^{3x}$ с применением свойства дифференцирования изображения:

$$e^{3x} \risingdotseq \frac{1}{p-3};$$

$$xe^{3x} \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-3}\right) = \frac{1}{(p-3)^2};$$

$$x^2 e^{3x} \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{(p-3)^2}\right) = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

Получили тот же результат.

4) Так как

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \risingdotseq \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4},$$

то, используя свойство интегрирования изображения, будем иметь:

$$\frac{\sin^2 x}{x} \risingdotseq \int_p^\infty \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}\right) dp =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln p^2 - \frac{1}{4}\ln(p^2+4)\right)\Bigg|_p^\infty = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2}{p^2+4}\Bigg|_p^\infty = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4}{p^2}.$$

□

3. Восстановление оригинала по изображению

Пусть изображение $Y(p)$ представляет собой правильную рациональную дробь (является рациональной функцией).

Если дробь разложить на сумму простейших (элементарных) дробей, то для каждой из них соответствующий оригинал можно найти, используя свойства преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и их изображений.

Действительно,

$$\frac{A}{p-a} \risingdotseq A\cdot e^{ax}; \qquad \frac{A}{(p-a)^n} \risingdotseq \frac{A}{(n-1)!}x^{n-1}\cdot e^{ax}.$$

Выполнив преобразования дроби

$$\frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2} = \frac{A(p-a)+aA+B}{(p-a)^2+b^2} = \frac{A(p-a)}{(p-a)^2+b^2} + \frac{aA+B}{(p-a)^2+b^2},$$

получим

$$\frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2} \risingdotseq A\,e^{ax}\cos bx + \frac{aA+B}{b}\;e^{ax}\sin bx.$$

Для построения оригинала, соответствующего дроби

$$\frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^n},$$

можно воспользоваться теоремой умножения. Например, при $n=2$ имеем

$$\frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^2} = \frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2}\cdot\frac{1}{(p-a)^2+b^2}.$$

Так как

$$\frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2} \risingdotseq A\,e^{ax}\cos bx + \frac{aA+B}{b}\;e^{ax}\sin bx = h_1(x)$$

и

$$\frac{1}{(p-a)^2+b^2} \risingdotseq \frac{1}{b}\;e^{ax}\sin bx = g(x),$$

то

$$\frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^2} = \int\limits_0^x g(x-t)\,h_1(t)\;dt = h_2(t).$$

При $n=3$:

$$\frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^2}\cdot\frac{1}{(p-a)^2+b^2} \risingdotseq \int\limits_0^x g(x-t)\,h_2(t)\;dt,$$

Аналогично можно рассматривать восстановление оригиналов и при $n>3$.

Знаменатель рациональной функции $Y(p)$ есть многочлен порядка k. Если он имеет k различных нулей p_i, $i=\overline{1,k}$, то, разложив знаменатель на множители $(p-p_i)$, соответствующий оригинал для $Y(p)$ можно найти по формуле:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k}\left(Y(p)(p-p_i)e^{px}\right)\Big|_{p=p_i}. \tag{2}$$

Произведение $Y(p)(p-p_i)$ дает рациональную функцию, знаменатель которой не содержит множителя $(p-p_i)$, и вычисленное при

$p = p_i$ определяет коэффициент, с которым дробь $\dfrac{1}{p - p_i}$ входит в разложение функции $Y(p)$ на сумму элементарных дробей.

Пример 3. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$Y(p) = \frac{1}{p^3 - p}.$$

Решение. Разложив заданное изображение на сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{p^3 - p} = \frac{1}{p(p-1)(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+1)},$$

найдем оригинал

$$y(x) = -1 + \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{2}e^{-x} = -1 + \operatorname{ch} x.$$

Ответ: $y(x) = -1 + \operatorname{ch} x$. □

Пример 4. Найти оригинал для изображения:

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

Решение. Так как $\dfrac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin x$, то, применяя свойство интегрирования оригинала, получим:

$$\frac{1}{p(p^2+1)} \risingdotseq \int\limits_0^x \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^x = 1 - \cos x.$$

Ответ: $y(x) = 1 - \cos x$.

Пример 5. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Решение. Применяя свойство изображения свертки, будем иметь:

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2+4)^2} = \frac{1}{p^2+4} \cdot \frac{1}{p^2+4} \risingdotseq \frac{1}{4}\int_0^x \sin 2(x-t) \cdot \sin 2t\,dt.$$

Вычислив интеграл, получим искомое выражение для оригинала.

Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{16}\sin 2x - \dfrac{1}{8}x\cos 2x$. □

Пример 6. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$Y(p)=\frac{p^2+2}{p^3-p^2-6p}.$$

Решение. Так как $p^3-p^2-6p=p(p-3)(p+2)$, то знаменатель дроби $Y(p)$ имеет три простых корня: $p_1=0,\ p_2=3$ и $p_3=-2$. Построим соответствующий оригинал с помощью формулы (2):

$$y(x)=\left.\frac{(p^2+2)e^{px}}{(p-3)(p+2)}\right|_{p=0}+\left.\frac{(p^2+2)e^{px}}{p(p+2)}\right|_{p=3}+\left.\frac{(p^2+2)e^{px}}{p(p-3)}\right|_{p=-2}=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{11}{15}e^{3x}+\frac{3}{5}e^{-2x}.$$

□

Пример 7. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$Y(p)=\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p^2+4)}.$$

Решение. Представим дробь, входящую в выражение в виде простейших дробей:

$$\frac{1}{p(p+1)(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Применяя к разложению метод неопределенных коэффициентов, получим:

$$A=\frac{1}{4};\ B=D=-\frac{1}{5};\ C=-\frac{1}{20}.$$

Изображение примет вид:

$$Y(p)=\frac{1}{4}\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p}-\frac{1}{5}\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p+1}-\frac{1}{20}\frac{pe^{-\frac{p}{2}}}{p^2+4}-\frac{1}{5}\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p^2+4}. \tag{a}$$

Используя соотношения:

$$\frac{1}{p}\risingdotseq\chi(x),\qquad\frac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-x}\chi(x),$$

$$\frac{p}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2x\ \chi(x),\qquad\frac{1}{p^2+4}\risingdotseq\frac{1}{2}\sin 2x\ \chi(x)$$

и учитывая теорему запаздывания, получим для изображения (а) искомый оригинал.
Ответ:

$$y(x) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{20}\cos(2x-1) - \frac{1}{10}\sin(2x-1)\right)\cdot\chi\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

□

4. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Метод решения различных классов уравнений с помощью преобразования Лапласа получил название *операционного метода*. Свойство преобразования Лапласа – дифференцирование оригинала – позволяет сводить решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к решению алгебраических уравнений.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \tag{4}$$

Пусть для функции $f(x)$ и искомого решения выполнены условия существования преобразования Лапласа.

Обозначим через $Y(p)$ изображение неизвестной функции (оригинала) $y(x)$, а через $F(p)$ – изображение правой части $f(x)$:

$$y(x) \risingdotseq Y(p), \quad f(x) \risingdotseq F(p).$$

По правилу дифференцирования оригинала имеем

$$\begin{aligned}
&y'(x) \risingdotseq pY(p) - y_0,\\
&y''(x) \risingdotseq p^2Y(p) - py_0 - y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n)}(x) \risingdotseq p^nY(p) - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_1 - \ldots - y_{n-1}.
\end{aligned}$$

Тогда в силу свойства линейности преобразования Лапласа после его применения к левой и правой частям уравнения (3) получим операторное уравнение

$$M(p)Y(p) - N(p) = F(p), \tag{5}$$

где $M(p)$ – характеристический многочлен уравнения (3):

$$M(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n y,$$

$N(p)$ – многочлен, содержащий начальные данные задачи Коши (обращается в нуль при нулевых начальных данных):

$$N(p) = y_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + \\ + y_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + y_{n-2}(p + a_1) + y_{n-1},$$

$F(p)$ – изображение функции $f(x)$.

Разрешая операторное уравнение (5), получаем изображение Лапласа $Y(p)$ искомого решения $y(x)$ в виде

$$Y(p) = \frac{F(p) + N(p)}{M(p)}.$$

Восстанавливая оригинал для $Y(p)$, находим решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (4).

Пример 8. Найти решение дифференциального уравнения:

$$y'(x) + y(x) = e^{-x},$$

удовлетворяющее условию: $y(0) = 1$.

Решение. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как

$$\begin{array}{lll} y'(x) & \risingdotseq & pY(p) - y(0) = pY(p) - 1, \\ e^{-x} & \risingdotseq & \dfrac{1}{p+1}, \end{array}$$

то, применив к заданному уравнению преобразование Лапласа, используя свойство линейности, получим алгебраическое уравнение относительно $Y(p)$:

$$pY(p) - 1 + Y(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Откуда находим выражение для $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}.$$

Так как

$$\frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-x}, \quad \frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq xe^{-x},$$

то имеем

$$Y(p) \risingdotseq y(x) = e^{-x} \cdot x + e^{-x}.$$

Проверка: Покажем, что найденная функция действительно является решением задачи Коши. Подставляем выражение для функции $y(x)$ и ее производной

$$y'(x) = -e^{-x} \cdot x + e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x} \cdot x$$

в заданное уравнение:

$$-e^{-x} \cdot x + e^{-x} \cdot x + e^{-x} = e^{-x}.$$

После приведения подобных слагаемых в левой части уравнения получаем верное тождество: $e^{-x} \equiv e^{-x}$. Таким образом, построенная функция является решением уравнения.

Проверим, удовлетворяет ли она начальному условию $y(0) = 1$:

$$y(0) = e^{-0} + e^{-0} \cdot 0 = 1.$$

Следовательно, найденная функция является решением задачи Коши.

Ответ: $y(x) = e^{-x} \cdot x + e^{-x}$. □

Пример 9. Решить задачу Коши $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Решение. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как

$$y''(x) \risingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0), \quad 1 \risingdotseq 1/p,$$

то, применив к уравнению преобразование Лапласа, с учетом начальных условий получим

$$(p^2 + 1)Y(p) = \frac{1}{p} \Longrightarrow Y(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}.$$

Разложим дробь на простейшие дроби:

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}.$$

По таблице 1 найдем $y(x) = 1 - \cos x$.

Восстановить оригинал по изображению можно и применив свойство интегрирования оригинала (см. пример 4).

Ответ: $y(x) = 1 - \cos x$. □

Пример 10. Решить задачу Коши $y''+3y' = e^{-3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Решение. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как

$$y' \risingdotseq pY(p) - y(0), \quad y''(x) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0), \quad \text{и} \quad e^{-3x} \risingdotseq \frac{1}{p+3},$$

то, учитывая начальные условия, получим операторное уравнение

$$(p^2+3p)Y(p) + 1 = \frac{1}{p+3} \Longrightarrow Y(p) = -\frac{p+2}{(p+3)^2p}.$$

Разложим рациональную функцию на простейшие дроби:

$$-\frac{p+2}{(p+3)^2p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{(p+3)^2} = \frac{A(p^2+6p+9)+B(p^2+3p)+Cp}{p(p+3)^2}.$$

Составим систему уравнений для нахождения коэффициентов A, B и C:

$$A + B = 0, \quad 6A + 3B + C = -1, \quad 9A = -2,$$

решая которую найдем $A = -2/9$, $B = 2/9$, $C = -1/3$. Следовательно,

$$Y(p) = -\frac{2}{9}\,\frac{1}{p} + \frac{2}{9}\,\frac{1}{p+3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p+3)^2}.$$

Используя таблицу 1 получим ответ.

Ответ: $y(x) = -\frac{2}{9} + \frac{2}{9}e^{-3x} - \frac{1}{3}xe^{-3x}$. □

Пример 11. Найти решение дифференциального уравнения:

$$y'''(x) + 2y''(x) + 5y'(x) = 0,$$

удовлетворяющее условиям: $y(0) = -1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0.$

Решение. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как, учитывая заданные условия, имеем

$$\begin{aligned}
y'(x) &\risingdotseq p \cdot Y(p) - y(0) = pY(p) - (-1) = pY(p) + 1,\\
y''(x) &\risingdotseq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = \\
&\quad = p^2Y(p) - p \cdot (-1) - 2 = p^2Y(p) + p - 2,\\
y'''(x) &\risingdotseq p^3 \cdot Y(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - y''(0) = \\
&\quad = p^3Y(p) - p^2 \cdot (-1) - p \cdot 2 - 0 = p^3Y(p) + p^2 - 2p,
\end{aligned}$$

то после применения к заданному уравнению преобразования Лапласа получим следующее операторное уравнение:

$$p^3Y(p) + p^2 - 2p + 2p^2Y(p) + 2p - 4 + 5pY(p) + 5 = 0$$

или после преобразований:

$$Y(p) \cdot (p^3 + 2p^2 + 5p) = -p^2 - 1.$$

Решая это уравнение относительно $Y(p)$, получим

$$Y(p) = \frac{-p^2 - 1}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Полученное выражение разложим на простые дроби:

$$\frac{-p^2 - 1}{p(p^2 + 2p + 5)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 5}.$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов найдем A, B, C. Для этого приведем дроби к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при равных степенях p:

$$\frac{-p^2 - 1}{p(p^2 + 2p + 5)} = \frac{Ap^2 + 2Ap + 5A + Bp^2 + Cp}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Получим систему алгебраических уравнений относительно A, B, C:

$$A + B = -1, \quad 2A + C = 0, \quad 5A = -1,$$

решением которой будут:

$$A = -\tfrac{1}{5}, \quad B = -\tfrac{4}{5}, \quad C = \tfrac{2}{5}.$$

Тогда

$$Y(p) = -\frac{1}{5p} + \frac{1}{5} \cdot \frac{-4p + 2}{p^2 + 2p + 5}.$$

Чтобы найти оригинал второй дроби, выделим в ее знаменателе полный квадрат: $p^2 + 2p + 5 = (p+1)^2 + 4$, тогда в числителе выделим слагаемое $p+1$: $\quad -4p+2 = -4(p+1)+6$ и разложим дробь на сумму двух дробей:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{-4p + 2}{p^2 + 2p + 5} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{p + 1}{(p+1)^2 + 4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{(p+1)^2 + 4}.$$

Далее, воспользовавшись теоремой смещения и таблицей соответствия изображений и оригиналов, получим решение исходного уравнения.

Ответ: $\quad y(x) = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}e^{-x}\cos 2x + \frac{3}{5}e^{-x}\sin 2x.$ □

Операционным методом может быть построено и общее решение уравнения (3). Для этого надо конкретные значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ начальных условий заменить на произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

С помощью преобразования Лапласа могут быть решены и линейные системы с постоянными коэффициентами. Проиллюстрируем его использование на следующих примерах.

Пример 12. Найти решение системы:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + \sin t, \\ y' = -x + y + 1, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

Решение. Построим решение с помощью преобразования Лапласа, предварительно сведя систему к одному эквивалентному уравнению второго порядка.

Выразим неизвестную функцию $y(t)$ из первого уравнения системы

$$y = \frac{1}{2}\left(x' - x - \sin t\right), \quad y' = \frac{1}{2}\left(x'' - x' - \cos t\right)$$

и подставим во второе уравнение:

$$\frac{1}{2}\left(x'' - x' - \cos t\right) = -x + \frac{1}{2}\left(x' - x - \sin t\right) + 1.$$

Преобразуем полученное уравнение, введя обозначение $f(t)$ для правой части:

$$x'' - 2x' + 3x = \cos t - \sin t + 2 \equiv f(t). \qquad (*)$$

Найдем начальные условия:

$$x(t)\big|_{t=0} = 1; \quad x'(t)\big|_{t=0} = \left(x + 2y + \sin t\right)\big|_{t=0} = 1. \qquad (**)$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению $(*)$ с начальными условиями $(**)$. Пусть $x(p) \risingdotseq x(t),\ F(p) \risingdotseq f(t)$, тогда будем иметь

$$p^2 x(p) - p - 1 - 2px(p) + 2 + 3x(p) = F(p),$$

$$x(p)\left(p^2 - 2p + 3\right) = F(p) + p - 1,$$

$$x(p) = \frac{F(p)}{p^2 - 2p + 3} + \frac{p-1}{p^2 - 2p + 3}.$$

Найдем фундаментальное решение:

$$h(t) \risingdotseq H(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 3} = \frac{1}{(p-1)^2 + (\sqrt{2})^2} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \sin\sqrt{2}t.$$

Найдем оригинал $x(t)$, учитывая, что $h'(t) \risingdotseq pH(p) - h(0) = pH(p)$,

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + h'(t) - h(t).$$

Выражение для функции $y(t)$ можно построить, используя второе уравнение заданной системы, подставив в него найденное выражение для функции $x(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(x' - x - \sin t\right).$$

Ответ: $x(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}e^t\cos\sqrt{2}t + \frac{7\sqrt{2}}{12}e^t\sin\sqrt{2}t,$
$y(t) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t + \frac{7}{12}e^t\cos\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{6}e^t\sin\sqrt{2}t.$ □

Пример 13. Найти решение системы:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + e^t, \\ y'(t) = x(t) - y(t) + e^t \end{cases}$$

при начальных условиях: $x(0) = y(0) = 1$.

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Так как, учитывая заданные условия, имеем

$$\begin{aligned} x'(t) &\risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1, \\ y'(t) &\risingdotseq pY(p) - p \cdot y(0) = pY(p) - 1, \end{aligned}$$

то, применив к каждому уравнению системы преобразование Лапласа, получим систему алгебраических уравнений относительно $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} X(p) + pX(p) - 1 = Y(p) + \dfrac{1}{p-1}, \\ Y(p) + pY(p) - 1 = X(p) + \dfrac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Решив систему методом Гаусса или с помощью формул Крамера, найдем выражения для изображений $X(p)$ и $Y(p)$:

$$X(p) = Y(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Соответствующие оригиналы дают решение задачи.

Ответ: $x(t) = e^t, \quad y(t) = e^t.$ $\square$