1. Интегрирование системы дифференциальных уравнений методом исключения переменных

Один из основных методов интегрирования системы дифференциальных уравнений заключается в следующем: из уравнений нормальной системы и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключают все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получают одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Интегрируя это уравнение более высокого порядка, находят одну из неизвестных функций, а остальные неизвестные функции, по возможности без интеграции, определяются из исходных уравнений и уравнений, получившихся в результате их дифференцирования.

Проиллюстрируем этот метод на примере системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь a, b, c, d – постоянные коэффициенты, а $f(t)$ и $g(t)$ — заданные функции; $x(t)$ и $y(t)$ – искомые функции. Пусть $b \neq 0$. Выразим из первого уравнения системы (1) функцию y:

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right). \tag{2}$$

Подставляя это выражение вместо y, а его производную вместо $\dfrac{dy}{dt}$ во второе уравнение системы (1), получим уравнение второго порядка относительно $x(t)$:

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx = P(t). \tag{3}$$

Покажите, что коэффициенты A, B, C и правая часть $P(t)$ уравнения определяются следующими выражениями

$$A = \tfrac{1}{b}, \quad B = -\tfrac{a+d}{b}, \quad C = \tfrac{ad-cb}{b}, \quad P(t) = \tfrac{f'(t)-df(t)+bg(t)}{b}.$$

Решив уравнение (3), найдем $x = x(t, C_1, C_2)$. Подставив найденное выражение для x в (2), найдем $y = y(t, C_1, C_2)$.

Пример 1. Методом исключения построить решение системы

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = y + t, \\
\dfrac{dy}{dt} = x - t.
\end{cases} \tag{4}
$$

Решение. Из первого уравнения системы выразим y и найдем производную y':

$$
y = \frac{dx}{dt} - t, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - 1.
$$

Подставим эти выражения во второе уравнение системы, получим

$$
\frac{d^2x}{dt^2} - x = 1 - t.
$$

Это уравнение является линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Покажите, что оно имеет следующее решение

$$
x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + t - 1.
$$

Зная x, найдем y:

$$
y = \frac{dx}{dt} - 1 = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - t + 1.
$$

Таким образом, получили общее решение системы

$$
x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + t - 1, \qquad y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - t + 1.
$$

□

Замечание. Не всякая система дифференциальных уравнений может быть сведена к одному уравнению более высокого порядка. Например, система

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = x, \\
\dfrac{dy}{dt} = y.
\end{cases}
$$

не сводится к одному уравнению второго порядка. Ее общее решение строится интегрированием каждого уравнения системы независимо от другого (система распадается на два уравнения) и имеет вид $x = C_1 e^{t}$, $y = C_2 e^{t}$.

2. Системы линейных дифференциальных уравнений

Системой линейных дифференциальных уравнений называется система вида

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + f_i(t), \qquad i = 1, \dots n, \tag{5}$$

где функции $a_{ik}(t)$ непрерывны на промежутке T.

Систему (5) можно записать в векторной форме

$$X' = A(t)X + F(t), \tag{6}$$

где $X(t)$, и $F(t)$ – n-мерные вектор-столбцы, а $A(t)$ – $(n \times n)$-матрица:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $F \equiv \mathbf{0}$, то система (6) называется **линейной однородной**, иначе – **линейной неоднородной**.

Определим линейный дифференциальный оператор L равенством $L[X] \equiv X' - AX$. Так как оператор L обладает свойствами:

1) $L[cX] = cL[X]$, где c – произвольная постоянная;
2) $L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2]$,

то справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если X является решением линейной однородной системы*

$$X' = A(t)X, \tag{7}$$

то cX является решением той же системы, где c – произвольная постоянная.

Теорема 2. *Сумма $X_1 + X_2$ двух решений X_1 и X_2 однородной линейной системы уравнений является решением той же системы.*

Следствие. *Если $X_1, X_2, \dots, X_m$ – решения линейной однородной системы (7), а c_i, $i = 1, 2, \dots, m$, – произвольные постоянные, то линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i X_i$ является решением той же системы.*

Напомним, что векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \ldots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}$$

называются **линейно зависимыми** на отрезке $[a, b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n \equiv 0$$

при $t \in [a, b]$, причем по крайней мере одно $\alpha_i \neq 0$. Если же тождество справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то векторы называются $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **линейно независимыми**.

Если векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ линейно зависимы, то определитель системы – определитель Вронского (вронскиан)

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

должен быть равен нулю для всех значений t отрезка $[a, b]$.

Теорема 3. *Если определитель Вронского $W(t)$ решений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ линейной однородной системы уравнений с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $a_{ik}(t)$ равен нулю хотя бы в одной точке $t = t_0$ отрезка $[a, b]$, то решения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ линейно зависимы на том же отрезке, и, следовательно, на рассматриваемом отрезке $W(t) \equiv 0$. Если определитель Вронского $W(t)$ решений не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$, тогда эти решения линейно-независимы на $[a, b]$.*

Замечание. Эта теорема не распространяется на произвольные векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$, не являющиеся решениями системы (7) с непрерывными коэффициентами.

Определение 1. ***Фундаментальной системой решений** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ уравнения (7) называются любые n линейно независимых его решений.*

Определение 2. *Матрица $W(t)$, столбцами которой являются координаты векторов, образующих фундаментальную систему решений, называется* **фундаментальной матрицей** *уравнения (7).*

Определитель фундаментальной системы – это определитель Вронского системы n линейно-независимых решений уравнения (7), и он отличен от 0.

Теорема 4. ([1].) *Линейная однородная система уравнений имеет фундаментальную матрицу.*

По заданной системе n линейно-независимых векторов $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ можно найти единственную систему (7), для которой эти вектора образуют фундаментальную систему решений. Так как фундаментальная матрица уравнения (7) является решением матричного уравнения

$$W'(t) = A(t)W(t), \tag{8}$$

то матрица $A(t)$ искомой системы находится следующим образом:

$$A(t) = W'(t)W^{-1}(t). \tag{9}$$

Обратная матрица $W^{-1}(t)$ существует, так как определитель матрицы $W(t)$ отличен от 0.

Пример 2. Доказать линейную независимость функций

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

и найти однородную систему уравнений, для которой эти функции образуют фундаментальную систему решений.

Решение. Составим из функций X_1, X_2 определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{vmatrix} = 4e^{6t} \neq 0,$$

следовательно, функции X_1, X_2 линейно-независимы для любого t. Поскольку они линейно-независимы, то эти функции образуют фундаментальную систему решений некоторой линейной однородной системы дифференциальных уравнений с двумя неизвестными. Ее матрицу $A(t)$ найдем по формуле (9). Имеем

$$W'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 5e^{5t} \\ -e^t & 15e^{5t} \end{pmatrix},$$

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{4e^{6t}} \begin{pmatrix} 3e^{5t} & -e^{5t} \\ e^{t} & e^{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-5t} & e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A(t) = W'(t) \cdot W^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомая линейная однородная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

□

Теорема 5. ([1].) *Если $W(t)$ – фундаментальная матрица уравнения (7), то любое его решение $X(t)$ представимо в виде*

$$X = W(t)C, \tag{10}$$

где C – некоторый постоянный вектор-столбец.

Таким образом, зная фундаментальную матрицу $W(t)$ линейной однородной системы (7), можно построить ее **общее решение** в виде (10), где C – произвольный постоянный вектор-столбец.

Теорема 6. *Если $\tilde{X}$ является решением линейной неоднородной системы (6), а X^0 – решением соответствующей однородной системы (7), то сумма $X^0 + \tilde{X}$ также будет решением неоднородной системы (6).*

Теорема 7. *Общее решение на отрезке $[a, b]$ неоднородной системы с непрерывными на том же отрезке коэффициентами $a_{ik}(t)$ и правыми частями $f_i(t)$ равно сумме общего решения $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ соответствующей однородной системы и частного решения $\tilde{X}$ рассматриваемой неоднородной системы.*

Теорема 8. [принцип суперпозиции] *Решением системы линейных уравнений*

$$L[X] = \sum_{i=1}^{m} F_i, \qquad F_i = \begin{pmatrix} f_{1i}(t) \\ f_{2i}(t) \\ \dots \\ f_{ni}(t) \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, \dots, m,$$

является сумма $\sum_{i=1}^{m} X_i$ *решений* X_i *уравнений*

$$L[X_i] = F_i \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Если требуется найти решение системы (6), удовлетворяющее условию $X(t_0) = X_0$, то говорят, что для системы (6) поставлена **начальная задача**, или **задача Коши**.

Теорема. *Если функции* $a_{ik}(t)$, $i, k = 1, \dots, n$, *и вектор-функция* $F(t)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$, *то решение начальной задачи для системы (6) существует и единственно всюду на* $[a, b]$.

Если известна фундаментальная матрица однородной системы (7), то построение частного решения неоднородной системы сводится к квадратурам, т.е. к интегрированию известных функций.

Одним из общих методов построения решения системы (6) на базе фундаментальной матрицы является **метод вариации постоянных (метод Лагранжа)**.

Пусть известна фундаментальная матрица $W(t)$ соответствующей однородной системы (7), а значит известно общее решение однородной системы, определяемое по формуле (10).

Решение неоднородной системы (6) будем искать в виде

$$X(t) = W(t)C(t), \tag{11}$$

где $C(t)$ – искомая вектор-функция переменной t. Подставляя искомый вид решения в систему (6), получим

$$W'C + WC' = AWC + F \quad \Leftrightarrow \quad (W' - AW)C + WC' = F.$$

Так как W удовлетворяет уравнению (8), то $W' - AW = 0$ и, следовательно, для функции $C(t)$ получим матричное уравнение

$$W(t)C'(t) = F, \tag{12}$$

которое является алгебраической системой относительно координат вектора $C'(t)$. Решая ее и интегрируя полученные выражения, находим вектор $C(t)$. Далее подставляя $C(t)$ в искомый вид решения (11), получим решение неоднородной системы (6).

Пример 3. Найти общее решение неоднородной системы, используя метод вариации:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{-t}, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Решение. Фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

образуют, например, вектор-функции (см. пример 2)

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица $W(t)$:

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы будем искать в виде

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = W(t)C(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix},$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ находятся из уравнения вида (12):

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решив его (выполните это самостоятельно), будем иметь:

$$\begin{cases} C_1' = \frac{3}{4}e^{-2t}, \\ C_2' = \frac{1}{4}e^{-6t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{8}e^{-2t} + \tilde{C}_1, \\ C_2 = -\frac{1}{24}e^{-6t} + \tilde{C}_2, \end{cases}$$

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ – произвольные постоянные. Тогда общее решение данной системы

$$X = W(t)C(t) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12}e^{-t} + \tilde{C}_1 e^t + \tilde{C}_2 e^{5t} \\ \frac{1}{4}e^{-t} - \tilde{C}_1 e^t + 3\tilde{C}_2 e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Конечно, решение заданной системы можно построить методом исключения. Выполните это самостоятельно.

□

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Будем рассматривать систему линейных уравнений (5), в которой коэффициенты $a_{ik},\ i,k = 1,2,\dots,n,$ – постоянные, записав ее в векторном виде:

$$X' = AX + F(t), \tag{13}$$

где A – постоянная матрица.

Систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами можно проинтегрировать путем сведения ее к одному уравнению более высокого порядка, которое также будет линейным с постоянными коэффициентами (см. пример 1) . На практике такой метод удобно применять для систем второго порядка. В случае систем большего порядка лучше для построения общего решения уравнения (13) найти прежде всего фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения:

$$X' = AX, \tag{14}$$

Очевидно, система (14) имеет решение $X \equiv 0$. Будем искать ненулевое решение системы в виде $he^{\lambda t}$, где λ – неизвестный параметр, а h – неизвестный ненулевой постоянный вектор-столбец. Подставляя это выражение в (14), получим $\lambda he^{\lambda t} = Ahe^{\lambda t}$. Таким образом, вектор h должен быть решением алгебраической системы уравнений

$$(A - \lambda E)h = 0, \tag{15}$$

которая будет иметь ненулевое решение, если потребовать, чтобы

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Уравнение n-й степени (16) называется **характеристическим уравнением** системы (14). Его корни (характеристические числа) называются также **собственными значениями матрицы** A**.** Решение h уравнения (15), соответствующее собственному значению λ, называется **собственным вектором**.

Для построения фундаментальной системы решений необходимо знать:

– все различные корни λ_i характеристического уравнения (16),

– кратность m_i этих корней,

– собственные вектора h_i матрицы A, соответствующие λ_i.

Опишем правила построения фундаментальной системы решений.
Правило 1. Каждому простому корню λ (вещественному или комплексному) уравнения (16) отвечает частное решение вида

$$he^{\lambda t},$$

входящее в фундаментальную систему, где h – числовой вектор-столбец, являющийся собственным вектором матрицы A, отвечающим простому собственному значению λ.

Замечание. Если коэффициенты a_{ik} системы (14) вещественные, то комплексно-сопряженным собственным значениям λ и $\bar{\lambda}$ отвечают комплексно-сопряженные собственные векторы h и $\bar{h}$. В этом случае корням λ и $\bar{\lambda}$ соответствует пара вещественных решений, входящих в фундаментальную систему, определяемая следующим образом

$$X_1 = \frac{he^{\lambda t} + \bar{h}e^{\bar{\lambda} t}}{2}, \quad X_2 = \frac{he^{\lambda t} - \bar{h}e^{\bar{\lambda} t}}{2i}.$$

Правило 2. Если корень λ имеет кратность $m > 1$ и ему отвечают ровно m собственных векторов матрицы A, то каждый такой корень определяет ровно m решений вида

$$h_1e^{\lambda t},\ h_2e^{\lambda t},\ \dots\ ,\ h_me^{\lambda t},$$

входящих в фундаментальную систему.

Замечание. В общем случае количество собственных векторов матрицы A, отвечающих λ, равно $n - r$, где n – порядок матрицы A, а r — ранг матрицы $A - \lambda E$.

Правило 3. Если для собственного значения λ кратности $m > 1$ имеется только l $(l < m)$ (т. е. меньше кратности корня) линейно независимых собственных векторов матрицы A, то решения, соответствующие λ, можно искать в виде произведения векторного многочлена степени $m - l$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$X = (\beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_{m-l}t^{m-l})e^{\lambda t}. \tag{17}$$

Чтобы найти векторы $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-l}$, надо подставить выражение (17) в систему (14). Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях системы, получим уравнения для нахождения векторов $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-l}$. При этом останется ровно m независимых коэффициентов (количество, равное кратности корня), через которые линейно выражаются остальные коэффициенты.

Итак, характеристическое уравнение n-й степени (16) имеет $k \leqslant n$ различных корней λ_i кратностей m_i соответственно. Каждому корню λ_i соответствуют m_i линейно независимых частных решений системы (14), построенных по описанным выше правилам. Всего таких решений $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ и их совокупность образуют фундаментальную систему решений однородной системы[1] (14). Построив фундаментальную систему решений $X_1,\ X_2,\ \ldots\ ,\ X_n$, общее решение системы (14) в соответствии с формулой (10), в которой $W(t) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, является линейной комбинацией X_i:

$$X(t) = W(t)C = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i, \tag{18}$$

где C_i – произвольные постоянные.

Пример 4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - 2z, \\ y' = x + z, \\ z' = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$$

Решение. Для матрицы системы составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda^2-1) = 0.$$

Оно имеет три различных корня $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$. Найдем соответствующие им собственные вектора.

Собственный вектор $h_1 = (a; b; c)^T$, отвечающий $\lambda_1 = 2$, удовлетворяет системе

$$(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[1]Доказательство линейной независимости построенных таким образом решений см., например, в [1].

$$\left\{\begin{aligned} -5a+4b-2c &= 0,\\ a-2b+c &= 0,\\ 6a-6b+3c &= 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} a-2b+c &= 0,\\ 2b-c &= 0. \end{aligned}\right.$$

Пусть $b = 1$, тогда $c = 2$ и $a = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = 2$ отвечает собственный вектор $h_1 = (0; 1; 2)^T$.

Значению $\lambda_2 = 1$ отвечает вектор $h_2 = (1; 1; 0)^T$, а $\lambda_3 = -1$ – вектор $h_3 = (1; 0; -1)^T$. Проверьте это самостоятельно.

Таким образом, получили следующую фундаментальную систему решений

$$X_1 = h_1 e^{2t}, \quad X_2 = h_2 e^{t}, \quad X_3 = h_3 e^{-t}.$$

Тогда в соответствии с формулой (18) общее решение заданной системы имеет вид:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Ответ: $x = C_2e^t + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^{2t} + C_2e^t$, $z = 2C_1e^{2t} - C_3e^{-t}$. □

Пример 5. Найти общее решение системы

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x - 2y,\\ y' &= x - y. \end{aligned}\right.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение системы

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2\\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0,$$

Его корни $\lambda = \pm i$. Найдем соответствующие им собственные вектора.

Вектор, соответствующий $\lambda = i$, удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} 1-i & -2\\ 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{\begin{aligned} &a(1-i) - 2b = 0,\\ &a - (1+i)b = 0, \end{aligned}\right.$$

То есть $a - (1 + i)b = 0$. Полагая, например, $b = 1$, найдем $a = 1 + i$. Тогда

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1+i\\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t\\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t + \sin t\\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Вектор, соответствующий $\lambda = -i$, удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} a(1+i) - 2b = 0, \\ a - (i-1)b = 0, \end{cases}$$

То есть $a + (i-1)b = 0$. Полагая, например, $b = 1$, найдем $a = 1 - i$. Тогда

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему вещественных решений данной системы образуют векторы X_1 и X_2, определяемые как линейные комбинации векторов $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$:

$$X_1 = \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \frac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2}{2i} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t,\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$

Постройте решение заданной системы методом исключения.

□

Пример 6. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = 4x - y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z. \end{cases}$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы системы, составив характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-3)^2 = 0.$$

Один корень уравнения $\lambda_1 = 2$ является простым, другой, $\lambda_2 = 3$, имеет кратность $m_2 = 2$.

Найдем собственный вектор h_1, соответствующий $\lambda_1 = 2$, решая уравнение

$$(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2a - b - c &= 0, \\ a - c &= 0, \\ a - b &= 0 \end{aligned} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} a - b &= 0, \\ a - c &= 0. \end{aligned} \right.$$

Полагая $a = 1$, получим $b = c = 1$ и, следовательно, $h_1 = (1;1;1)^T$.

Составим уравнение для нахождения собственного вектора, соответствующего $\lambda = 3$:

$$(A - \lambda_2 E)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная система равносильна одному уравнению

$$a - b - c = 0,$$

для которого можно указать два линейно независимых решения, например, такие

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 0 \quad \text{и} \quad a = 1,\ b = 0,\ c = 1,$$

Они определяют два линейно независимых собственных вектора-столбца $h_2 = (1;1;0)^T$ и $h_2 = (1;0;1)^T$.

Таким образом, получили следующую фундаментальную систему решений $X_1 = h_1 e^{2t},\ X_2 = h_2 e^{3t},\ X_3 = h_3 e^{3t}$. Тогда общее решение заданной системы имеет вид:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Ответ: $x = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t},\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t},$
$z = C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t}.$ □

Пример 7. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = -x + y - 2z, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z. \end{cases}$$

Решение. Для матрицы системы составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 4 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0.$$

Один корень уравнения $\lambda_1 = 1$ является простым, другой, $\lambda_2 = -1$, имеет кратность $m_2 = 2$.

Найдем собственный вектор h_1, соответствующий $\lambda_1 = 1$, решая уравнение

$$(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -2a + b - 2c &= 0, \\ a &= 0, \\ 2a + b - 2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b - 2c = 0. \end{cases}$$

Полагая $c = 1$, получим $b = 2$ и, следовательно, $h_1 = (0; 2; 1)^T$ и $X_1 = h_1 e^t$.

Так как ранг матрицы

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 2, в соответствии с правилом 3 будем искать решение заданной системы в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix} e^{-t}. \qquad (*)$$

Подставляя его в заданное уравнение, получим

$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 - b_1 t \\ b_2 - a_2 - b_2 t \\ b_3 - a_3 - b_3 t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -a_1 - b_1 t + a_2 + b_2 t - 2a_3 - 2b_3 t \\ 4a_1 + 4b_1 t + a_2 + b_2 t \\ 2a_1 + 2b_1 t + a_2 + b_2 t - a_3 - b_3 t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Приравнивая коэффициенты в строках при одинаковых степенях t в правой и левой частях уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_2 - 2a_3 - b_1 &= 0, \\ b_2 - 2b_3 &= 0, \\ 4a_1 + 2a_2 - b_2 &= 0, \\ 2b_1 + b_2 &= 0, \\ 2a_1 + a_2 - b_3 &= 0, \\ 2b_1 + b_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 - 2a_3 - b_1 &= 0, \\ b_2 - 2b_3 &= 0, \\ 2b_1 + b_2 &= 0, \\ 2a_1 + a_2 - b_3 &= 0. \end{cases}$$

Считая коэффициенты a_3 и b_1 произвольными, выразим через них все остальные. В результате получим:

$$\begin{cases} a_1 = -b_1 - a_3, \\ a_2 = b_1 + 2a_3, \\ b_2 = -2b_1, \\ b_3 = -b_1. \end{cases}$$

Построенное таким образом решение вида $(*)$

$$\begin{pmatrix} -b_1 - a_3 + b_1 t \\ b_1 + 2a_3 - 2b_1 t \\ a_3 - b_1 t \end{pmatrix} e^{-t} = a_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - b_1 \begin{pmatrix} 1 - t \\ -1 + 2t \\ t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

определяет еще два линейно независимых частных решения заданной системы:

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{и} \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ -1 + 2t \\ t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Тогда общее решение заданной системы имеет вид:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 - t \\ -1 + 2t \\ t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Ответ: $x = (-C_2 + C_3(1 - t))\, e^{-t}$,
$y = 2C_1 e^t + (2C_2 + C_3(2t - 1))\, e^{-t}$,
$z = C_1 e^t + (C_2 + C_3 t))\, e^{-t}$. □

Так как фундаментальная система решений линейной однородной системы всегда может быть построена (для этого надо найти корни характеристического уравнения), то для интегрирования **неоднородной системы**, согласно теореме 7, достаточно найти ее частное решение.

Если в системе (13) $F(t)$ – произвольная непрерывная вектор-функция, то частное решение системы (13) находят, как правило, методом вариации постоянных (метод Лагранжа) (см. пример 3). Однако для специального вида функции $F(t)$ используется также подбор частного решения системы (13) методом неопределенных коэффициентов (метод Эйлера).

Определение 3. **Вектор-квазимногочленом** *называется вектор-функция*

$$F(t) = e^{\mu t} P_q(t), \tag{19}$$

где μ – заданное комплексное число, $P_q(t)$ – вектор-многочлен степени q, коэффициентами которого служат n-мерные векторы.

Теорема 9. ([2]) *Если в системе (13) $F(t)$ является вектор-квазимногочленом (19), то для системы (13) всегда существует решение вида*

$$\tilde{X}(t) = e^{\mu t} Q_{q+s}(t), \tag{20}$$

где $Q_{q+s}(t)$ – вектор-многочлен степени $(q+s)$, причем $s = 0$, если μ – не собственное значение матрицы A, иначе $s = m$, где m – кратность собственного значения μ матрицы A, а коэффициентами $Q_{q+s}(t)$ служат n-мерные числовые векторы.

Замечание 1. Если правая часть системы (13) имеет вид

$$F(t) = e^{\alpha t}(P_q(t)\cos\beta t + Q_r(t)\sin\beta t),$$

где $P_q(t)$, $Q_r(t)$ – вектор-многочлены степени q и r соответственно, коэффициентами которых служат n-мерные числовые векторы, то частное решение системы (13) можно искать в виде:

$$\tilde{X}(t) = e^{\alpha t}\big(B_{p+s}(t)\cos\beta t + D_{p+s}(t)\sin\beta t\big).$$

Здесь $B_{p+s}(t)$ и $D_{p+s}(t)$ – вектор-многочлены степени $p+s$ ($p = \max(q,r)$; $s = 0$, если $\mu = \alpha + \beta i$ не является собственным значением матрицы A, иначе $s = m$, где m – кратность собственного значения μ). Конкретный вид вектор-многочленов находится методом неопределенных коэффициентов.

Замечание 2. Если в системе (13) функция $F(t)$ представляет собой конечную сумму вектор-квазимногочленов (и/или вектор-многочленов), то для получения частного решения (13) используется принцип суперпозиции (теорема 8).

Пример 8. Найти решение системы:

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Решение. Составив характеристическое уравнение для матрицы соответствующей однородной системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, найдем ее собственные значения:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4.$$

Им отвечают собственные вектора $h_1 = (1; -1)^T$ и $h_2 = (2; 1)^T$. Проверьте это самостоятельно.

Правая часть системы есть вектор-функция $F(t) = (4e^{5t};\ 0)^T$. И так как $\mu = 5$ не является собственным значением матрицы A, то частное решение будем искать виде:

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Подставляя искомое решение в заданную систему, будем иметь

$$\begin{pmatrix} 5a \\ 5b \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} 4e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5a \\ 5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2b + 4 \\ a + 2b \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему, найдем $a = 3$ и $b = 1$. Таким образом, заданная система имеет решение

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Ответ: $x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} + 3e^{5t},\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} + e^{5t}.$ □

Пример 9. Найти частное решение системы:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t, \\ y' = -2x + 2t. \end{cases}$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Представив правую часть системы в виде суммы двух вектор-функций:

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t), \quad F_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix},$$

найдем частные решения двух систем

$$X'(t) = AX(t) + F_1(t) \quad \text{и} \quad X'(t) = AX(t) + F_2(t). \qquad (*)$$

В обозначениях теоремы 9 функции $F_1(t)$ соответствует параметр $\mu = 1$, а функции $F_2(t)$ – параметр $\mu = 0$. Поэтому для первой системы частное решение будем искать в виде

$$\tilde{X}_1(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^t,$$

для второй –

$$\tilde{X}_2(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix}.$$

Подстановка $\tilde{X}_1(t)$ в первую систему $(*)$ дает:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + 1 \\ -2a. \end{pmatrix}$$

Полученная система имеет решение $a = 1,\ b = -2$.
Подставляя $\tilde{X}_2(t)$ во вторую систему $(*)$, получим

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + 2b_1 t + a_2 + b_2 t \\ -2a_1 - 2b_1 t + 2t \end{pmatrix}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в правой и левой частях матричного уравнения, будем иметь

$$\begin{cases} b_1 = 2a_1 + a_2, \\ 0 = 2b_1 + b_2, \\ b_2 = -2a_1, \\ 0 = -2b_1 + 2. \end{cases}$$

Полученная система имеет решение

$$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ b_1 = 1,\ b_2 = -2.$$

Таким образом, построили две вектор-функции

$$\tilde{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t \quad \text{и} \quad \tilde{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ -1-2t \end{pmatrix},$$

сумма которых, согласно принципу суперпозиции, определяет искомое частное решение

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_1(t) + \tilde{X}_2(t) = \begin{pmatrix} e^t + 1 + t \\ -2e^t - 1 - 2t \end{pmatrix}.$$

$\square$

Пример 10. Установить вид частного решения системы (не находя коэффициентов):

$$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

Решение. Для выбора вида частного решения найдем собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$:

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Так как правой части заданной системы $F(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует параметр $\mu = i$, совпадающий с собственным значением $\lambda_1 = i$ кратности $m = 1$, то, согласно замечанию 1 к теореме 9, частное можно искать в виде

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} a_3 + b_3 t \\ a_4 + b_4 t \end{pmatrix} \sin t.$$

$\square$

Пример 11. Установить вид частного решения системы (не находя коэффициентов):

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы системы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda E| = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$$

Так как правой части заданной системы $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5e^t \sin t \end{pmatrix}$ соответствует параметр $\mu = 1 + i$, не совпадающий с собственными значениями матрицы A, то устанавливается следующий вид частного решения

$$\tilde{X}(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \sin t \right).$$

□

Список использованной литературы

1. *Тихонов В. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука. Физматлит, 1998. 232 с.

2. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория Базовых знаний, 2000. 344 с.