Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

1. Однородное уравнение

Линейным однородным уравнением $n-$го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1}$$

где a_i $(i = 1, \ldots, n)$ – постоянные.

Общее решение уравнения (1) представляет собой линейную комбинацию частных решений[1], образующих фундаментальную систему. Нетрудно установить, что частным решением линейного уравнения первого порядка $y'(x) + a_1 y(x) = 0$ является функция $y(x) = e^{-a_1 x}$. Предположим, что решения уравнений высших порядков имеют такую же форму, т. е. будем искать частные решения уравнения (1) в виде $y(x) = e^{\lambda x}$. Подставив это выражение в (1), после сокращения обеих частей уравнения на $e^{\lambda x}$, получим алгебраическое уравнение n-й степени:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{2}$$

Это уравнение определяет те λ, при которых функция $e^{\lambda x}$ является решением однородного уравнения (1), и называется его **характеристическим уравнением**.

Зная все корни уравнения (2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, можно построить фундаментальную систему решений уравнения (1), используя следующие правила:

[1] В мемуаре, напечатанном в 1743 г., Л. Эйлер дал классический метод решения линейного однородного уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами при помощи подстановки $y = e^{kx}$ и в случае действительных кратных корней – подстановки $e^{kx}u$. В этом же мемуаре Эйлер указал, что общим решением уравнения порядка n является линейная комбинация его n частных решений, впервые введя термины «частное решение» и «общее решение». Одновременно линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами решил Д. Бернулли (1700–1782). Решение Бернулли было обнародовано в 1751 году [2].

1) Каждому простому корню λ соответствует частное решение $e^{\lambda t}$.

2) Каждому корню λ кратности $k > 1$ соответствуют k частных решений

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

3) Если коэффициенты уравнения (2) вещественные, то его комплексные корни будут попарно комплексно-сопряженными. Паре комплексных корней $\alpha \pm i\beta$ можно поставить в соответствие два вещественных частных решения

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

а каждой паре комплексных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k будут соответствовать $2k$ вещественных частных решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x\,e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x\,e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Фундаментальную систему решений уравнения (1) образуют n частных решений, отвечающих всем корням λ_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ характеристического уравнения (2) с учетом их кратности[2] k_i (причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Пример 1. Составить фундаментальную систему решений некоторого дифференциального уравнения, если известны корни λ_i его характеристического уравнения и их кратности k_i:

а) $\lambda_1 = 1,\ k_1 = 1;\ \ \lambda_2 = 3,\ k_2 = 1;$

б) $\lambda_1 = 2,\ k_1 = 1;\ \ \lambda_2 = -1,\ k_2 = 3;$

в) $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i,\ k_{1,2} = 1;$

г) $\lambda_{1,2} = 2 \pm i,\ k_{1,2} = 2.$

[2] Доказательство линейной независимости построенной системы функций см., например, в [1].

Решение. а) Корню $\lambda_1 = 1$ кратности $k_1 = 1$ соответствует одно частное решение $y_1(x) = e^x$. Корню $\lambda_2 = 3$ кратности $k_2 = 1$ также соответствует одно частное решение $y_2(x) = e^{3x}$. Фундаментальную систему образуют функции e^x, e^{3x}.

б) Корню $\lambda_1 = 2$ кратности $k_1 = 1$ соответствует одно частное решение $y_1(x) = e^{2x}$. Корню $\lambda_2 = -1$ кратности $k_2 = 3$ соответствуют три частных решения $y_2(x) = e^{-x}$, $y_3(x) = x\,e^{-x}$, $y_4(x) = x^2\,e^{-x}$. Тогда фундаментальную систему образуют функции

$$e^{2x}, \quad e^{-x}, \quad xe^{-x}, \quad x^2e^{-x}.$$

А как можно проверить их линейную независимость?

в) Корням $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$ кратности $k_{1,2} = 1$ соответствуют 2 вещественных частных решения

$$y_1(x) = e^{-2x}\cos 3x, \quad y_2(x) = e^{-2x}\sin 3x,$$

которые и образуют фундаментальную систему.

г) Корням $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ кратности $k_{1,2} = 2$ соответствуют 4 вещественных частных решения, образующих фундаментальную систему

$$e^{2x}\cos x, \quad xe^{2x}\cos x, \quad e^{2x}\sin x, \quad xe^{2x}\sin x.$$

$\square$

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами всегда интегрируются в элементарных функциях, а построение фундаментальной системы решений сводится к алгебраическим операциям (решению характеристического уравнения).

Пример 2. Решить уравнение $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0.$$

Его корни вещественные, различные: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, поэтому общее решение данного уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}.$$

□

Пример 3. Решить уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Уравнение имеет корень $\lambda_1 = 1$ кратности $k = 3$. Тогда общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x.$$

□

Пример 4. Решить уравнение $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Его корни комплексные: $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$, тогда общее решение уравнения

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

□

Пример 5. Решить уравнение

$$y^V - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 2$ – однократный, а $\lambda_{2,3} = i$, $\lambda_{4,5} = -i$ – двукратные, общее решение уравнения

$$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x.$$

□

Методы решения уравнений с постоянными коэффициентами достаточно просты. Поэтому естественно рассматривать вопрос о возможности сведения уравнения с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами. Такое преобразование можно выполнить, в частности, для линейного уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \qquad (3)$$

где a_i – константы для любого $i = 1, \ldots, n$, которое называется **уравнением Эйлера**.

С помощью замены $x = e^t$ (когда $x > 0$) или $x = -e^t$ (когда $x < 0$), уравнение (3) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Построив его общее решение и выполнив далее обратную замену $t = \ln|x|$, получим общее решение уравнения (3).

Пример 6. В области $x > 0$ преобразовать уравнение $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ с помощью замены $x = e^t$.

Решение. Введя замену $x = e^t$, для функции $y(x)$ будем иметь

$$y(x) = y(e^t) = z(t), \quad t = \ln x.$$

Выразим все производные функции $y(x)$, входящие в заданное уравнение, через новые переменные:

$$y'(x) = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = z'(t)\frac{1}{x} = z'(t)e^{-t};$$

$$y''(x) = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{d}{dt}\left(z'(t)e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(z''(t)e^{-t} - z'(t)e^{-t}\right)e^{-t} = \\ = (z''(t) - z'(t))e^{-2t}.$$

Подстановка полученных выражений в уравнение дает:

$$e^{2t}(z''(t) - z'(t))e^{-2t} - 4e^t z'(t)e^{-t} + 6z(t) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$z''(t) - 5z'(t) + 6z(t) = 0.$$

Постройте общее решение уравнения для функции $z(t)$ и выполните в нем обратную замену.

Ответ: $y = C_1x^2 + C_2x^3$. $\square$

Однако на практике не нужно выполнять преобразование уравнения Эйлера. Его частное решение ищется в виде $y = x^s$ (в новых переменных ему соответствует функция e^{st}). После подстановки этой функции в уравнение (3) получается характеристическое уравнение для определения s. Зная все корни характеристического уравнения, строится фундаментальная система решений уравнения (3) по следующим правилам.

1) Если корень действительный кратности 1, то ему соответствует частное решение вида x^s.

2) Если корень s кратности k, то ему соответствует k частных решения
$$x^s, \quad x^s \ln|x|, \quad \ldots, \quad x^s(\ln|x|)^{k-1}.$$

3) Паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения $\alpha \pm \beta i$ кратности 1, соответствуют два частных решения:
$$x^\alpha \cos(\beta \ln|x|), \quad x^\alpha \sin(\beta \ln|x|).$$

4) Паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения $\alpha \pm \beta i$ кратности k, соответствуют $2k$ частных решений:
$$x^\alpha \cos(\beta \ln|x|),\ x^\alpha \ln|x| \cos(\beta \ln|x|),\ \ldots,\ x^\alpha (\ln|x|)^{k-1} \cos(\beta \ln|x|),$$
$$x^\alpha \sin(\beta \ln|x|),\ x^\alpha \ln|x| \sin(\beta \ln|x|),\ \ldots,\ x^\alpha (\ln|x|)^{k-1} \sin(\beta \ln|x|).$$

Пример 7. Решить уравнение $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \;\; x \neq 0$.

Решение. Это уравнение является уравнением Эйлера. Решение будем искать в виде: $y = x^s$. Подставив его в заданное уравнение будем иметь

$$x^s(s(s-1) - 4s + 6) = 0.$$

Поскольку $x^s \neq 0$, то $s^2 - 5s + 6 = 0$. Это уравнение имеет простые корни $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, поэтому частные решения уравнения: $y_1 = x^2$, $y = x^3$. А общее решение является их линейной комбинацией:

$$y = C_1x^2 + C_2x^3.$$

Сравните это решение с полученным в примере 6. □

2. Неоднородное уравнение

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{4}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – постоянные, $f(x)$ – непрерывная на интервале (a, b) функция.

Общее решение уравнения (4) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения (1) и некоторого частного решения неоднородного уравнения (4).

В общем случае интегрирование уравнения (4) может быть осуществлено методом вариации произвольных постоянных.

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}.$$

Решение. Фундаментальная система решений уравнения: e^x, e^{2x}. Общее решение уравнения будем искать в виде

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}.$$

Для нахождения функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = e^{3x}, \end{cases}$$

из которой найдем $C_1'(x) = -e^{2x}$, $C_2'(x) = e^x$. Таким образом,

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = e^x + \tilde{C}_2$$

и общее решение данного уравнения

$$y = \frac{1}{2}e^{3x} + \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 e^{2x}.$$

$\square$

В некоторых случаях бывает легко подобрать частное решение по виду правой части $f(x)$ уравнения (4), используя метод неопределенных коэффициентов (метод Эйлера).

Метод неопределенных коэффициентов. Вид частного решения $\widetilde{y}$ зависит от структуры правой части уравнения, т. е. функции $f(x)$. В частности, если правая часть уравнения

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx), \tag{5}$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — полиномы степеней n, m, то решение $\widetilde{y}$ следует искать в виде

$$\widetilde{y} = x^r e^{ax}(M_s(x)\cos bx + N_s(x)\sin bx),$$

где r — кратность корня $a + ib$ характеристического уравнения (если $a \pm ib$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$), а $M_s(x)$, $N_s(x)$ — полиномы степени $s = \max\{m, n\}$. Коэффициенты полиномов $M_s(x)$, $N_s(x)$ находятся из тождества, получаемого после подстановки $\widetilde{y}$ в таком виде в уравнение.

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, оно имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Общее решение данного уравнения тогда будет иметь вид

$$y^0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Правая часть уравнения $f(x) = e^{3x}$. Для принятых в формуле (5) обозначений имеем $a = 3$, $b = 0$, $P_n(x) = 1$, $Q_m(x) = 0$, $a + bi = 3$ – не корень характеристического уравнения. Тогда частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\widetilde{y} = Ae^{3x}.$$

Подставив $\widetilde{y}$ в данное уравнение, найдем $A = 1/2$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$y = y^0 + \widetilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

□

Пример 10. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = x^2 + 2x.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$, оно имеет корни $\lambda = \pm i$. Общее решение данного уравнения тогда будет иметь вид

$$y_o = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Правая часть уравнения $f(x) = x^2 + 2x$, значения параметров $a = 0$, $b = 0$, здесь $a = 0$ – не является корнем характеристического уравнения, поэтому $r = 0$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\widetilde{y} = Ax^2 + Bx + C$, $\widetilde{y}' = 2Ax + B$, $\widetilde{y}'' = 2A$. Подставляя $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$ и $\widetilde{y}''$ в данное уравнение, получим

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x слева и справа, получим

$x^2 : A = 1,$
$x^1 : B = 2,$
$x^0 : 2A + C = 0 \Rightarrow C = -2.$

Тогда частное решение неоднородного уравнения $\widetilde{y} = x^2 + 2x - 2$, следовательно, общее решение неоднородного уравнения

$$y = y^0 + \widetilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 + 2x - 2.$$

$\square$

Пример 11. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}.$$

Решение. Составим однородное уравнение $y'' - 8y' + 16y = 0$ и соответствующее ему характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, корни которого совпадают и равны $\lambda_{1,2} = 4$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y^0 = e^{4x}(C_1 x + C_2).$$

Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = (1-x)e^{4x}$. Здесь $a = 4$, $b = 0$ и $a = 4$ является корнем характеристического уравнения кратности 2, поэтому $r = 2$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\widetilde{y} = x^2 e^{4x}(Ax + B),$$

Тогда

$$\widetilde{y}' = e^{4x}(4Ax^3 + 4Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx),$$

$$\widetilde{y}'' = e^{4x}(16Ax^3 + 16Bx^2 + 24Ax^2 + 16Bx + 6Ax + 2B).$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$16Ax^3 + 16Bx^2 + 24Ax^2 + 16Bx + 6Ax + 2B - 32Ax^3 -$$
$$-32Bx^2 - 24Ax^2 - 16Bx + 16Ax^3 + 16Bx^2 = 1 - x.$$
$$6Ax + 2B = 1 - x$$

Неизвестные коэффициенты найдем из условий:
$x^1 : 6A = -1 \Rightarrow A = -1/6,$
$x^0 : 2B = 1 \Rightarrow B = 1/2.$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$$\widetilde{y} = e^{4x}(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2),$$

следовательно, общее решение неоднородного уравнения

$$y = y^0 + \widetilde{y} = e^{4x}(C_1 x + C_2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2).$$

□

Пример 12. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Решение. Для соответствующего однородного уравнения составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

его корни комплексные и $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Поэтому общее решение однородного уравнения

$$y^0 = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = 4e^x \cos x$, здесь $a \pm ib = 1 \pm i$ является корнем характеристического уравнения, следовательно $r = 1$. Таким образом, частное решение уравнения будем искать в виде

$$\widetilde{y} = xe^x(A \cos x + B \sin x).$$

Подставляя $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ в данное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим $A = 0$, $B = 2$. Поэтому

$$\widetilde{y} = 2xe^x \sin x, \quad y = y^0 + \widetilde{y} = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x \sin x).$$

Для решения поставленной начальной задачи требуется определить значения постоянных C_1 и C_2 так, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям. Используя условие $y(0) = 0$, найдем $C_1 = 0$. Дифференцируя y, будем иметь

$$y' = e^x(C_2 \sin x + C_2 \cos x + 2 \sin x + 2x \sin x + 2x \cos x).$$

В силу условия $y'(0) = 1$, получим $C_2 = 1$.

Таким образом, частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид $y = e^x \sin x(1 + 2x)$. □

Литература

1. *Егоров А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 384 с.

2. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 472 с.