Некоторые типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка

В некоторых случаях возможно понижение порядка уравнения и сведение задачи его интегрирования к более простой.

1.1. Случай непосредственного интегрирования. Для уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

после $n-$кратного интегрирования получим его общее решение

$$y = \underbrace{\int \dots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \dots dx}_{n} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' = x - \sin x$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 1.$$

Решение. Последовательно интегрируя уравнение, будем иметь:

$$y'' = \int (x - \sin x)\, dx = \frac{x^2}{2} + \cos x + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2} + \cos x + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + \sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{6} + \sin x + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^4}{24} - \cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Последнее полученное равенство дает общее решение. Для выделения частного решения определим значения C_1, C_2 и C_3, используя начальные условия:

$$\begin{aligned}
&y''(0) = 1 && \Rightarrow \quad 1 = 0 + 1 + C_1 && \Rightarrow \quad C_1 = 0,\\
&y'(0) = 2 && \Rightarrow \quad 2 = 0 + 0 + 0 + C_2 && \Rightarrow \quad C_2 = 2,\\
&y(0) = 0 && \Rightarrow \quad 0 = 0 - 1 + 0 + 0 + C_3 && \Rightarrow \quad C_3 = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем ответ.

Ответ: $y = \frac{x^4}{24} - \cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$ – общее решение; $y = \frac{x^4}{24} - \cos x + 2x + 1$ – частное решение. □

1.2. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно. Для уравнения вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

можно понизить его порядок на k единиц, выполнив замену $y^{(k)} = p(x)$. В результате получим уравнение $(n-k)$−го порядка

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Построив его решение $p = p(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$, найдем y из уравнения $y^{(k)} = p(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$ с помощью k−кратного интегрирования.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$xy''' + y'' = 0, \quad x \neq 0.$$

Решение. Данное уравнение явно не содержит искомой функции y и ее первой производной. Выполнив в нем замену $y'' = p$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{dp}{dx} + p = 0.$$

Очевидно, $p = 0$ является его решением. Другие решения найдем, разделяя переменные

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow p = \frac{C_1}{x}.$$

Возвращаясь к замене, будем иметь:

1) $y'' = 0, \quad y' = C_1, \quad y = C_1 x + C_2.$
2) $y'' = \frac{C_1}{x}, \quad y' = C_1 \ln|x| + C_2, \quad y = C_1 x(\ln|x| - 1) + C_2 x + C_3.$
   При $C_1 = 0$ решение совпадает с найденным в первом случае.

Ответ: $y = C_1 x(\ln|x| - 1) + C_2 x + C_3.$ □

1.3. Уравнение явно не содержит независимой переменной

Для уравнения вида:

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

можно понизить порядок, выполнив замену[1] $y' = p$, где $p = p(y)$. Выразив через новые переменные производные функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

после подстановки полученных выражений в уравнение вместо $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$yy'' = (y')^2.$$

Решение. Это уравнение явно не содержит x. Преобразуем его, выполнив замену $y' = p$, где $p = p(y)$. Так как $y'' = p\frac{dp}{dy}$, то получим уравнение

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2$$

или

$$p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0.$$

1) Если $p \neq 0$, то

$$y\frac{dp}{dy} = p.$$

Если $y \neq 0$, то

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow p = C_1 y \quad \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Если $y = 0$, то это решение входит в общее решение при $C_2 = 0$.
2) Если $p = 0$, то решение – $y = C$. Оно входит в общее решение при $C_1 = 0$.

Таким образом, общее решение уравнения: $y = C_2 e^{C_1 x}$. □

[1] Идея понижения порядка уравнения введением параметра p принадлежит Я. Бернулли. Его работа не была опубликована своевременно и этот же прием для уравнения $F(y, y', y'') = 0$ открыл и первым опубликовал Джакопо Риккати (1712) (*Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.*).