Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Будем рассматривать **уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной**:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

где F – заданная функция своих аргументов. Обозначим y' через p, тогда уравнение (1) примет вид:

$$F(x, y, p) = 0. \tag{2}$$

Предположим, что удалось найти все корни уравнения (2) относительно p (их может быть и бесконечно много). Тогда уравнение (1) будет эквивалентно нескольким (по числу найденных корней) уравнениям вида

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Решая эти, уже разрешенные относительно производной, уравнения, применяя рассмотренные ранее методы, можно будет найти решения уравнения (1).

Задача Коши для уравнения (1) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ имеет единственное решение, если не существует двух интегральных кривых уравнения (1), которые проходили бы через точку (x_0, y_0) и имели бы в этой точке общую касательную.

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) определяет следующая теорема[1]

Теорема 1. *Пусть в некоторой области, содержащей точку* (x_0, y_0, p_0), *функция* $F(x, y, p)$ *непрерывна по совокупности переменных* x, y *и* p *вместе с частными производными* $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial p}$, *причем* $F(x_0, y_0, p_0) = 0$, *а*

$$\frac{\partial F}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) \neq 0. \tag{4}$$

Тогда на некотором промежутке $|x - x_0| \leqslant \delta$ *существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = y_0$, *производная которого* $y'(x_0) = p_0$.

[1] *Васильева А. Б. и др. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 432 с.*

Пример 1. Решить уравнение $y'^2 - (y + x^2)y' - x^2 y = 0$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, разложив ее на множители. Будем иметь

$$(y' - y)(y' - x^2) = 0.$$

Уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений

$$y' - y = 0 \quad \text{и} \quad y' - x^2 = 0.$$

Интегрируя их, получаем решения

$$y = Ce^x \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{3}x^3 + C. \tag{$*$}$$

Каждая из найденных функций является решением заданного уравнения. Однако возможны еще и так называемые составные решения, которые получаются "склейкой" найденных функций в тех точках, где совпадают значения функций и их производных. Очевидно, прямая $y = 0$ является касательной к кривой $y = \frac{1}{3}x^3$ в точке $(0, 0)$. А это значит, что существует следующее составное решение

$$y = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{1}{3}x^3, & x > 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция

$$y = \begin{cases} e^{x-1}, & x \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}, & x > 1. \end{cases}$$

также является составным решением.

Приведите пример еще какого-нибудь составного решения.

$\square$

Если уравнение $F(x, y, p) = 0$ невозможно эффективно разрешить относительно p (или даже когда это и возможно, но соответствующие формулы очень громоздки), то в этом случае можно искать решение в параметрической форме.

Рассмотрим некоторые частные случаи, иллюстрирующие решение уравнения (1) *методом введения параметра*.

1) Пусть $F = F(y, y')$ и уравнение разрешимо относительно y, т. е. исходное уравнение приведено к виду $y = f(y')$. Возьмем в качестве параметра $p = y'$ (или $p = \frac{dy}{dx}$). Выполнив в уравнении замену, получим
$$y = f(p).$$
Возьмем полный дифференциал от обеих частей равенства. В результате получим
$$dy = f'(p)\,dp.$$
Тогда так как $dx = \frac{dy}{p}$, то будем иметь
$$dx = \frac{f'(p)\,dp}{p} \Longrightarrow x = \int \frac{f'(p)\,dp}{p} + C.$$
Следовательно, получили решение уравнения в параметрической форме:
$$x = \int \frac{f'(p)dp}{p} + C, \quad y = f(p).$$

2) Пусть $F = F(x, y')$ и уравнение разрешимо относительно x, т. е. исходное уравнение приведено к виду $x = \varphi(y')$. Возьмем в качестве параметра $p = y'$. Сделав в уравнении замену, получим
$$x = \varphi(p) \Longrightarrow dx = \varphi'(p)\,dp.$$
И так как $dy = pdx$, то
$$dy = p\varphi'(p)\,dp \Longrightarrow y = \int p\varphi'(p)\,dp + C.$$
Тогда решение в параметрической форме имеет вид
$$x = \varphi(p), \quad y = \int p\varphi'(p)\,dp + C.$$

3) Рассмотрим **уравнение Лагранжа**
$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$
Оно может быть проинтегрировано путем введения параметра $p = y'$. Действительно,
$$y = \varphi(p)x + \psi(p), \quad dy = \varphi'(p)x\,dp + \varphi(p)\,dx + \psi'(p)\,dp$$

Но $dy = p\,dx$, и, следовательно,

$$p\,dx = \varphi'(p)x\,dp + \varphi(p)\,dx + \psi'(p)\,dp$$

или

$$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = \varphi'(p)x + \psi'(p).$$

В результате получили линейное уравнение относительно x и $\frac{dx}{dp}$, которое несложно проинтегрировать методом вариации произвольной постоянной. Интеграл этого уравнения $\Phi(x, p, C) = 0$ совместно с уравнением

$$y = \varphi(p)x + \psi(p)$$

определяет интегральные кривые исходного уравнения.

4) Если в уравнении Лагранжа $\varphi(y') \equiv y'$, то получим **уравнение Клеро**. Полагая $y' = p$, будем иметь

$$y = px + \psi(p).$$

Дифференцируя его, получим

$$(x + \psi'(p))\,dp = 0,$$

откуда

$$1) \quad x + \psi'(p) = 0 \quad \text{или} \quad 2) \quad dp = 0 \Rightarrow p = C.$$

Первый случай дает параметрически заданную кривую

$$x = -\psi'(p) \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p).$$

Второй случай дает семейство решений:

$$y = Cx + \psi(C).$$

Пример 2. Решить уравнение $(y')^3 - y' - 1 - x = 0$.

Решение. Левая часть уравнения явно не содержит y. Разрешив уравнение относительно x и введя параметр $p = y'$, получим

$$x = p^3 - p - 1 \Longrightarrow dx = (3p^2 - 1)\,dp.$$

Так как $dy = p\,dx$, то будем иметь

$$dy = p(3p^2 - 1)\,dp \Longrightarrow y = \int p(3p^2 - 1)\,dp = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + C.$$

Получили решение уравнения в параметрической форме:

$$x = p^3 - p - 1, \quad y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + C.$$

□

Пример 3. Решить уравнение $y = \sqrt{1 + y'^2}$.

Решение. Уравнение явно не содержит x. Полагая $p = y'$, получим

$$y = \sqrt{1 + p^2} \Longrightarrow dy = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\,dp.$$

Так как $dy = pdx$, то будем иметь

$$pdx = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}dp. \qquad (*)$$

Очевидно, $p = 0$ является решением уравнения $(*)$ и ему соответствует решение $y = 1$ заданного уравнения. Для $p \neq 0$, интегрирование уравнения $(*)$ (после деления его на p) дает

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \ln|p + \sqrt{1 + p^2}| + C.$$

Тогда решение заданного уравнения можно записать в параметрической форме:

$$x = \ln|p + \sqrt{1 + p^2}| + C, \quad y = \sqrt{1 + p^2}.$$

Таким образом, с учетом решения $y = 1$ получаем ответ.
Ответ: $y = 1; \quad x = \ln|p + \sqrt{1 + p^2}| + C, \;\; y = \sqrt{1 + p^2}.$ □

Пример 4. Решить уравнение $y = xy'^2 + y'^2, \quad x \neq -1$.

Решение. Это уравнение Лагранжа. После замены $y' = p$, уравнение примет вид

$$y = xp^2 + p^2. \qquad (*)$$

Возьмем полный дифференциал от обеих частей равенства. Учитывая, что $dy = pdx$, получим

$$p\,dx = p^2\,dx + 2xpdp + 2pdp,$$

откуда

$$-p(p-1)\,dx = 2p(x+1)\,dp.$$

1) Если $p \neq 0$, $p \neq 1$, то, разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x+1} = -2\frac{dp}{p-1}.$$

Интегрируя уравнение, будем иметь

$$x+1 = \frac{C^2}{(p-1)^2}.$$

Поэтому

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}, \qquad y = xp^2 + p^2.$$

Исключая параметр p из этих уравнений, получим общее решение заданного уравнения

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2, \quad x > -1.$$

2) Если $p = 0$, то из $(*)$ получаем $y = 0$. Это решение не получается из общего ни при каком значении C, т. е. оно является особым решением.

3) Если $p = 1$, то из $(*)$ получаем $y = x + 1$. Это решение входит в общее решение при $C = 0$, т. е. оно является частным решением заданного уравнения.

Таким образом, решениями уравнения являются

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2 \quad \text{и} \quad y = 0.$$

□

Пример 5. Решить уравнение $y = xy' + y' - y'^2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Клеро. Введем параметр $p = y'$, тогда

$$y = xp + p - p^2. \tag{$**$}$$

Дифференцируя его по x, получим

$$p = p + xp' + p' - 2pp'$$

или

$$(x + 1 - 2p)p' = 0, \qquad (x + 1 - 2p)dp = 0.$$

1) Если $x + 1 - 2p = 0$, то решение уравнения в параметрической форме

$$x = 2p - 1, \quad y = p^2.$$

А если исключить параметр p из уравнений, то $y = \frac{1}{4}(x + 1)^2$.
2) Если $dp = 0$, то $p = C$ и тогда, подставляя это значение в $(**)$, получим решение

$$y = C(x + 1 - C).$$

Таким образом, построили решения

$$y = \frac{1}{4}(x + 1)^2 \quad \text{и} \quad y = C(x + 1 - C).$$

$\square$

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) называется **особым решением**, если через каждую его точку кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, отличное от него в любой окрестности этой точки. Другими словами, особое решение уравнения (1) – это такое решение, в точках которого нарушается условие (4).

Интегральная кривая, соответствующая особому решению, называется **особой интегральной кривой** уравнения (1).

Рассмотрим два метода поиска особых решений. В основе первого – следующая теорема[2]. .

Теорема 2. *Если $y = \varphi(x)$ – особое решение уравнения (1), то оно удовлетворяет уравнениям*

$$F(x, y, p) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) = 0. \tag{5}$$

[2] *Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. Учеб. пособие. М., 1980.*

Вообще говоря, уравнения (5) определяют одну или несколько кривых, которые называются $p-$**дискриминантными кривыми** уравнения (1). Каждое особое решение уравнения (1) является дискриминантной кривой этого уравнения. Однако обратное утверждение неверно: не всякая дискриминантная кривая является особым решением. Для нахождения особых решений нужно найти все дискриминантные кривые уравнения (1), исключив из системы (5) параметр p, и для каждой кривой проверить:

1) является ли она решением уравнения (1);

2) касаются ли ее в каждой точке другие решения.

Рассматриваемая кривая будет особым решением, если получены положительные ответы на оба вопроса.

Кривые $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ касаются в точке с абсциссой x_0, если выполнены условия (*условия касания*)

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \tag{6}$$

Если семейство решений записано в параметрическом виде, то выполнение условий касания проверяется аналогично. При этом надо учесть, что $y' = p$.

Пример 6. Найти особые решения уравнение $y = xy' + y' - y'^2$.

Решение. Для заданного уравнения имеем

$$F(x, y, p) = (x + 1)p - p^2 - y.$$

Составим систему уравнений вида (5):

$$\begin{cases} (x + 1)p - p^2 - y = 0, \\ x + 1 - 2p = 0, \end{cases}$$

исключая из которой параметр p, найдем дискриминантную кривую

$$y = \frac{1}{4}(x + 1)^2. \tag{$*$}$$

Непосредственной подстановкой в заданное уравнение можно установить, что она является его решением. Проверьте это самостоятельно.

Теперь выясним, является ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения. В примере 5 было построено общее решение

$$y = C(x + 1 - C). \tag{$**$}$$

Проверим, выполняются ли условия касания (6). Для решений $(*)$ и $(**)$ они принимают вид

$$\frac{1}{4}(x_0+1)^2 = C(x_0+1-C), \quad \frac{x_0+1}{2} = C.$$

Исключая из первого уравнения C, получим равенство

$$\frac{1}{4}(x_0+1)^2 = \frac{1}{4}(x_0+1)^2,$$

справедливое для всех x_0. Значит, при каждом x_0 решение $(*)$ в точке с абсциссой x_0 касается одной из кривых семейства $(**)$, а именно той кривой, для которой $C = \frac{x_0+1}{2}$.

Таким образом, в каждой точке решение $(*)$ касается другого решения $(**)$, не совпадающего с ним. Значит, решение $(*)$ – особое.

$\square$

Второй метод поиска особого решения связан с понятием огибающей. Пусть уравнение

$$f(x, y, t) = 0, \tag{7}$$

где t – параметр, определяет однопараметрического семейство кривых на плоскости (x, y).

Гладкая кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (где φ', ψ' – непрерывны и $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$ при $t_1 < t < t_2$) называется **огибающей** однопараметрического семейства кривых (7), если в каждой своей точке $(\varphi(t), \psi(t))$ она касается кривой семейства, соответствующей значению параметра t, и отлична от нее в любой окрестности этой точки (рис. 1).

По причине нарушения условия (4) в точках графика особого решения имеет место касание этого графика с кривыми семейства, изображенное на рис. 1. Особое решение является, таким образом, огибающей семейства интегральных кривых. Имеет место и обратное утверждение: огибающая семейства интегральных кривых является особым решением.

Поэтому если известно уравнение

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

семейства интегральных кривых, то особое решение можно находить по **правилу построения огибающей**: найти кривую $y = Y_c(x)$ (которую называют $C-$**дискриминантной кривой**) исключением C из

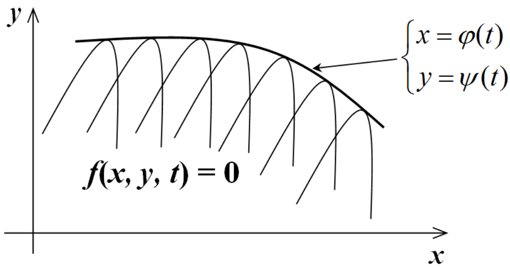

Рис. 1. Огибающая семейства кривых

уравнений[3]

$$\Phi(x,y,C)=0, \qquad \frac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial C}=0. \tag{8}$$

Кривая $y=Y_c(x)$ заведомо является огибающей, т. е. особым решением, если в ее точках выполнено условие

$$\Phi_x^2+\Phi_y^2\neq 0. \tag{9}$$

В общем случае, чтобы узнать, является ли дискриминантная кривая огибающей, следует выяснить, касаются ли ее в каждой точке кривые семейства $\Phi(x,y,C)=0$.

Пример 7. Каждая из функций семейства $y=C(x+1-C)$ является решением уравнения $y=xy'+y'-y'^2$. Найти его особые решения.

Решение. Для заданного семейства кривых имеем $\Phi(x,y,C) = C(x+1-C)-y$. Запишем систему уравнений для определения C-дискриминантной кривой вида (8):

$$C(x+1-C)-y=0, \quad x+1-2C=0.$$

Исключив C, получим дискриминантную кривую

$$y=\frac{1}{4}(x+1)^2. \tag{$*$}$$

[3]Метод нахождения особого решения – исключением C из указанных уравнений открыл Лагранж (1774). И тем самым он установил связь метода с теорией огибающих семейства кривых *(Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.)*

Она является решением заданного дифференциального уравнения. Так как функция $\Phi(x, y, C)$ непрерывно дифференцируема по x и по y и ее частная производная $\frac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial y} = -1 \neq 0$, то выполнено условие (9), и кривая $(*)$ является огибающей семейства кривых $y = C(x+1-C)$ (рис. 2), а значит, особым решением дифференциального уравнения. $\square$

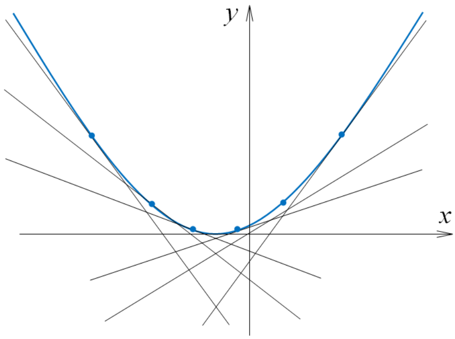

Рис. 2. Огибающая и семейство кривых в примере 7