Методы интегрирования уравнений первого порядка

1. Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \tag{1}$$

Пусть P, Q — непрерывно дифференцируемые функции в области D изменения переменных x, y.

Уравнение (1) называется **уравнением в полных дифференциалах**[1]**.**, если в области D левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой дифференцируемой функции $U(x,y)$:

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = P\,dx + Q\,dy.$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде $d\,U(x,y) = 0$. А такое уравнение легко интегрируется: $U(x,y) = C$.

Отличные от констант функции, постоянные на решениях дифференциальных уравнений, называются **первыми интегралами**. В этом смысле функция $U(x,y)$ является первым интегралом уравнения $P\,dx + Q\,dy = 0$. В приложениях первые интегралы отражают определенные законы сохранения, например, закон сохранения энергии, импульса и т. д.

Для существования функции U, такой, что $dU = P\,dx + Q\,dy$, необходимо, чтобы имело место равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall\,(x,y) \in D. \tag{2}$$

Область D называется **односвязной**, если любую замкнутую кривую в D можно непрерывно стянуть в точку, оставаясь всё время в области D. Примерами односвязных областей являются квадрат, круг, а неодносвязной области – кольцо.

Если D односвязна, то условие (2) не только необходимо, но и достаточно для существования функции U.

---

[1] Уравнения в полных дифференциалах полностью исследованы Л. Эйлером и А. К. Клеро. Клеро дал определение *полного дифференциала* и ввел этот термин. Эйлер опубликовал условие, при котором выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом (1740) *(Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.)*

Пусть область $D = (a,b)\times(c,d)$ и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Чтобы найти $U(x,y)$, воспользуемся равенствами

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Интегрируя первое равенство по x, определим $U(x,y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой функции $\varphi(y)$:

$$U(x,y) = \int P\,dx = \Phi(x,y) + \varphi(y).$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{d\varphi(y)}{dy} = Q, \text{ т. е. } \frac{d\varphi(y)}{dy} = Q - \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Из последнего дифференциального уравнения найдем $\varphi(y)$, а значит и $U(x,y) = \Phi(x,y) + \varphi(y)$. Следовательно, решение уравнения в полных дифференциалах запишется в виде

$$\Phi(x,y) + \varphi(y) = C.$$

Если заданы начальные данные $y(x_0) = y_0$, то $C = U(x_0, y_0)$.

Пример 1. Решить уравнение $(2xy + 3y^2)\,dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)\,dy = 0$.

Решение. В данном случае

$$P(x,y) = 2xy + 3y^2, \quad Q(x,y) = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

Так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Для искомой функции $U(x,y)$ имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) = 2xy + 3y^2, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

Интегрируя первое равенство по x, получим

$$U = \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx = x^2 y + 3xy^2 + \varphi(y).$$

Для определения $\varphi(y)$ полученное выражение для $U(x, y)$ продифференцируем по y и затем приравняем Q:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy + \frac{d\varphi(y)}{dy} = Q = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

откуда находим, что

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = -3y^2 \Longrightarrow \varphi(y) = -\int 3y^2 dy = -y^3 + C_1.$$

Итак, левая часть заданного уравнения является полным дифференциалом функции (можно полагать $C_1 = 0$)

$$U(x, y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3.$$

И, следовательно, получаем решение уравнения в виде

$$x^2 y + 3xy^2 - y^3 = C$$

где C — произвольная постоянная. □

Пример 2. Источник света расположен на оптической оси зеркала прожектора. Какова должна быть форма зеркала, чтобы отраженные лучи были параллельны оптической оси?

Решение. Выберем систему координат так, чтобы её начало совпало с источником света, а ось Ox — с оптической осью (рис. 3). Рассмотрим кривую $y = y(x)$, получающуюся в сечении поверхности зеркала плоскостью Oxy. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит этой кривой.

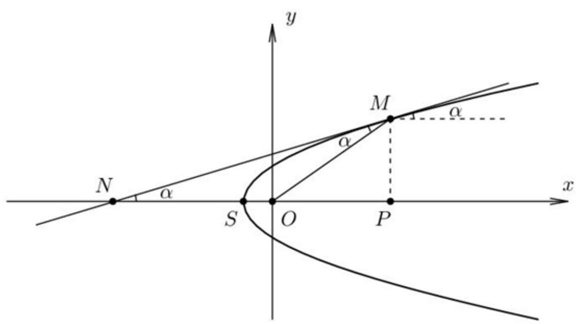

Рис. 3. Рисунок к примеру 2

Угол, образуемый касательной к кривой в точке M с осью Ox, обозначим через α.

Так как угол падения равен углу отражения, то $\angle OMN = \alpha$ и треугольник OMN — равнобедренный: $OM = ON = \sqrt{x^2+y^2}$. Учитывая геометрический смысл производной, получим

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{NP} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\,.$$

Умножив числитель и знаменатель правой части на $\sqrt{x^2+y^2}-x$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\,.$$

Это однородное уравнение, которое можно решить стандартной заменой $y = zx$ с новой искомой функцией $z(x)$. Решите уравнение этим способом самостоятельно.

Рассмотрим более простой способ решения. Для этого перепишем уравнение в форме

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+y^2(x)} = 1.$$

Интегрируя полученное уравнение, будем иметь

$$\sqrt{x^2+y^2}-x = C \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = 2C(x+C/2).$$

Последнее равенство показывает, что искомая кривая является параболой с осью симметрии Ox.

Если обозначить расстояние от источника света O до центра зеркала S через a, то получим начальное условие $y(-a) = 0$. Тогда $C = 2a$, $y^2 = 4a(x+a)$. Параметр этой параболы $p = 2a$ и, следовательно, фокусное расстояние $p/2 = a$, т. е. источник света O находится в фокусе параболы. Поверхность зеркала образована вращением данной параболы вокруг оси Ox, т. е. является параболоидом вращения. Его уравнение имеет вид $y^2 + z^2 = 4a(x+a)$.

Таким образом, чтобы лучи света после отражения от поверхности зеркала прожектора были параллельны его оптической оси, необходимо, чтобы зеркало имело форму параболоида вращения и источник света находился в фокусе.

Замечание. Задачу можно было бы сформулировать следующим образом: какова должна быть форма приемной антенны спутниковой связи (спутникового телевидения), чтобы можно было фокусировать сигнал в одной точке? В этом случае полученный при решении уравнения ответ интерпретируется следующим образом – для получения сфокусированного сигнала в одной точке используются параболические антенны.

□

2. Интегрирующий множитель

Иногда уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, однако сравнительно легко можно подобрать такой множитель $\mu(x, y) \not\equiv 0$, что

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = dU.$$

Функция $\mu(x, y)$ называется **интегрирующим множителем**[2]**.**. Число таких интегрирующих множителей уравнения бесконечно, потому что, если $\mu(x, y)$ – интегрирующий множитель, то выражение $\mu(x, y)F(U)$, где F — произвольная дифференцируемая функция U также является интегрирующим множителем.

Применяя необходимые условия (2), получим, что интегрирующий множитель должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

или

$$P\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y} - Q\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{3}$$

Последнее уравнение является уравнением в частных производных и его решение может оказаться непростой задачей. Некоторые приемы решения таких уравнений будут рассмотрены во второй части пособия.

В некоторых случаях удается подобрать интегрирующий множитель, как функцию с аргументом определенного типа [3].

[2]Интегрирующий множитель в отдельных случаях применил И. Бернулли (1691). Эйлер установил классы дифференциальных уравнений, обладающих интегрирующим множителем *(Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.)*

[3]Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 384 с.

Выясним, при каком условии интегрирующий множитель является функцией только x. Если уравнение (3) имеет решение $\mu = \mu(x)$, то из (3) будем иметь

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Следовательно, правая часть этого равенства является функцией только x. Если же равенство (4) рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции $\mu = \mu(x)$, то можно сформулировать и обратное утверждение. Если правая часть равенства (4) зависит только от x, то уравнение (3) имеет решение, зависящее только от x.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: *Для того чтобы уравнение*

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

имело интегрирующий множитель, зависящий только от x, необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

было константой или функцией только x.

Аналогично можно построить необходимое и достаточное условие существования интегрирующего множителя, зависящего только от y: *выражение*

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

должно быть константой или функцией только y.

Пример 3. Решить уравнение $(x^2 + y^2 + x)dx + y\, dy = 0$.

Решение. Здесь $P(x, y) = x^2 + y^2 + x$ и $Q(x, y) = y$. И так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

то уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Но так как

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2,$$

можно найти интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$, решив уравнение

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \mu(x) = C_1 e^{2x}.$$

Пусть $C_1 = 1$. Умножив заданное уравнение на $\mu(x) = e^{2x}$, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\,dx + e^{2x}y\,dy = 0.$$

Покажите, что это уравнение действительно является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем функцию $U(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{2x}(x^2 + y^2 + x) \;\Rightarrow\; U(x, y) = \int e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\,dx + \varphi(y).$$

Вычислив интеграл, получим

$$U(x, y) = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 + y^2) + \varphi(y).$$

Найдем $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{2x}y + \varphi'(y) = Q(x, y) = e^{2x}y \;\Rightarrow\; \varphi'(y) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(y) = C_1.$$

Таким образом, полагая $C_1 = 0$, получим

$$U(x, y) = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 + y^2),$$

и, следовательно, решение заданного уравнения

$$\frac{1}{2}e^{2x}(x^2 + y^2) = C \quad \text{или} \quad e^{2x}(x^2 + y^2) = C.$$

Ответ: $e^{2x}(x^2 + y^2) = C.$ $\square$