Методы интегрирования уравнений первого порядка

Линейные уравнения

Уравнение
$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1}$$
называется **линейным.** Коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ предполагаются непрерывными на интервале $I = (a, b)$. Уравнение рассматривается в области $D = I \times \mathbb{R}$, здесь
$$f(x, y) = -a(x)y + b(x).$$

Если $b(x) = 0$, то линейное уравнение называется **однородным**, в противном случае (т. е. если $b(x) \neq 0$) – **неоднородным**.

Общее решение $y(x)$ **неоднородного линейного дифференциального уравнения** имеет следующую структуру
$$y(x) = y^0(x) + \widetilde{y}(x),$$
где $y^0(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\widetilde{y}(x)$ – какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. Это следует из свойства: разность любых двух решений неоднородного уравнения (1) является решением однородного уравнения.

Рассмотрим следующие методы решения неоднородных линейных уравнений первого порядка.

I. Метод вариации произвольной постоянной[1]**. (метод Лагранжа).** Рассмотрим сначала однородное уравнение
$$y' + a(x)y = 0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:
$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,dx + C_2,$$
$$\ln|y| = -\int a(x)\,dx + C_1, \quad |y| = e^{C_1} \cdot e^{-\int a(x)dx}.$$

Таким образом,
$$y = Ce^{-\int a(x)dx}, \quad C \neq 0.$$

[1] Метод вариации произвольных постоянных разработан Л. Эйлером (1739) и Ж. Л. Лагранжем (1775) (*Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.*)

При делении на y могли потерять решение $y = 0$. Легко убедиться, что $y = 0$ решение. Но его можно получить, если положить $C = 0$. Следовательно, формула

$$y = Ce^{-\int a(x)dx} \quad \forall\, C,$$

описывает все решения, а, значит, определяет общее решение линейного однородного уравнения.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения ($b(x) \not\equiv 0$) в виде

$$y = C(x)\, e^{-\int a(x)dx}.$$

Найдем y':

$$y'(x) = C'(x)\, e^{-\int a(x)dx} + C(x)\, e^{-\int a(x)dx}\,(-a(x)).$$

Подставим y и y' в исходное неоднородное уравнение. Тогда

$$\frac{dC}{dx} = b(x)\, e^{\int a(x)dx}, \quad C(x) = C_1 + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx}\, dx.$$

Необходимо найти одно частное решение (любое). Поэтому можно положить $C_1 = 0$. Добавляя к полученному частному решению общее решение однородного уравнения, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[C + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx}\, dx\right].$$

Произвольная константа C определяется однозначно начальными условиями $y(x_0) = y_0$ $(x_0 \in I)$.

Пример 1. Решить уравнение $y' = 2xy + 3x^2 - 2x^4$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y' = 2xy$. Тогда

$$\frac{dy}{y} = 2xdx, \quad \ln|y| = \int 2x\, dx + C_1, \quad y = Ce^{x^2},\ C \neq 0.$$

Решение $y = 0$ получается из последней формулы при $C = 0$, поэтому $y = Ce^{x^2}$, – общее решение однородного уравнения.

Решение исходного уравнения ищем в виде $y = C(x)e^{x^2}$:

$$C'(x)e^{x^2} + 2xe^{x^2}C(x) - 2xC(x)e^{x^2} = 3x^2 - 2x^4,$$

$$C'(x) = e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4),$$

$$C(x) = \int e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4)\, dx = x^3e^{-x^2} + C.$$

Окончательно, $y(x) = (C + x^3 e^{-x^2})e^{x^2} = Ce^{x^2} + x^3$. $\square$

II. Метод Бернулли Решение неоднородного уравнения (1) ищем в виде[2]

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Найдем $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Подставим $y(x)$ и $y'(x)$ в уравнение (1). Тогда

$$\frac{du}{dx}\, v + u\,\frac{dv}{dx} + a(x)uv = b(x),$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие множитель v

$$\Big(\frac{du}{dx} + a(x)u\Big)v + u\,\frac{dv}{dx} = b(x).$$

Выберем в качестве функции $u(x)$ одно из решений однородного уравнения $u' + a(x)u = 0$, например,

$$u(x) = e^{-\int a(x)dx}.$$

Подставив $u(x)$ в левую часть последнего уравнения, получим:

$$e^{-\int a(x)dx}\,\frac{dv}{dx} = b(x) \Longrightarrow v(x) = C + \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx.$$

После подстановки выражений для $u(x)$, $v(x)$ в $y(x) = u(x)v(x)$ получаем решение того же вида, что и методом Лагранжа.

Пример 2. Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.

Решение. Воспользуемся методом Бернулли. Будем искать решение в виде $y(x) = u(x)v(x)$. После подстановки в уравнение получим:

$$x\,\frac{du}{dx} + xu\,\frac{dv}{dx} - 2uv = 2x^4,$$
$$x\,\frac{du}{dx}\,v + u\left(x\,\frac{dv}{dx} - 2v\right) = 2x^4.$$

[2] Метод решения линейных уравнений заменой $y = uv$ изобрел Якоб Бернулли (1695) (*Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.*).

Приравняем выражение в скобках к нулю:

$$x\frac{dv}{dx} - 2v = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x},$$
$$\ln|v| = 2\ln|x| + C_1, \quad v = e^{C_1}x^2.$$

Выберем $C_1 = 0$. Тогда $v = x^2$. Теперь найдём $u(x)$:

$$x\,\frac{du}{dx}\,v = 2x^4 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 2x,\ u = x^2 + C.$$

Окончательно: $y(x) = u(x)v(x) = Cx^2 + x^4$. $\square$

Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное. Например, уравнение $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$, в котором y является функцией x, – нелинейное. Записав его в дифференциалах

$$y\,dx - (3x - y^2)\,dy = 0, \qquad (*)$$

можно заметить, что в это уравнение x и dx входят линейно. А значит, уравнение будет линейным, если считать x искомой функцией, а y – независимым переменным.

Покажите, что уравнение $(*)$ имеет следующее множество решений $y = 0,\ \ x = Cy^3 + y^2$.

Иногда нелинейное уравнение можно свести к линейному с помощью замены переменных. Рассмотрим **уравнение Бернулли**

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^n, \quad (n \neq 0, 1). \qquad (2)$$

При поиске ненулевого решения уравнения (2), разделим обе его части на y^n. В результате получим

$$\frac{1}{y^n}\,\frac{dy}{dx} + a(x)y^{1-n} = b(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{1-n}\frac{d(y^{1-n})}{dx} = b(x) - a(x)y^{1-n}.$$

Выполнив замену $z = y^{1-n}$, получим линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\big(b(x) - a(x)\big).$$

Пример 3. Решить уравнение $y' = y^4\cos x + y\ \mathrm{tg}\,x$.

Решение. Уравнение Бернулли с $n = 4$. Очевидно, $y = 0$ является решением. Остальные решения найдем, выполнив замену $z = y^{-3}$. В результате получим линейное уравнение

$$z' = -3z \operatorname{tg} x - 3 \cos x.$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z' = -3z \operatorname{tg} x, \quad \tfrac{dz}{z} = -3 \operatorname{tg} x \, dx,$$

$$\ln |z| = 3 \ln |\cos x| + C_1, \quad z = C \cos^3 x.$$

Решение неоднородного уравнения найдем методом вариации. Будем искать решение в виде $z = C(x) \cos^3 x$. Выполнив его подстановку в неоднородное уравнение, будем иметь

$$C'(x) \cos^3 x - 3C(x) \cos^2 x \sin x = -3C(x) \cos^3 x \operatorname{tg} x - 3 \cos x,$$

$$C'(x) \cos^3 x = -3 \cos x, \quad C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x}, \quad C(x) = -3 \operatorname{tg} x + C_1.$$

Следовательно, получили

$$z = (-3 \operatorname{tg} x + C_1) \cos^3 x = -3 \sin x \cos^2 x + C_1 \cos^3 x.$$

Возвращаясь к замене, учитывая наличие решения $y = 0$, получим ответ.

Ответ: $y = 0$; $y = (C \cos x - 3 \sin x) \cos^2 x$. □