Методы интегрирования уравнений первого порядка

Однородные уравнения

Уравнение может не принадлежать классу с разделяющимися переменными, однако, становится таковым после удачно подобранной замены переменных.

Рассмотрим так называемое **однородное** уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{1}$$

Уравнение называется однородным, так как оно не меняется при замене x на tx, y на ty (t — не равная нулю константа). Положим $y = zx$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция[1]. Тогда $y' = xz' + z$ и поэтому

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}\,.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}\,, \quad \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C_1, \quad x = C\exp\Big\{\int\limits_{z_0}^{y/x} \frac{dz}{f(z) - z}\Big\}.$$

Здесь $C \neq 0$ — произвольная постоянная, а z_0 – произвольная фиксированная постоянная[2], такая, что $f(z_0) \neq z_0$. Кроме того, если z^* — корень уравнения $f(z) = z$, то $y = z^* x$ также будет решением однородного уравнения.

Известно, что функция $F(x, y)$ называется **однородной степени** s, если для любого t справедливо равенство

$$F(tx, ty) = t^s F(x, y).$$

Правая часть однородного уравнения (1) является однородной функцией переменных x и y нулевой степени. Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

[1]Метод решения однородных уравнений подстановкой $y = zx$ открыл И. Бернулли (1695), хотя эта подстановка была известна и Г. Лейбницу. Однако опубликовал этот метод впервые профессор в Болонье Г. Манфреди (1714) *(Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.)*

[2]Здесь интеграл следует записывать с переменным верхним пределом для того, чтобы далее можно было корректно выполнить обратную замену. При решении конкретных уравнений такую запись не имеет смысла использовать, так как обратная замена выполняется после вычисления интеграла.

будет однородным, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями переменных x и y одной и той же степени.

Покажите, что уравнение (2) не изменяется при замене x на tx, y на ty (t — не равная нулю константа).

Пример 1. Решить уравнение

$$y^2 + x^2 y' = xyy'.$$

Решение. Переписав уравнение в виде

$$y^2 dx + x(x-y)dy = 0,$$

можно заметить, что функции $M(x,y) = y^2$ и $N(x,y) = x(x-y)$ являются однородными одной и той же степени $s = 2$. Выполним замену $y = xu$, $dy = xdu + udx$, при этом уравнение примет вид

$$(u-1)xdu - udx = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{u-1}{u}du = \frac{dx}{x}, \qquad u - \ln|u| = \ln|x| - C_1, \qquad ux = Ce^u, \;\; C \neq 0.$$

А, выполнив обратную замену, будем иметь

$$y = Ce^{\frac{y}{x}}, \quad C \neq 0.$$

Проверим не потеряно ли решение $u = 0$, т. е. $y = 0$. Очевидно, оно будет входить в семейство решений, если положить $C = 0$.

Ответ: $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. □

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{3}$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – постоянные, преобразуется к однородному уравнению вида (1), если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, или к уравнению с разделяющимися переменными, если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. В первом случае следует сделать замену переменных $u = x - a$, $v = y - b$ (u - новая независимая переменная, v - новая функция), где a и b определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_1a + b_1b + c_1 = 0, \\ a_2a + b_2b + c_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение в новых переменных u, v будет однородным. Покажите это самостоятельно.

Во втором случае имеем

$$a_1 = ka_2, \qquad b_1 = kb_2,$$

где k – постоянная. Тогда заменой

$$u = a_2x + b_2y$$

уравнение (3) сведется к виду

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right),$$

где переменные сразу разделяются. Проверьте это самостоятельно.

Пример 2. Решить уравнение $(4x + 2y + 3)dx - (2x + y + 1)dy = 0$.

Решение. Здесь функции $M(x, y) = 4x + 2y + 3$, $N(x, y) = 2x + y + 1$ – однородные одного порядка $s = 1$. Определитель

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

поэтому, выполнив замену $u = 2x + y$, получим

$$(4u + 5)dx = (u + 1)du.$$

Далее, разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{u + 1}{4u + 5}\, du = dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{u + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{4u + 5}\, du = dx,$$

$$\frac{1}{4}\, du - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4u + 5}\, du = dx.$$

Интегрируя уравнение, получим

$$\frac{1}{4}u - \frac{1}{16}\ln|4u + 5| = x + C_1, \qquad 4u + 5 = Ce^{4u - 16x}, \quad C \neq 0.$$

При разделении переменных не будет потеряно решение $u = -5/4$, если рассматривать семейство решений и при $C = 0$. Возвращаясь к замене, получим ответ.

Ответ: $8x + 4y - 5 = Ce^{-8x+4y}$. □