Методы интегрирования уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

К этому типу относятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y), \tag{1}$$

где правая часть представляет собой произведение функции, зависящей от переменной x, на функцию, зависящую от y.

Будем предполагать, что функции $f(x)$, $g(y)$ непрерывны на интервалах (a, b) и (c, d) соответственно.

Во всех точках промежутка (c, d), для которых $g(y) \neq 0$, уравнение (1), разделяя переменные, приведем к виду

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)dx}{g(y(x))} = f(x)\,dx.$$

Интегрируя обе части уравнения, получим

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)\,dx = C.$$

Последнее выражение задает общий интеграл ДУ (1). Его можно представить в виде

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} - \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx = C.$$

вводя интегралы с переменными верхними пределами. Такое представление будет полезным в том случае, когда требуется находить решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям вида $y(x_0) = y_0$.

Если же существуют такие y_i, для которых $g(y_i) = 0$, то $y \equiv y_i$ также являются решениями уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение $y' = 1 + y^2$. Найти частное решение с начальными данными $y(0) = 1$.

Решение. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Longleftrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dx.$$

Интегрируя полученное уравнение будем иметь:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx + C_1,$$

$$\operatorname{arctg} y = x + C,$$

$$y = \operatorname{tg}(x + C),$$

где C — произвольная постоянная. Заметим, что при фиксированном C решение $y = \operatorname{tg}(x + C)$ будет существовать не при всех x. Найдем частное решение при условии $y(0) = 1$. Имеем

$$1 = \operatorname{tg} C, \qquad C = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В силу периодичности тангенса можно положить $n = 0$, так что частным решением уравнения будет следующее

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. □

Пример 2. Решить уравнение $y' = xy^2 + 2xy$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = xy(y + 2).$$

В обозначениях уравнения (1) здесь $g(y) = y(y + 2)$. Уравнение $g(y) = 0$ имеет два корня $y_1 = 0$ и $y_2 = -2$. Функции $y \equiv 0$ и $y \equiv -2$ являются решениями уравнения (проверяется подстановкой). Остальные решения найдём, разделив переменные:

$$\frac{dy}{y(y+2)} - x\,dx = 0, \quad \int \frac{dy}{y(y+2)} - \int x\,dx = C_2,$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right) dy - \int x\,dx = C_2,$$

$$\ln|y| - \ln|y+2| - x^2 = \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

$$\frac{|y|}{|y+2|} = C_1 e^{x^2}, \quad C_1 > 0.$$

Раскрывая модули, получим

$$\frac{y}{y+2} = Ce^{x^2}, \;\; C \neq 0, \text{ или } y = \frac{2Ce^{x^2}}{1 - Ce^{x^2}} \;\; C \neq 0.$$

Но так как решение $y \equiv 0$ можно найти из последнего выражения, считая $C = 0$, то, объединяя все найденные решения получаем ответ.
Ответ: $y \equiv -2, \quad y = \frac{2Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}}$. □

Дифференциальное уравнение

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

называют **уравнением с разделенными переменными**. Общий интеграл этого уравнения

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C.$$

Дифференциальное уравнение

$$f_1(x)g_1(y)\,dx + f_2(x)g_2(y)\,dy = 0 \tag{3}$$

является **уравнением с разделяющимися переменными**. Если функции $g_1(y)$ и $f_2(x)$ в своих областях определений не обращаются в нуль, то уравнение можно преобразовать к виду:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = 0.$$

Интегрируя уравнение, получим его общий интеграл:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = C.$$

Если существуют такие x_i и y_j, для которых $g_1(y_j) = 0$ и $f_2(x_i) = 0$, то решениями уравнения (3) будут также:

$$y \equiv y_j \quad \forall j, \quad x \equiv x_i \quad \forall i.$$

Пример 3. Решить уравнение $x(1 + y^2) + y(1 + x^2)y' = 0$.

Решение. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то после умножения уравнения на dx оно примет вид

$$x(1+y^2)\,dx + y(1+x^2)\,dy = 0.$$

Разделив обе части на $(1+y^2)(1+x^2)$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{y}{1+y^2}\,dy = 0.$$

Интегрируя, последовательно находим

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{y}{1+y^2}\,dy = C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln C, \quad \left(\frac{1}{2}\ln C = C_1\right).$$

Потенцируя равенство, получим общее решение в неявном виде (общий интеграл).
Ответ: $(1+x^2)(1+y^2) = C$, $C > 0$. □

К уравнению с разделяющимися переменными сводится уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c), \tag{4}$$

где a, b, c – постоянные, $a \neq 0, b \neq 0$. Действительно, выполнив замену

$$u = ax+by+c, \quad \frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

(здесь: u – функция, x — независимая переменная), уравнение (4) приведем к виду

$$\frac{du}{dx} = bf(u) + a,$$

которое уже будет уравнением с разделяющимися переменными. Разделив в нем переменные, после интегрирования получим

$$\int \frac{du}{bf(u)+a} = x + C.$$

Необходимо проверить, не потеряны ли решения вида $u \equiv u_i$, когда u_i – корни уравнения $bf(u) + a = 0$. После этого выполняется обратная замена во всех полученных решениях.

Пример 4. Решить уравнение $y' = 2x + y$.

Решение. Сделаем замену переменных

$$u = 2x + y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2.$$

При этом заданное уравнение примет вид

$$\frac{du}{dx} - 2 = u \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = u + 2. \tag{$*$}$$

Очевидно, $u = -2$ является решением. Остальные решения найдем, разделяя переменные

$$\frac{du}{u+2} = dx.$$

Отсюда после интегрирования получим:

$$\ln|u+2| = x + C_1, \quad u + 2 = Ce^x,\ C \neq 0, \quad u = -2 + Ce^x,\ C \neq 0.$$

Заметим, что решение $u = -2$ можно получить, считая $C = 0$. Следовательно, общее решение уравнения $(*)$ имеет вид:

$$u = -2 + Ce^x.$$

Возвращаясь к замене, получим ответ.

Ответ: $y = Ce^x - 2x - 2$. □