Вопросы и упражнения для самопроверки по теме:

Понятия оригинала и изображения. Свойства изображений. Решение дифференциальных и интегральных уравнений с помощью преобразования Лапласа

1. Дайте определение функции-оригинала. Какие из перечисленных функций не являются оригиналами? Объясните, почему.

   1) $\dfrac{1}{t-5}\chi(t)$;   2) $e^{-5t}\chi(t)$;   3) $\cos\dfrac{1}{t-1}\chi(t)$;   4) $(t+\sin t)\chi(t)$.

2. Что назвается показателем роста функции-оригинала? Определите показатели роста следующих функций:

   1) $t\chi(t)$;   2) $e^{2t}\chi(t)$ 3) $(t+e^{2t}\cos t)\chi(t)$.

3. Дайте определение изображения по Лапласу. Приведите пример функции-оригинала и постройте для нее изображение по Лапласу, пользуясь определением.

4. Докажите следующие свойства изображений:

   (a) Линейность. Если $f(t)\leftrightarrow F(p)$, $g(t)\leftrightarrow G(p)$, то для любых комплексных λ и μ

   $$\lambda f(t)+\mu g(t)\leftrightarrow \lambda F(p)+\mu G(p), \qquad \operatorname{Re} p > \max(\alpha_0, \beta_0).$$

   Здесь и далее α_0, β_0 – показатели роста функций $f(t)$ и $g(t)$ соответственно.

   (b) Подобие. Если $f(t)\leftrightarrow F(p)$, то для $\forall\ a>0$

   $$f(at)\leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \qquad \operatorname{Re} p > a\alpha_0.$$

   (c) Дифференцирование оригинала. Если $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ – оригиналы и $f(t)\leftrightarrow F(p)$ для $\operatorname{Re} p>\alpha_0$, то

   $f^{(n)}(t)\leftrightarrow p^nF(p)-$

   $$-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\ldots-pf^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0),$$

   где $f^{(k)}(+0)=\lim\limits_{t\to+0}f^{(k)}(t)$, $k=\overline{0,\, n-1}$.

   (d) Дифференцирование изображения. Если $F(p)\leftrightarrow f(t)$, то

   $$F^{(n)}(p)\leftrightarrow(-t)^nf(t), \qquad \operatorname{Re} p>\alpha_0.$$

(e) Интегрирование оригинала. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}, \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

(f) Интегрирование изображения. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$ и $\dfrac{f(t)}{t}$ – оригинал, то

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(\zeta)\,d\zeta, \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

(g) Теорема запаздывания. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$f(t-\tau)\chi(t-\tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} \cdot F(p), \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

(h) Теорема смещения. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то для любого комплексного λ

$$e^{\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(p-\lambda), \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0 + \operatorname{Re}\lambda.$$

5. Пусть $f(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p+4}$. Какие изображения соответствуют функциям:

1) $tf(t)$;	2) $t^2 f(t)$;
3) $f'(t)$;	4) $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$;
5) $\int\limits_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$;	6) $tf(t-1)\chi(t-1)$;
7) $e^{3t}f(t)$;	8) $\dfrac{f(t)}{t}$.

6. Дайте определение свертки двух функций $f(t)$ и $g(t)$. Сверткой каких функций являются следующие интегралы:

1) $\int\limits_0^t \tau(\sin t\cos\tau - \sin\tau\cos t)d\tau$;

2) $\int\limits_0^t \tau \cdot e^{\tau-3t}d\tau$.

7. Докажите, что свертка функций-оригиналов $(f*g)(t)$ является оригиналом, и, если $f(t) \leftrightarrow F(p)$ и $g(t) \leftrightarrow G(p)$, то

$$(f*g)(t) \leftrightarrow F(p)\cdot G(p), \qquad \operatorname{Re} p > \max(\alpha_0, \beta_0).$$

Таблица некоторых оригиналов и изображений

Оригинал $f(t)$	Изображение F(p)	Оригинал $f(t)$	Изображение F(p)
1	$\frac{1}{p}$	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$t^n,\ n \in Z$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$t^\alpha,\ \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

8. Постройте оригиналы, соответствующие изображениям:

1) $\dfrac{p+2}{(p+1)(p^2+2p-3)}$;

2) $\dfrac{1}{p^4(p-2)}$;

3) $\dfrac{(5p-3)e^{-p}}{p(p^2-4p-5)}$;

4) $\dfrac{p^2+4p+3}{p^4+2p^2+1}$;

5) $\dfrac{p^3-p^2-1}{(p^2+1)^2}$;

6) $\dfrac{p-1}{p^2(p^2-2p+5)^2}$.

9. Операционным методом постройте решения следующих уравнений и систем уравнений:

1) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$

2) $$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 1, \\ y'(t) = 4x(t) - y(t), \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1; \end{cases}$$

3) $y(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (x-t)^2 y(t)\,dt;$

4) $y'(x) - y(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)y'(t)\,dt - \int_0^x y(t)\,dt = x, \quad y(0) = -1.$