

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Петрозаводский государственный университет

Институт математики и информационных технологий

Кафедра прикладной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

_____ К.Г. Тарасов

«____» _____ 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Направление подготовки бакалавриата

01.03.01 Математика

Профиль направления подготовки бакалавриата

«Математика в образовании, фундаментальных
и прикладных исследованиях»

Форма обучения *очная*

Петрозаводск

2024

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с ФГОС ВО, утвержденным приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 10.01.2018 г. № 8 (с изменениями от 08.02.2021 № 83, от 26.11.2020 № 1456, от 27.02.23 № 208), и учебным планом по направлению подготовки бакалавриата 01.03.01 Математика (профиль «Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях»).

Разработчики:

Заика Юрий Васильевич, профессор кафедры прикладной математики и кибернетики Института математики и информационных технологий ПетрГУ, доктор физ.-мат. наук, профессор

(подпись)

Семёнова Елена Евгеньевна, доцент кафедры прикладной математики и кибернетики Института математики и информационных технологий ПетрГУ, к.ф.-м.н., доцент

(подпись)

Эксперт:

Родченкова Наталья Ивановна, старший научный сотрудник лаборатории моделирования природно-технических систем Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН, руководитель службы научных коммуникаций КарНЦ РАН, к.ф.-м.н.

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и одобрена на заседании кафедры *прикладной математики и кибернетики*

Протокол № 9 от «27» мая 2024 г.

И.о. заведующего кафедрой _____ (к.ф.-м.н., доцент, Пешкова И.В.)
(подпись)

СОГЛАСОВАНО:

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и утверждена на заседании учебно-методической комиссии Института *математики и информационных технологий*

Протокол № 4 от «05» июня 2024 г.

Директор института _____ (к.ф.-м.н., доцент, Светова Н.Ю.)
(подпись)

Начальник учебно-методического управления ПетрГУ _____ М.В. Данилова

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) бакалавриата

1.1. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины и индикаторы достижения компетенций:

Код и этап формирования компетенции	Формулировка компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 основной	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает основные понятия и методы фундаментальных математических дисциплин. ОПК-1.2. Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности. ОПК-1.3. Умеет осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
ОПК-2 Начальный, основной	Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1. Знает основные задачи и области применения методов математического моделирования, основные принципы математического моделирования, методы построения и анализа математических моделей. ОПК-2.2. Умеет применять методы математического моделирования к решению конкретных задач из различных областей естествознания, техники, экономики и управления; выбирать методы исследования математических моделей; строить и исследовать математические модели. ОПК-2.3. Владеет навыками применения математического аппарата к исследуемым моделям.
ОПК-3 основной	Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	ОПК-3.1. Обладает знаниями основных разделов фундаментальных математических дисциплин и информатики. ОПК-3.2. Умеет точно представить знания в сфере математики и информатики обучающимся, учитывая их уровень подготовки.

1.2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- основные понятия и определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), методы интегрирования простейших типов уравнений и мето-

ды их качественного исследования; области приложений ОДУ в естественных науках;

- типы краевых задач, виды граничных условий; условия существования и единственности решения задачи Коши.

Уметь:

- классифицировать простейшие типы уравнений, применять соответствующие методы их интегрирования, анализировать качественную картину поведения решений;
- применять соответствующую изучаемому процессу математическую модель (дать постановку краевой задачи) и проверить ее адекватность;
- использовать в педагогической деятельности знания теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уметь представлять и адаптировать знания с учетом уровня аудитории.

Владеть:

- навыками интегрирования дифференциальных уравнений, методологией применения полученных знаний в других областях математики и дисциплинах естественнонаучного содержания;
- методами построения в явном виде решений краевых задач, качественного анализа математической модели;
- методами точного представления знания из теории дифференциальных уравнений обучающимся, учитывая их уровень подготовки.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата и язык преподавания

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» входит в обязательную часть учебного плана основной образовательной программы бакалавриата по данному направлению подготовки и является обязательной для изучения.

Согласно учебному плану дисциплина проводится в 3 и 4 семестрах.

Изучение дисциплины опирается на знания, умения и навыки, приобретенные при освоении образовательной программы предыдущего уровня, а также при изучении дисциплин учебного плана данной образовательной программы: *Алгебра, Математический анализ*.

Полученные знания активно используются в дальнейшем при изучении таких дисциплин как *Уравнения с частными производными, Теоретическая механика, Вариационное исчисление, Численные методы*, а также при выполнении научно-исследовательской работы в области математического моделирования физических, биологических, экологических, экономических, социальных и других процессов живой и неживой природы.

Язык преподавания – русский.

3. Виды учебной работы и тематическое содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц или 252 академических часа.

3.1. Виды учебной работы

Виды учебной работы	Объем в академических часах
Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану	252
В том числе:	

Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), всего	120
В том числе:	
Лекции (Л)	60
Практические занятия (Пр)	60
Лабораторные занятия (Лаб)	0
Вид промежуточной аттестации	зачет (3 семестр), экзамен (4 семестр)
Самостоятельная работа обучающихся (СР) (всего)	132
В том числе: Самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовка к занятиям. Подготовка к промежуточной аттестации	

3.2. Краткое содержание дисциплины по разделам и видам учебной работы

№ п/п	Раздел дисциплины (тематический модуль)	Трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)					Оценочное средство
		Всего	Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа	
Семестр № 3							
1	Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка	80	16	30		34	Контроль- ная работа, зачет
2	Общие свойства решений систем дифференциальных уравнений	28	14			14	зачет
Вид промежуточной аттестации в семестре - зачет							
Всего, 3 семестр		108	30	30		48	
Семестр № 4							
3	Линейные уравнения и системы	60	22	16		22	Контроль- ная работа, экзамен
4	Элементы качественной теории дифференциальных уравнений	36	6	10		20	Контроль- ная работа, экзамен
5	Уравнения в частных производных 1-го порядка	12	2	4		6	контроль- ная работа, экзамен
	Подготовка к промежуточной аттестации	36				36	Экзамен

Вид промежуточной аттестации в семестре – экзамен						
<i>Всего, 4 семестр</i>	144	30	30		84	
Итого:	252	60	60		132	

3.3. Содержание аудиторных занятий

Содержание лекционных занятий

№ раздела	№ лекции	Основное содержание	Количество часов	В т.ч. с использованием ДОТ (*)
Семестр № 3				
1	1-2	Общие понятия теории дифференциальных уравнений (ДУ), примеры математических моделей динамических процессов.	4	
1	3	Задача Коши, формулировки теорем существования и единственности решений. Геометрическая интерпретация. Понятия общего решения и общего интеграла.	2	
1	4-6	Уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, в полных дифференциалах, уравнения Бернулли и Риккати.	6	
1	7-8	Уравнения, не разрешенные относительно производной. Задача Коши, особые решения, огибающая. Методы интегрирования.	4	
2	9-10	Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Управляемые системы с кусочно-непрерывными управлениями.	4	
2	11-12	Зависимость решений от числовых и функциональных параметров, начальных данных.	4	
2	13	Элементы аналитической теории дифференциальных уравнений. Теорема Коши. Уравнение Бесселя.	2	
2	14	Метод малого параметра. Регулярные и сингулярные возмущения.	2	
2	15	Дифференциальные уравнения с последействием	2	
		<i>Всего, 3 семестр</i>	30	
Семестр № 4				
3	1-2	Линейные уравнения n -го порядка. Общие свойства.	4	
3	3	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	2	
3	4-5	Уравнения второго порядка. Элементы теории колебаний. Явление резонанса.	4	
3	6	Импульсные возмущения. Применение дельта-функции.	2	
3	7	Линейные системы ДУ. Общие свойства.	2	
3	8	Линейные системы с постоянными коэффициентами	2	
3	9	Линейные системы с периодическими коэффициентами	2	
3	10	Операционный метод решения ДУ	2	
3	11	Линейная граничная задача	2	

4	12	Векторные поля, фазовые потоки. Общие свойства траекторий динамических систем.	1	
4	12	Производная по направлению поля фазовой скорости. Первые интегралы.	1	
4	13	Фазовый портрет динамической системы на плоскости	2	
4	14	Устойчивость движения. Функции Ляпунова	2	
5	15	Линейное уравнение с частными производными первого порядка	2	
		Всего, 4 семестр	30	
		Всего:	60	

Содержание практических занятий

№ раздела	№ занятия	Основное содержание	Количество часов	В т.ч. с использованием ДОТ
Семестр № 3				
1	1-4	Методы интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения).	7	
1	4	<i>Контрольная работа № 1 (часть 1).</i>	1	
1	5-9	Методы интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка (линейные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, уравнения Бернулли и Риккати).	10	
1	10	<i>Контрольная работа № 1 (часть 2).</i>	2	
1	11-12	Методы интегрирования уравнений, не разрешенных относительно производной. Уравнения Клеро и Лагранжа. Особые решения, огибающая семейства кривых.	4	
1	13-14	Уравнения, допускающие понижение порядка	4	
1	15	<i>Контрольная работа № 2 (часть 1).</i>	2	
		Всего, 3 семестр	30	
Семестр № 4				
3	1-5	Решение линейных дифференциальных уравнений n -го порядка. Методы Лагранжа, Коши, неопределенных коэффициентов.	10	
3	6-7	Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем	4	
3	8	<i>Контрольная работа № 3 (часть 1)</i>	2	
4	9-10	Линейные системы. Типы особых точек на фазовой плоскости. Фазовые портреты.	4	
4	11-12	Нелинейные системы. Теорема об устойчивости по первому приближению.	4	
4	13	<i>Контрольная работа № 4 (часть 1)</i>	2	
5	14-15	Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными 1-го порядка	4	
		Всего, 4 семестр	30	

		Итого:	60	
--	--	---------------	-----------	--

3.4. Организация самостоятельной работы обучающегося

№ раздела	Виды самостоятельной работы	Трудоем- кость в час.
Семестр № 3		
1-2	Изучить теоретический материал (конспект лекций) и литературу по темам разделов 1-2	15
1-2	Выполнить домашние задания (в том числе заданий, решаемых с помощью систем компьютерной математики), которые указывает преподаватель после каждого практического занятия.	23
1	Подготовиться к контрольной работе № 1 (часть 1 и часть 2). Решить примерный вариант работы, приведенный в разделе 5 рабочей программы.	2
1	Подготовиться к контрольной работе №2 (часть 1). Решить примерный вариант работы, приведенный в разделе 5 рабочей программы.	2
1	Выполнить индивидуальное контрольное задание. <i>Контрольная работа № 2 (часть 2). Уравнения, допускающие понижение порядка</i>	2
1-2	Подготовка к зачету, сдача зачета	4
	Всего, 3 семестр	48
Семестр № 4		
3-5	Изучить теоретический материал (конспект лекций) и литературу по темам разделов 3-5	10
3-5	Выполнить домашние задания (в том числе заданий, решаемых с помощью систем компьютерной математики), которые указывает преподаватель после каждого практического занятия.	22
3	Подготовиться к контрольной работе № 3 (часть 1). Решить примерный вариант работы, приведенный в разделе 5 рабочей программы.	2
4	Подготовиться к контрольной работе № 4 (часть 1). Решить примерный вариант работы, приведенный в разделе 5 рабочей программы.	2
4	Выполнить индивидуальное контрольное задание. <i>Контрольная работа № 3 (часть 2). Линейные уравнения. Системы линейных уравнений</i>	2
4	Просмотреть презентацию «Фазовые портреты динамических систем. Часть 1. Линейные динамические системы» https://edu.petsu.ru/object/3299	4
4	Выполнить индивидуальное контрольное задание. <i>Контрольная работа № 4 (часть 2). Теорема об устойчивости по первому приближению. Фазовый портрет нелинейной динамической системы.</i>	6
1-5	Подготовка к экзамену, сдача экзамена	36
	Всего, 4 семестр	84
	ИТОГО	132

4. Образовательные технологии по дисциплине

При изучении дисциплины «Дифференциальные уравнения» используются следующие образовательные технологии:

- аудиторные занятия (лекционные и практические занятия);
- внеаудиторные занятия (самостоятельная работа, индивидуальные консультации).

Предусматривается использование в учебном процессе следующих активных и интерактивных форм проведения занятий:

- практические занятия в диалоговом режиме;
- решение задач с помощью систем компьютерной математики (вычисление интегралов; нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы; построение изображений по Лапласу, восстановление оригиналов по известному изображению; визуализация решений).

Учебно-методические материалы публикуются на сайте дисциплины:

https://math-it.petsu.ru/users/semenova/DIFF_UR/index.html

5. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

5.1. Текущий контроль осуществляется преподавателем дисциплины с помощью *устного опроса* на практических занятиях, при проведении занятий в форме *контрольной работы*, а также проверки выполнения *домашних заданий*. К оценочным средствам для текущего контроля относятся:

- аудиторные контрольные работы,
- индивидуальные контрольные задания (домашние контрольные работы).

Примеры вариантов контрольных работ

Контрольная работа № 1 (часть 1, аудиторная)

Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения

Решите уравнения:

$$1) y' \ln y = yx^2 \ln x; \quad 2) \left(y' - \frac{y}{x}\right) \cos \frac{y}{x} = \sin^2 \frac{y}{x}; \quad 3) y' = \frac{y - 15x + 13}{y + 9x - 11}.$$

Критерий оценивания

Задание 1)	2 балла
Задание 2)	3 балла
Задание 3)	4 балла

В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом: «Отлично» – 8–9 баллов, «хорошо» – 5–7 баллов, «удовлетворительно» – 2–4 балла, «неудовлетворительно» – менее 2 баллов.

Контрольная работа № 1 (часть 2, аудиторная)

Методы решения дифференциальных уравнений 1-го порядка

Решите уравнения:

$$1) y' - \frac{y}{x} = 2xe^{2x}; \quad 2) y \operatorname{tg} x - 4y' = \frac{y^5 \cos x}{\sin^2 x}; \quad 3) y' + \frac{11y}{x} + y^2 = \frac{24}{x^2}.$$

4) $(2x \cos x^2 + \cos y^2)dx - 2xy \sin y^2 dy = 0$; 5) $\left(\frac{2\sqrt{y} \cdot e^x}{x} - y^3\right)dx + \left(3y^2 + \frac{e^x \ln x}{\sqrt{y}}\right)dy = 0$;

Критерий оценивания

Задание 1)	2 балла
Задание 2)	3 балла
Задание 3)	3 балла

Задание 4)	2 балла
Задание 5)	3 балла

В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом:
«Отлично» – 11–13 баллов, «хорошо» – 8–10 баллов, «удовлетворительно» – 5–7 баллов, «неудовлетворительно» – менее 5 баллов.

Контрольная работа № 2 (часть 1, аудиторная)

Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Решите уравнения:

1) $x = \frac{1}{y'+1} + \ln |y'+1|$;

2) $y = \frac{2(y')^2 - 1}{4} \arccos y' - \frac{y'}{4} \sqrt{1 - (y')^2}$;

3) $xy' - \frac{y}{2} - \frac{1}{y'y^2} = 0$;

4) $y = x(y' - \operatorname{tg} y') + \sin^2 y'$.

Критерий оценивания

Задание 1)	2 балла
Задание 2)	2 балла

Задание 3)	3 балла
Задание 4)	3 балла

В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом:
«Отлично» – 9–10 баллов, «хорошо» – 6–8 баллов, «удовлетворительно» – 4–5 балла, «неудовлетворительно» – менее 4 баллов.

Контрольная работа № 2 (часть 2, домашняя)

Уравнения, допускающие понижение порядка

Решите уравнения:

1) $x = (y'' - 1) \ln y''$;

2) $\sin x \cos x (yy'' - (y')^2) + 2yy' = 0$;

3) $(y')^2 + y'' \sqrt{1 - y^2} \arcsin y = 0$;

4) $y'' = \frac{2(y - xy')}{x^2} + \operatorname{sh} x$.

Критерий оценивания

«Зачтено» выставляется, если выполнены правильно все задания работы, иначе – «не зачтено».

Контрольная работа № 3 (часть 1, аудиторная)

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Решите уравнения:

1) $y^{(4)} + 9y''' + 21y'' + 19y' + 6y = 0$;

2) $y^{(6)} + 2y^{(4)} - 4y'' - 8y = 0$;

3) $y'' - 2y' + 17y = \frac{4e^x}{\cos(4x)}$;

4) $y'' + y' - 2y = (2 - 6x)e^{-2x}$;

5) $y^{(15)} + y^{(14)} = \sin x - \cos x$;

6) $y'' + 2y' + 5y = x - 5x^2 + 5 - 4e^{-x} \sin 2x$.

Критерий оценивания

Задание 1)	1 балл	Задание 4)	2 балла
Задание 2)	1 балл	Задание 5)	2 балла
Задание 3)	2 балла	Задание 6)	2 балла

В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом:
«Отлично» – 9–10 баллов, «хорошо» – 7–8 баллов, «удовлетворительно» – 4–6 баллов, «неудовлетворительно» – менее 4 баллов.

Контрольная работа № 3 (часть 2, домашняя)

Линейные уравнения, системы линейных уравнений

1. Решите уравнение при $x > 0$:

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = \frac{4}{x};$$

2. Решите системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x' = x + y - 3z, \\ y' = 3x + 2y - 3z, \\ z' = x + z; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = -x + 4y - 4z, \\ y' = x + 4y + \sin t, \\ z' = 4x + 22y - 3z. \end{cases}$$

3. Решите краевую задачу:

$$y'' - 4y' + 5y = 3e^{2x}(\sin 2x - 3\cos 2x),$$

$$y(0) = 3, \quad y(2\pi) = 3e^{4\pi}.$$

Критерий оценивания

«Зачтено» выставляется, если выполнены правильно все задания работы, иначе – «не зачтено».

Контрольная работа № 4 (часть 1, аудиторная)

Устойчивость положений равновесия линейных уравнений. Фазовый портрет линейной динамической системы

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$y^V + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$$

2. Рассматривается система

$$\dot{x} = a^2 x - y, \quad \dot{y} = 5x - (3 + 2a)y.$$

- 1) При каких значениях параметра a нулевое решение системы является асимптотически устойчивым?
- 2) Нарисуйте траектории системы при $a = -3$.
- 3) Существует ли такое значение $a \in \mathbf{R}$, при котором траектории – замкнутые кривые?

Критерий оценивания

Задание 1)	2 балла	Задание 2.2)	2 балла
Задание 2.1)	1 балл	Задание 2.3)	1 балл

В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом:
«Отлично» – 6 баллов, «хорошо» – 4–5 баллов, «удовлетворительно» – 2–3 балла, «неудовлетворительно» – менее 2 баллов.

Контрольная работа № 4 (часть 2, домашняя)
Фазовый портрет нелинейной динамической системы

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - 2)^2 - y^2, \\ \dot{y} = x - y^2. \end{cases}$$

Выполните следующие задания:

1. Найдите все положения равновесия системы и, используя теорему об устойчивости по первому приближению, исследуйте их на устойчивость.
2. Нарисуйте фазовые портреты линеаризованных систем в окрестности каждого положения равновесия.
3. Постройте фазовый портрет заданной системы.

Критерий оценивания

«Зачтено» выставляется, если выполнены правильно все задания работы, иначе – «не зачтено».

5.2. Промежуточная аттестация проводится в виде зачета и экзамена.

Условием получения зачета (3 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий; выполнение заданий, предлагаемых в рамках самостоятельной работы, выполнение контрольных работ.

Вопросы к зачету (3 семестр) – Методы решения уравнений 1-го порядка

1. Уравнения с разделяющимися переменными.
2. Однородные уравнения.
3. Линейные уравнения 1-го порядка. Структура общего решения неоднородного уравнения. Методы Бернулли и вариации произвольной постоянной.
4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
5. Уравнения Бернулли и Риккати.
6. Уравнения, не разрешенные относительно производной.
7. Метод интегрирования введением параметра.

Условием допуска к экзамену (4 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий, выполнение всех контрольных работ. Оценка, полученная обучающимся по результатам работы на практических занятиях, учитывается при выставлении экзаменационной оценки.

Вопросы к экзамену (4 семестр)

1. Общие понятия теории дифференциальных уравнений (ДУ), примеры моделей динамических процессов.
2. Уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные.
3. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
4. Уравнения Бернулли и Риккати.
5. Уравнения, не разрешенные относительно производной.
6. Метод интегрирования введением параметра.
7. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

8. Управляемые системы с кусочно-непрерывными управлениями.
9. Зависимость решений от параметров и начальных данных.
10. Метод малого параметра. Регулярные и сингулярные возмущения.
11. Теорема Коши о голоморфном решении.
12. Элементы аналитической теории ДУ. Уравнение Бесселя.
13. Дифференциальные уравнения с последействием.
14. Линейные уравнения n -ого порядка. Общие свойства.
15. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.
16. Уравнения второго порядка. Элементы теории колебаний. Резонанс.
17. Импульсные возмущения. Применение дельта-функции.
18. Линейные системы ДУ. Общие свойства.
19. Линейные системы с постоянными коэффициентами.
20. Функции от матриц. Матричная экспонента.
21. Линейные системы с периодическими коэффициентами.
22. Операционный метод решения ДУ.
23. Линейная граничная задача.
24. Векторные поля, фазовые потоки.
25. Общие свойства траекторий динамических систем.
26. Производная по направлению поля фазовой скорости. Первые интегралы.
27. Фазовый портрет динамической системы на плоскости.
28. Устойчивость движения. Функции Ляпунова.
29. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.
30. Линейное уравнение с частными производными первого порядка.

Билет содержит один теоретический вопрос и одну задачу.

Оценка **«отлично»** выставляется обучающемуся, если он владеет знаниями предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину; самостоятельно, в логической последовательности и исчерпывающе отвечает на все вопросы, подчеркивает при этом самое существенное, умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделять в нем главное: устанавливать причинно-следственные связи; четко формулирует ответы. При этом задача, предложенная в билете, должна быть правильно решена.

Оценка **«хорошо»** выставляется обучающемуся, если он владеет знаниями дисциплины почти в полном объеме программы (имеются пробелы знаний только в некоторых, особенно сложных разделах); самостоятельно и отчасти при наводящих вопросах дает полноценные ответы на вопросы; не всегда выделяет наиболее существенное, не допускает вместе с тем серьезных ошибок в ответах. При этом задача, предложенная в билете должна быть правильно решена.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если он владеет основным объемом знаний по дисциплине; проявляет затруднения в самостоятельных ответах, оперирует неточными формулировками; в процессе ответов допускает ошибки по существу вопросов. При этом задача, предложенная в билете должна быть правильно решена.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если он не освоил обязательного минимума знаний предмета, не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах экзаменатора.

6. Методические рекомендации обучающимся по дисциплине, в том числе для самостоятельной работы

Для успешного освоения дисциплины необходимо знание тем и основных понятий следующих дисциплин учебного плана подготовки по направлению 01.03.01 Математика:

- 1) *Алгебра* – матрица, определитель матрицы, характеристический многочлен матрицы, простые и кратные нули многочлена, поиск рациональных нулей многочлена с целыми коэффициентами, собственные значения и вектора матрицы, матричная экспонента, формула Эйлера, линейно зависимые и линейно независимые вектора, системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), методы решения СЛАУ (метод Гаусса, метод Крамера, метод обратной матрицы).
- 2) *Математический анализ* – непрерывные функции; кусочно-непрерывные функции; производная и дифференциал; неявные функции; дифференцирование неявных функций; функции нескольких переменных; частные производные; производная по направлению; интегрирование функции; правила интегрирования; таблица основных интегралов; интегралы, зависящие от параметра; функциональные ряды; степенные ряды; признаки сходимости ряда.

Задания для самопроверки к началу изучения курса

1. Найдите все рациональные нули многочлена $6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.
2. Найдите собственные значения и собственные вектора матриц:

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}; \quad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -x + y + 2z = 2 \\ x + 3y + 5z = 9 \end{cases}$$

4. Проверить, будут ли вектора $\mathbf{a} = \{1; 1; 1\}$, $\mathbf{b} = \{1; 2; 0\}$, $\mathbf{c} = \{0; -1; 1\}$ линейно независимыми.
5. Проверить, будут ли вектора $\mathbf{a} = \{1; 1; 1\}$, $\mathbf{b} = \{1; 2; 0\}$, $\mathbf{c} = \{0; -1; 2\}$ линейно независимыми.
6. Найдите дифференциал функции $y = \arcsin(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$;
7. Найдите производную функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
8. Вычислите следующие интегралы:

$$1) \int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx, \quad 2) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx, \quad 3) \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx, \quad 4) \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

9. Найдите производную функции $y(x) = \int_0^x \sin \frac{x-\xi}{a} d\xi$.
10. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал для следующих функций $u(x, y) = x \sin(x+y)$, $u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.
11. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.
12. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$.

занятий и контрольных мероприятий, конспекты практических занятий, задания для самостоятельной работы, примерные варианты контрольных работ, результаты текущего контроля и материалы для подготовки к промежуточной аттестации публикуются на сайте дисциплины https://math-it.petrSU.ru/users/semenova/DIFF_UR/index.html (в открытом доступе).

7. Методические рекомендации преподавателям по дисциплине

Планирование лекционных и практических занятий осуществляется с учётом установленного количества часов.

Лекции составляют основу теоретического обучения и дают систематизированные основы научных знаний по дисциплине, раскрывают состояние и перспективы развития соответствующей области науки, концентрируют внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулируют их активную познавательную деятельность и способствуют формированию творческого мышления. Ведущим методом лекционного занятия выступает устное изложение учебного материала.

Практические занятия направлены на формирование у обучающихся умений решать типовые задачи. Преподаватель оценивает знания и умения обучающихся путем проведения контрольных работ и проверки домашних заданий.

7.1. Задачи для аудиторных занятий и задачи, предлагаемые для самостоятельного решения (домашнее задание)

Для проведения практических занятий рекомендуется использовать следующие задачи:

- [Ф] Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям (любое издание после 1992 года).
- [М] Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Для вузов / Н.М. Матвеев. – Минск : Вышэйшая школа, 1977. – 416 с.
- [Р] Романко, В.К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В.К. Романко, Н.Х. Агаханов, В.В. Власов, Л.И. Коваленко. – Москва : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. – 256 с.

№ темы	Тема	Номера задач	
		для аудиторных занятий	для самостоятельных занятий
1	Составление дифференциальных уравнений заданного семейства плоских кривых.	[Ф]: № 17, 21, 27, 30	[Ф]: 18, 20, 26, 32
2	Дифференциальные уравнения 1-го порядка		
	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	[Ф]: № 65, 54, 55, 66, 68 (а,в), 78; [М]: 90, 146	[Ф]: 63, 64, 67, 68(б), 71; [М]: 142, 147
	Однородные уравнения	[Ф]: № 101, 103, 107, 109, 112, 111, 116, 114	[Ф]: № 102, 104, 108, 110, 115, 113, 117
	Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	[Ф]: № 118, 119, 126	[Ф]: № 120
	Линейные уравнения 1-го порядка	[Ф]: № 136, 137, 138, 145, 148, 149,	[Ф]: № 139, 140, 141, 144,
	Уравнения Бернулли, Риккати	[Ф]: № 151, 154, 157, 159, 167	[Ф]: № 146, 147, 152, 153, 155, 164, 168

	Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	[Ф]: № 186, 190, 191, 194, 195, 199, 202, 206, 200 [М]: № 354, 355, 358,	[Ф]: № 187, 189, 193, 196, 197, 201, 203, 219, [М]: № 356, 357, 362
	Уравнения, неразрешенные относительно производной. Особые решения. Метод введения параметра	[Ф]: № 241, 242, 244, 249, 251, 267, 272, 274, 278, 283, 287, [М]: № 528	[Ф]: № 243, 246, 269, 252, 255, 307, 271, 282, [М]: № 524, 527,
3	Уравнения, допускающие понижение порядка	[Ф]: № 421, 425, 456, 463, 422, 426, 434, 432, 501,	[Ф]: № 433, 435, 437, 460, 438, 447, 451
4	Решение линейных дифференциальных уравнений n -го порядка	[Ф]: № 511, 515, 521, 523, 524, 526, 530, 532, 582, 533, 534, 535, 538, 540, 583, 546, 548, 549, 550, 551, 555, 569, 575, 577, 588, 607, 589, 591, 593, 595,	[Ф]: № 512, 516, 520, 522, 525, 527, 529, 536, 537, 539, 541, 543, 584, 553, 559, 562, 574, 578, 579, 585, 587, 590, 592, 594
5	Линейные системы с постоянными коэффициентами	[Ф]: № 786, 813, 832, 796, 798, 801, 817, 808, 811, 826,	[Ф]: № 787, 789, 797, 814, 843, 799, 802, 818, 829
6	Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений и их систем	[Р]: § 8, № 172, 173, 179, § 11, № 187, 189	[Р]: § 8, № 177, 182, § 11, № 188, 193
7	Линейные системы. Типы особых точек на фазовой плоскости. Фазовые портреты.	[Ф]: № 932, 934, 941, 949, 961, 971, 973, 977	[Ф]: № 933, 935, 943, 950, 962, 972, 976, 978
8	Нелинейные системы дифференциальных уравнений	[Ф]: № 1143, 1146, 1148, 1153, 1159	[Ф]: № 1141, 1147, 1149, 1154, 1157
9	Устойчивость по первому приближению	[Ф]: № 899, 901, 905, 908, 912, 916, 919, 921, 1025, 1040,	[Ф]: № 900, 902, 906, 907, 910, 915, 918, 922, 1026, 1041
10	Линейные уравнения в частных производных первого порядка	[Ф]: № 1168, 1170, 1172, 1176, 1183, 1190, 1193, 1194, 1199, 1211	[Ф]: № 1167, 1174, 1173, 1179, 1181, 1182, 1192, 1197, 1203, 1212

7.2. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

Варианты контрольных работ и рекомендации по оцениванию контрольных заданий приведены в фонде оценочных средств.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Дисциплина полностью обеспечена учебной литературой, представленной в печатном или электронном виде. Для осуществления образовательной деятельности по дисциплине рекомендуется следующая основная и дополнительная литература.

8.1. Основная литература:

1. Заика, Ю.В. Дифференциальные уравнения. Курс лекций / Ю.В. Заика. – Петрозаводск : КарНЦ РАН, 2012. – 215 с. URL: <https://edu.petrSU.ru/object/12619>
2. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – Москва : Высшая школа, 1967. – 564 с.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

3. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Для вузов / Н.М. Матвеев. – Минск : Вышэйшая школа, 1977. – 416 с.
4. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – Москва : Наука, 1982. – 331 с.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>
5. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с. [Электронный ресурс]
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html>
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=145012&sr=1
6. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Москва : Наука, 1992. – 128 с.
7. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – Москва : Наука, 1969. – 424 с.
[Электронный ресурс] <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

8.2. Дополнительная литература:

1. Васильева, А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102761.html>
2. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 480 с.
[Электронный ресурс] <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>
3. Егоров, А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А.И. Егоров. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 448 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922107853.html>
4. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Москва : Наука, 1971. – 575 с.
[Электронный ресурс] <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=454586&sr=1
5. Романко, В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления / В.К. Романко. – Москва : Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 344 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996330133.html>

8.3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Сайт «EqWorld. МИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»:
Образование: обыкновенные дифференциальные уравнения
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/education/edu-ode.htm>
Книги по обыкновенным дифференциальным уравнениям:
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>
2. Пакет для математических и инженерных расчетов MathCAD
(сайт производителя <https://www.ptc.com/en/products/mathcad>)
Петрозаводский университет обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения.
3. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека онлайн»
<http://biblioclub.ru/>
4. Электронной библиотечной системы «Консультант студента. Студенческая элек-

тронная библиотека» <http://www.studentlibrary.ru>

8.4. Информационное обеспечение дисциплины в системе электронного (дистанционного) обучения

1. Фазовые портреты динамических систем. Часть 1. Линейные динамические системы.

Ресурс размещен на образовательном портале ПетрГУ <https://edu.petrso.ru/object/3299>

Обеспечивает учебно-методическую поддержку при выполнении обучающимися практических заданий на построение фазовых портретов автономных систем линейных дифференциальных уравнений. Содержит необходимый теоретический материал и примеры.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническая база ПетрГУ обеспечивает проведение всех видов дисциплинарной подготовки обучающихся, предусмотренных учебным планом и соответствует действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Минимально-необходимый перечень для информационно-технического и материально-технического обеспечения дисциплины:

- аудитория для проведения лекционных и практических занятий, оснащенная рабочими местами для обучающихся и преподавателя, доской, мультимедийным оборудованием;
- библиотека с читальным залом и залом для самостоятельной работы обучающегося, оснащенная компьютером с выходом в Интернет, книжный фонд которой составляет специализированная научная, учебная и методическая литература, журналы (в печатном или электронном виде).

Дата: 5 мая 2024 г.