Задачи к экзамену

Тема: Уравнение линии на плоскости

Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:

1. $\operatorname{Re} z^2 = 1;$
2. $|z-3+2i| = 3;$
3. $|z-2i| + |z+2i| = 6;$
4. $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 1;$
5. $|z-2| = |z+2i|;$
6. $|z-3+2i| = |z|;$
7. $\operatorname{Im}\frac{1}{z} = \frac{1}{2};$
8. $|z-2| + |z+2| = 6;$
9. $|z-2+i| = 2.$

Тема: Задачи на вычисление

Вычислить:

1. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i};$ 2. $(1-i)^i;$ 3. $(1+i)^i;$ 4. $(1-i)^{3-3i};$ 5. $(-i)^{2+i};$ 6. $(i+1)^{i-1}.$

Найдите сумму: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx.$

Тема: Значение функции в точке

Найдите значение функции $w = f(z)$ в заданной точке $z = z_0$:

1. $f(z) = e^z, \quad z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}i$
2. $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2} + i$
3. $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}(-1+i)$
4. $f(z) = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = 2 + \frac{\pi}{2}i$
5. $f(z) = \operatorname{ch} z, \quad z_0 = \pi\left(-1 + \frac{1}{2}i\right)$
6. $f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = -1 + i$
7. $f(z) = e^z, \quad z_0 = 2 - \frac{\pi}{4}i$
8. $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \pi - i$
9. $f(z) = \cos z, \quad z_0 = -\pi + i$
10. $f(z) = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = \pi\left(-2 + i\right)$
11. $f(z) = \operatorname{ch} z, \quad z_0 = -3 + \pi i$
12. $f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = 1 - \sqrt{3}i$

Тема: Решение уравнений

Решите уравнения:

1. $4\cos z + 5 = 0;$
2. $\operatorname{ch} z = -2i;$
3. $e^{2z} = -2;$
4. $e^{2z} = 2i;$
5. $\sin z = 2;$
6. $4\sin z - 5 = 0;$

Тема: Дифференцируемые функции

1. Выяснить, являются ли функции

   а) $f(z) = z \cdot e^{3z}$, б) $f(z) = 5\overline{z} - 3iz$

дифференцируемыми в области определения. Если да, то найдите их производные.

2. Показать, что функция $f(z) = x^2 + y^2 - 2ixy$ дифференцируема и найти ее производную.

3. Показать, что функция $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$ дифференцируема и найти ее производную.
4. При каком значении λ функция $f(z)=y+\lambda xi$ дифференцируема?
5. При каком значении *a* функция $f(z)=a\bar{z}$ дифференцируема?

Тема: Восстановление аналитической функции

Восстановите функцию $w = f(z)$ по ее заданной действительной $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ части, если $f(z_0) = w_0$:

1. $u(x;y)=x^2-y^2-4x,\quad f(i)=-1$
2. $v(x;y)=e^{2x}\sin 2y+y,\quad f(\pi/2)=e^{\pi}$
3. $u(x;y)=3x-x^2+y^2,\quad f(i)=1$
4. $v(x;y)=2e^{x}\cos y,\quad f(0)=2i$
5. $u(x;y)=-x^2+y^2+2y+1, f(-i)=0$
6. $v(x;y)=e^{-y}\sin x-y,\quad f(0)=1$
7. $u(x;y)=x^2-y^2-2y-1, f(-i)=0$
8. $v(x;y)=-e^{-2x}\sin 2y+\pi, f(0)=1+\pi i$
9. $u(x;y)=4(x^2-y^2+1),\quad f(i)=0$
10. $v(x;y)=e^{-y}\sin x+x,\quad f(i)=e^{-1}$
11. $u(x;y)=x^2-y^2+y,\quad f(i)=0$
12. $v(x;y)=e^{-\pi y}\sin \pi x,\quad f(1-i)=-e^{\pi}$
13. $u(x;y)=-2x(y+1),\quad f(-i)=i$
14. $v(x;y)=2xy-4y+4,\quad f(i)=-1$

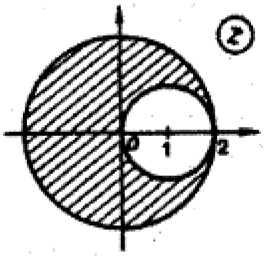
Тема: Конформные отображения

1. Найти образ треугольника с вершинами в точках $z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=i$ при отображении $w=(i-1)z-2$.
2. На что отобразит функция $w=\dfrac{1}{z}$ области:
   1) круг $|z + i| < 1$;
   2) вертикальную полосу $0 < \operatorname{Re} z < 1$;
   3) первый координатный угол с удаленным полукругом $\{z:|z-i|\le 1,\quad \operatorname{Re} z\ge 0\}$;
   4) вертикальную полуполосу $\{z:-1<\operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z<0\}$ с удаленным полукругом $\{z:|z|\le 1,\ \operatorname{Im} z\ge 0\}$;
   5) полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$, из которой удален круг $|z| \le 1$?
3. Найти образы указанных областей при заданных дробно-линейных отображениях:
   1) круга $|z| < 1$ при $w=\dfrac{z-1}{z+1}$;
   2) внешности круга $|z| \le 1$ при $w=\dfrac{z+1}{z-1}$;
   3) полуплоскости $\operatorname{Im} z > 1$ при $w=\dfrac{z-i}{z}$;
   4) кольца $1 < |z| < 2$ при $w=\dfrac{z+1}{z+2}$;

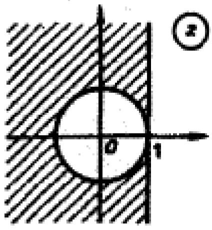
5) луночки $\{z:\ |z|<1,\ |z-1|<\sqrt{2}\}$ при $w=\dfrac{z+i}{z-i}$;

6) полосы $0 < \operatorname{Im} z < 1$ при $w=\dfrac{z-i}{z-2i}$;

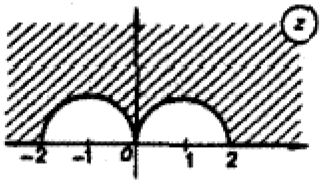
7) внешности круга $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|\le\dfrac{1}{2}$ при $w=\dfrac{4z}{z+1}$;

8) 

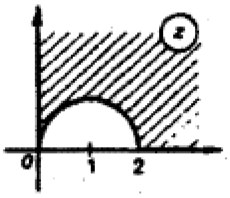
при $w=2i\dfrac{z}{z-2}$;

9) 

при $w=i\dfrac{z+1}{z-1}$;

10) 

при $w=\dfrac{z-2}{z}$;

11) 

при $w=-\dfrac{2}{z}$