



СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Символьные вычисления в системах компьютерной алгебры, 2017/18 уч. год

Компьютерная алгебра возникла в середине XX века на стыке математики и информатики. Это наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов.

Синонимами термина «компьютерная алгебра» являются «символьные вычисления», «аналитические вычисления», «аналитические преобразования», «формальные вычисления».

Система компьютерной алгебры (СКА, англ. *computer algebra system, CAS*) — это прикладная программа для символьных вычислений, то есть выполнения преобразований и работы с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме.

В системах компьютерной алгебры используются следующие разделы математики: *символьное интегрирование, гипергеометрическое суммирование, пределы, факторизация полиномов, наибольший общий делитель, метод Гаусса, диофантовы уравнения, производные от элементарных и специальных функций и др.*

Назначение, как работают системы компьютерной алгебры

Основное назначение систем компьютерной алгебры (СКА) – работа с математическими выражениями в символьной форме.

СКА работают следующим образом:

- математические объекты (алгебраические выражения, ряды, уравнения, векторы, матрицы и др.) и указания, что с ними делать, задаются пользователем на входном языке системы в виде символьных выражений;
- интерпретатор анализирует и переводит символьные выражения во внутреннее представление;
- символьный процессор системы выполняет требуемые преобразования или вычисления и выдает ответ в математической нотации.

Примеры символьных преобразований

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^2 - (y - 2)^2 = 0 \end{cases} \text{solve}_{x,y} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+4} dx \rightarrow \ln(x-2) - \frac{5}{x-2}$$
$$(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)^2 \text{expand} \rightarrow x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$$

MathCAD

```
solve([x^2-y=0,x^2-(y-2)^2=0],[x,y]);  
[[x=-2,y=4],[x=1,y=1],[x=-1,y=1],[x=2,y=4]]  
  
integrate((x+3)/(x^2-4*x+4),x);  
log(x-2)-5/(x-2)  
  
expand((x-1)*(x+2)*(x-3)^2);  
x^4-5 x^3+x^2+21 x-18
```

Maxima

СКА в Википедии



Достаточно полный список систем компьютерной алгебры с указанием их функциональности и платформ, на которых они эксплуатируются, представлен в Википедии

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems

Классификация СКА по функциональному назначению

СКА общего назначения (универсальные) позволяют работать в широком диапазоне предметных областей (Derive, Mathematica, Maple, Maxima, Axiom, Reduce, MuPAD, MathCAD, MATHLAB, Sage, Yacas, Scientific WorkPlace, Kalamaris)

Специализированные – предназначены для решения задач одного или нескольких смежных разделов символической математики (GAP (алгебра групп), Cadabra (тензорная алгебра), KANT (алгебра и теория чисел)).

Типовая структура СКА

Внутреннюю структуру СКА составляют:

- ядро системы,
- интерфейсная оболочка,
- библиотеки специализированных программных модулей и функций,
- пакеты расширения,
- справочная система.

Функциональное назначение блоков

Ядро содержит машинные коды реализации операторов и встроенных функций СКА, обеспечивающих выполнение аналитических преобразований математических выражений на основе системы определенных правил.

Библиотеки специализированных программных модулей и функций содержат систематизированные (по типам обрабатываемых абстрактных объектов – числа, функции, алгебры и т.п. и/или методам вычислений – аналитические, численные, смешанные) реализации алгоритмов решения типовых математических задач. Они функционально расширяют ядро СКА.

Функциональное назначение блоков

Пакеты расширения обеспечивают различные формы адаптации СКА к классам математических задач, внешнему ПО (операционным системам, графическим пакетам и т.п.) и целям пользователей.

Интерфейсные оболочки обеспечивают поддержку всех функций, необходимых для информационных и управляющих взаимодействий между системой и пользователями, в том числе: ввод, редактирование, сохранение, обмен программами, использование разных аппаратных средств.

Функциональное назначение блоков

Справочная система всех СКА содержит и обеспечивает пользователей описаниями функциональных возможностей и демонстрационными примерами работы, информационными сообщениями о текущем состоянии системы, а также сведениями о математических основах алгоритмов.

Многие СКА, по сути, являются не только инструментами для получения и анализа решений, но и математическими энциклопедиями.

Основные функциональные возможности СКА

Используя СКА, можно выполнять в аналитической форме:

- упрощение выражений до меньшего размера или приведение к стандартному виду,
- подстановки символьных и численных значений в выражения,
- изменение вида выражений: раскрытие произведений и степеней, частичная и полная факторизация (разложение на множители),
- разложение на простые дроби, удовлетворение ограничений, запись тригонометрических функций через экспоненты, преобразование логических выражений,
- нахождение пределов функций и последовательностей,

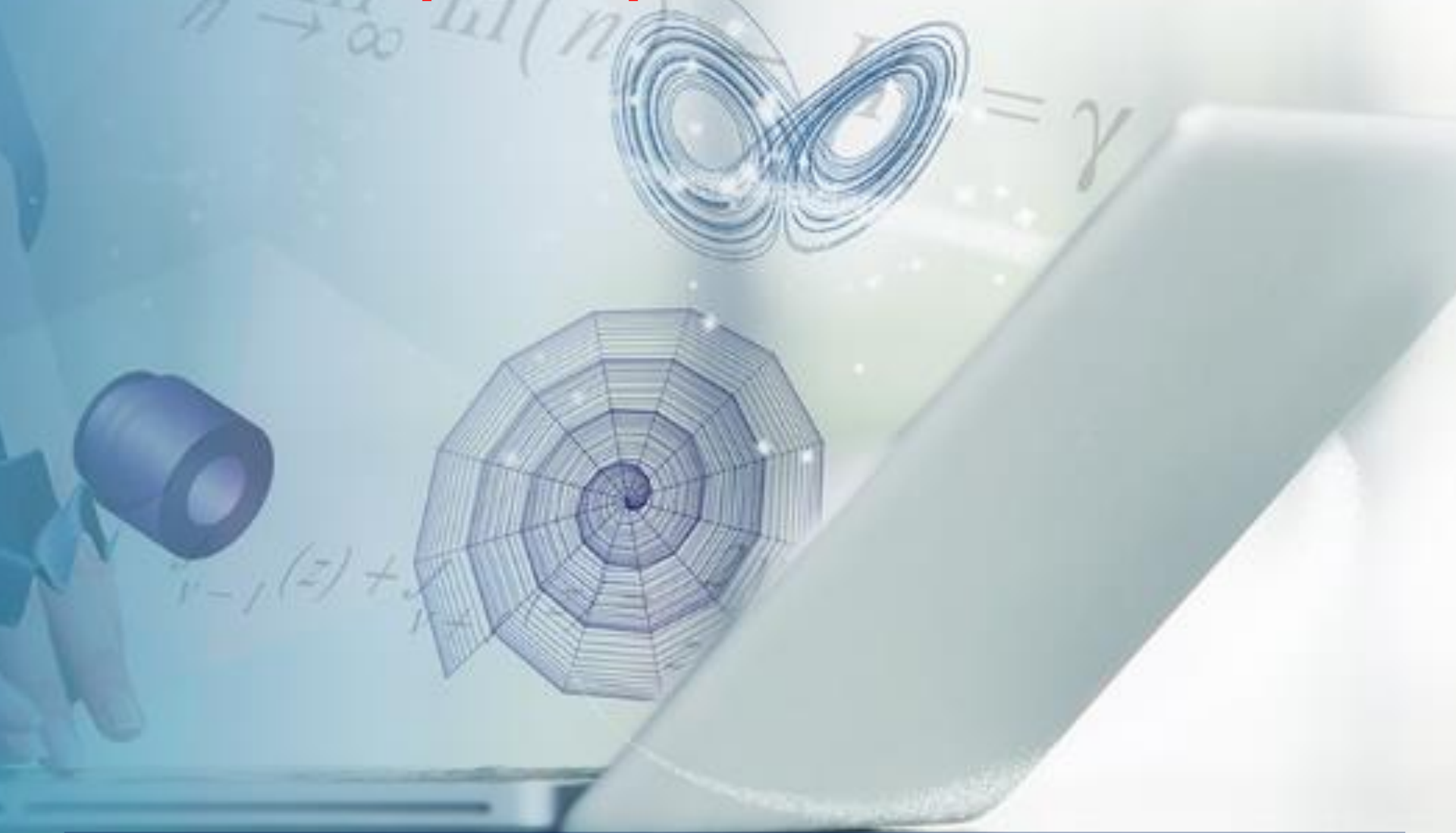
Основные функциональные возможности СКА

- операции с рядами (суммирование, умножение, суперпозиция),
- дифференцирование в частных и полных производных,
- нахождение неопределённых и определённых интегралов (символьное интегрирование),
- анализ функций на непрерывность,
- поиск экстремумов функций и асимптот,
- символьное решение задач оптимизации: нахождение глобальных экстремумов, условных экстремумов и т. д.,
- решение линейных и нелинейных уравнений,
- алгебраическое (нечисленное) решение дифференциальных и конечно-разностных уравнений,

Основные функциональные возможности СКА

- интегральные преобразования,
- прямое и обратное быстрое преобразование Фурье,
- интерполяция, экстраполяция и аппроксимация,
- операции с векторами,
- матричные операции: обращение, факторизация, решение спектральных задач,
- статистические вычисления,
- машинное доказательство теорем.

Разнообразие реализаций СКА



Является продуктом компании **Waterloo Maple Software, Inc.** (<http://www.maplesoft.com/>), которая с **1984 года** выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Maple позволяет выполнять как численные, так и аналитические расчеты с возможностью редактирования текста и формул на рабочем листе. Благодаря представлению формул в полиграфическом формате, великолепной двух- и трехмерной графике и анимации Maple является одновременно и мощным научным графическим редактором. Простой и эффективный язык-интерпретатор, открытая архитектура, возможность преобразования кодов Maple в коды **C** делает его очень эффективным средством создания новых алгоритмов. Обладает интуитивно понятным интерфейсом, простыми правилами работы и широким функционалом.

Maple



Разработчик	Waterloo Maple, Inc.
Написана на	C, язык Maple
Операционная система	Windows (7, 8 и 10), macOS, Linux
Первый выпуск	1982
Последняя версия	2017 (25 мая 2017)
Лицензия	Проприетарная
Сайт	https://www.maplesoft.com/products/maple/

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Maple_\(software\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Maple_(software))
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Maple>



Mathematica



Система Mathematica — компании **Wolfram Research, Inc.** (<http://www.wolfram.com/>) имеет чрезвычайно широкий набор средств, переводящих сложные математические алгоритмы в программы. По сути дела, все алгоритмы, содержащиеся в курсе высшей математики технического вуза, заложены в память компьютерной системы Mathematica. В некоторых странах (например, в США) система высшего образования тесно связана с этим продуктом. Огромное преимущество системы Mathematica состоит в том, что ее операторы и способы записи алгоритмов просты и естественны. Mathematica имеет мощный графический пакет, с помощью которого можно строить графики очень сложных функций одной и двух переменных. Главное преимущество Mathematica, делающее ее бесспорным лидером среди других систем высокого уровня, состоит в том, что эта система получила сегодня очень широкое распространение во всем мире, охватив огромные области применения в научных и инженерных исследованиях, а также в сфере образования.



Mathematica



Разработчик	Wolfram Research
Написана на	C
Операционная система	Microsoft Windows, OS X, Linux
Первый выпуск	23 июня 1988
Последняя версия	11.1.1 (апрель 2017)
Лицензия	Проприетарная
Сайт	http://www.wolfram.com/mathematica/

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfram Mathematica](https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Mathematica)
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Mathematica>

MathCAD



MathCAD — система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением.

MathCAD был задуман и первоначально написан **Алленом Раздовом** из **Массачусетского технологического института** (MIT), соучредителем компании **Mathsoft**, которая с 2006 года является частью корпорации **PTC** (Parametric Technology Corporation). MathCAD имеет интуитивный и простой для использования интерфейс пользователя.

Некоторые из математических возможностей MathCAD (версии до 13.1 включительно) основаны на подмножестве системы компьютерной алгебры **Maple** (МКМ, Maple Kernel Mathsoft). Начиная с 14 версии — использует символьное ядро **MuPAD** (<https://en.wikipedia.org/wiki/MuPAD>).

Работа осуществляется в пределах рабочего листа, на котором уравнения и выражения отображаются графически, в противовес текстовой записи в языках программирования. При создании документов-приложений используется принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get — «что видишь, то и получаешь»).

Несмотря на то, что эта программа, в основном, ориентирована на пользователей, не являющихся программистами, MathCAD также используется в сложных проектах, чтобы визуализировать результаты математического моделирования путём использования распределённых вычислений и традиционных языков программирования. MathCAD достаточно удобно использовать для обучения, вычислений и инженерных расчетов. Есть возможность создания электронных книг (e-Book).

MathCAD



Разработчик	Mathsoft, PTC
Операционная система	Microsoft Windows
Первый выпуск	1986
Последняя версия	15.0 M045 (ноябрь 2015), Prime 4.0 (март 2017)
Лицензия	Пропретарная
Сайт	https://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad

См. <https://en.wikipedia.org/wiki/Mathcad>
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Mathcad>



Maxima

Написана на языке **Common Lisp**. Произошла от системы Macsyma, разрабатывавшейся в **MIT** с 1968 по 1982 годы в рамках проекта Project MAC, финансируемого Министерством энергетики США (DOE) и другими государственными организациями. Профессор **Уильям Шелтер** (англ. Bill Schelter) из Техасского университета в Остине поддерживал один из вариантов системы, известный как DOE Macsyma, с 1982 года до самой своей смерти в 2001 году. В 1998 году Шелтер получил от Министерства энергетики разрешение опубликовать исходный код DOE Macsyma под лицензией GPL, и в 2000 году он создал проект на SourceForge.net (<http://maxima.sourceforge.net/>) для поддержания и дальнейшего развития DOE Macsyma под именем Maxima. Имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков.



Maxima

По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам, как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высочайшей степенью переносимости: может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных, и вплоть до самых мощных.

Для системы построено несколько графических интерфейсов пользователя и надстроек: XMaxima (включен в поставку во многих ОС), wxMaxima (основан на wxWidgets; включается в поставку для ОС Windows) и других, а также может работать в режиме командной строки (используя псевдографику). Благодаря открытому коду системы появились производные решения, например, на основе Maxima сделана программа Stack, предназначенная для автоматизированной проверки правильности математических выражений, применяемая, в частности, для компьютерной проверки ответов обучающихся математике.



Maxima

Автор	Проект MAC Массачусетского технологического института
Разработчик	Уильям Шелтер, сообщество добровольцев
Написана на	Common Lisp
Операционная система	Linux, Microsoft Windows, Mac OS X, FreeBSD, Android
Первый выпуск	1982
Последняя версия	5.40.0 (май 2017)
Лицензия	GNU GPL
Сайт	http://maxima.sourceforge.net/

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_\(software\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_(software)),
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Maxima>

Аxiом

Свободная система компьютерной алгебры. Она состоит из среды интерпретатора, компилятора и библиотеки, описывающей строгую, математически правильную иерархию типов.

Разработка системы была начата в **1971 году** группой исследователей **IBM** под руководством **Ричарда Дженкса** (Richard Dimick Jenks). Изначально система называлась Scratchpad. Первоначально проект рассматривался как исследовательская платформа для разработки новых идей в вычислительной математике.

В 90-х система была продана компании **Numerical Algorithms Group (NAG)**, получила название Аxiом и стала коммерческим продуктом. Но по ряду причин система не получила коммерческого успеха и была отозвана с рынка в октябре 2001. NAG решила сделать Аxiом свободным программным обеспечением и открыла исходные коды под **модифицированной лицензией BSD**.

Axiom

В 2007 у Axiom появились две ветки (два форка) с открытым исходным кодом: **OpenAxiom** и **FriCAS**. Разработка системы продолжается, выходят ее новые версии.

Axiom

Разработчик	Независимая группа людей
Написана на	Лисп
Операционная система	Кроссплатформенное ПО
Первый выпуск	1986
Последняя версия	Август 2014
Лицензия	Модифицированная лицензия BSD
Сайт	http://axiom-developer.org

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_\(computer_algebra_system\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_(computer_algebra_system))
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Axiom>

Reduce

Reduce — бесплатная система компьютерной алгебры общего назначения, имеющая расширенные возможности для применения в физике.

Разработку начал в 1960-е годы **Энтони Хёрн** (Anthony C. Hearn), позднее к созданию системы присоединились и другие учёные. Система написана целиком на специально созданном для неё языке **Portable Standard Lisp** — диалекте Лиспа, включающим, в дополнении к языку со стандартным скобочным лисп-синтаксисом, специальный язык RSL с алголоподобным синтаксисом. RSL используется как основа для пользовательского языка системы.

С декабря 2008 года Reduce стал доступен бесплатно как открытое программное обеспечение под видоизменённой **лицензией BSD license** на сайте **SourceForge**, до этого пакет стоил 695 долларов.

Reduce

Reduce имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высокой степенью переносимости: она может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных компьютеров, вплоть до самых мощных.

Доступна на различных платформах Unix, Linux, Microsoft Windows, Apple Macintosh, iOS и Android. Почти все эти реализации основаны на Portable Standard Lisp или Codemist Standard Lisp.

Разработка системы продолжается, выходят ее новые версии.

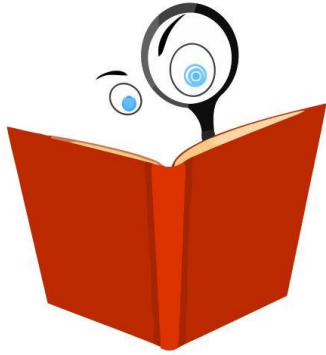
Reduce

Разработчик	Anthony C. Hearn et al.
Написана на	Лисп
Операционная система	Кроссплатформенное ПО
Последняя версия	Апрель 2011
Лицензия	лицензия BSD
Сайт	http://reduce-algebra.com

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Reduce_\(computer_algebra_system\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Reduce_(computer_algebra_system)),
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Reduce>

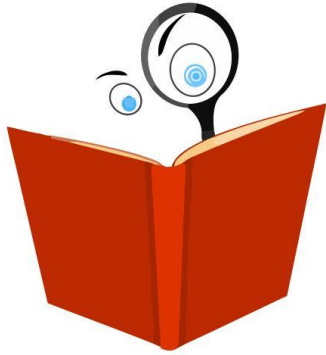
Литература и Internet-источники

- *Таранчук В. Б.* Основные функции систем компьютерной алгебры. — Минск: БГУ, 2013.
<http://elib.bsu.by/handle/123456789/46210>
- Современные системы компьютерной математики
<http://compress.ru/article.aspx?id=12530> – (Дата обращения: 29.08.2017).
- <https://en.wikipedia.org/wiki/>
- <https://ru.wikipedia.org/wiki/>



Словарь терминов

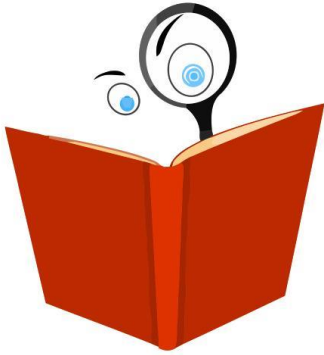
GNU General Public License – (*Универсальная общедоступная лицензия GNU* или *Открытое лицензионное соглашение GNU*) — наиболее популярная лицензия на свободное программное обеспечение, созданная в рамках проекта GNU в 1988 г. Её также сокращённо называют **GNU GPL** или даже просто **GPL**, если из контекста понятно, что речь идёт именно о данной лицензии.



Словарь терминов

GPL лицензия предоставляет получателям компьютерных программ следующие права, или «свободы»:

- 1) свободу запуска программы, с любой целью;
- 2) свободу изучения того, как программа работает, и её модификации (предварительным условием для этого является доступ к исходному коду);
- 3) свободу распространения копий;
- 4) свободу улучшения программы, и выпуска улучшений в публичный доступ (предварительным условием для этого является доступ к исходному коду).

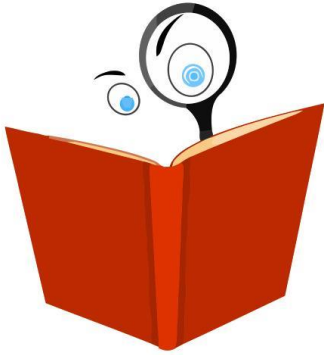


Словарь терминов

Лицензия BSD ([англ.](#) *BSD license, Berkeley Software Distribution license* — *Программная лицензия университета Беркли*) — это лицензионное соглашение, впервые применённое для распространения UNIX-подобных операционных систем BSD.

Существуют две основные версии лицензии BSD: «оригинальная» и так называемая «модифицированная» (вторую в англоязычной литературе часто называют New BSD License).

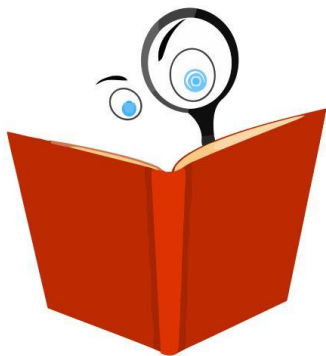
Эти лицензии были подвергнуты ряду изменений, породив множество лицензий, обобщённо именуемых «лицензии типа BSD».



Словарь терминов

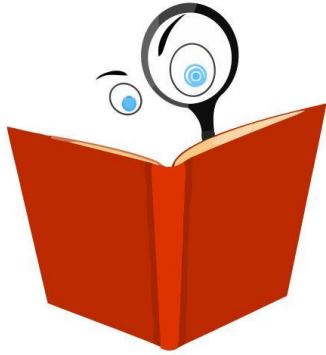
«В настоящее время лицензии типа BSD являются одними из самых популярных лицензий для свободного программного обеспечения и используются для многих программ (помимо BSD-версий UNIX, для которых лицензия BSD была изначально создана).»

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B8%D1%86%D0%B5%D0%BD%D0%B7%D0%B8%D1%8F_BSD



Словарь терминов

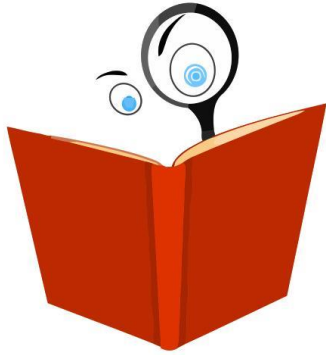
Алгебра (от арабского «аль-джабр», «воссоединение», «связь», «завершение» — раздел математики, который можно охарактеризовать как обобщение и расширение арифметики. Слово «алгебра» также употребляется в названиях различных алгебраических систем. В более широком смысле под алгеброй понимают раздел математики, посвящённый изучению операций над элементами множества произвольной природы, обобщающих обычные операции сложения и умножения чисел.



Словарь терминов

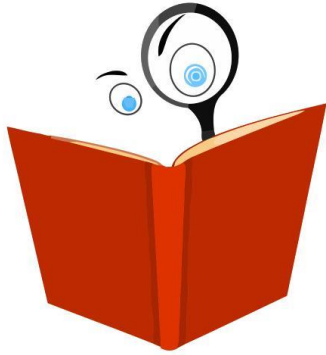
Интерфейс, interface — внешний вид класса, объекта или модуля, выделяющий его существенные черты и не показывающий внутреннего устройства и секретов поведения.

Кроссплатформенность — свойство программных комплексов, позволяющее им работать в разных операционных системах.



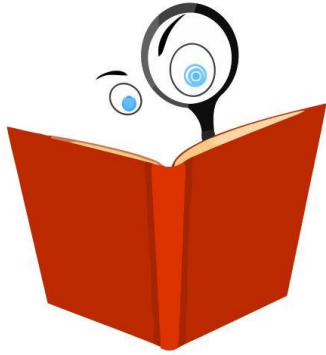
Словарь терминов

Компьютерная алгебра — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Термин «компьютерная алгебра» возник как синоним терминов «символьные вычисления», «аналитические вычисления», «аналитические преобразования» и т.д. Даже в настоящее время этот термин на французском языке дословно означает «формальные вычисления».



Словарь терминов

Свободное программное обеспечение — программное обеспечение, в отношении которого пользователь обладает «четырьмя свободами»: запускать, изучать, распространять и улучшать программу. Распространяется под свободными лицензиями, например GPL.



Словарь терминов

Системы компьютерной алгебры (СКА), (или системы символьных вычислений) — такие программные продукты, как Maxima, Maple, Mathematica, Reduce, MuPAD, Derive, Magma, Macsyma, Mathomatic, Axiom, GAP, FreeMat, Octave, Scilab, YACAS и другие.