Лекция № 4

Решение типовых задач математического анализа в MathCAD

В MathCAD может быть достаточно просто организовано решение типовых задач математического анализа, используя возможности символьного процессора. Символьный процессор MathCAD позволяет выполнять:

– дифференцирование выражений, построение производных любых порядков,
– аналитическое определение первообразной (интегрирование выражений относительно заданной переменной),
– аналитическое вычисление определенного интеграла,
– символьное вычисление кратных интегралов,
– аналитическое вычисление предела,
– аналитическое вычисление суммы конечного или бесконечного ряда,
– аналитическое вычисление произведения членов конечного или бесконечного ряда,
– разложение функций в ряд Тейлора, в ряд Фурье,
– символьное преобразование Фурье и Лапласа (прямое и обратное).

Операции дифференцирования, интегрирования и разложения в ряд над выражением относительно заданной переменной могут быть выполнены с использованием меню **Symbolics / Variable** (Символика / Переменная), рис. 1.

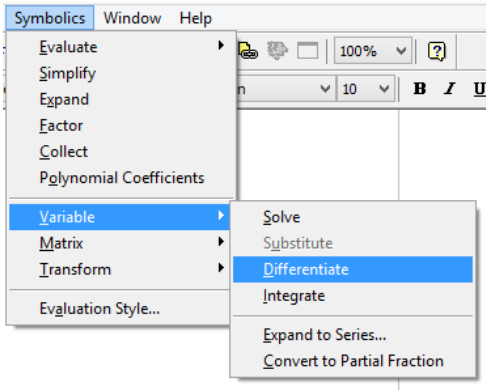


Рис. 1. Операции дифференцирования (Differentiate), интегрирования (Integrate) и разложения в ряд (Expand to Series)

Примеры дифференцирования выражения с помощью меню приведены на рис. 2. В первой строке – результат дифференцирования выражения по переменной *y*, во второй – по переменной *x*. К сожалению, комментарии к выполненному действию, отображаемые системой, не содержат указания на то, относительно какой переменной выполнено вычисление.

$$\frac{\sin(x+y)}{x^2+\sqrt{y}} \quad \text{by differentiation, yields} \quad \frac{\cos(x+y)}{x^2+\sqrt{y}} - \frac{\sin(x+y)}{2\cdot\sqrt{y}\cdot\left(x^2+\sqrt{y}\right)^2}$$

$$\frac{\sin(x+y)}{x^2+\sqrt{y}} \quad \text{by differentiation, yields} \quad \frac{\cos(x+y)}{x^2+\sqrt{y}} - \frac{2\cdot x\cdot\sin(x+y)}{\left(x^2+\sqrt{y}\right)^2}$$

Рис. 2. Результат дифференцирования выражения

Замечание 1. При использовании команд меню **Symbolics / Variable** в области с выражением необходимо выделить переменную, относительно которой требуется выполнить операцию.

Что касается панели **Symbolic** (Символика) (рис. 3), то на ней размещены отдельные кнопки следующего назначения:

series	Разложение в ряд
fourier invfourier	Прямое, Обратное преобразования Фурье
laplace invlaplace	Прямое, Обратное преобразования Лапласа
ztrans invztrans	Прямое, Обратное Z-преобразование

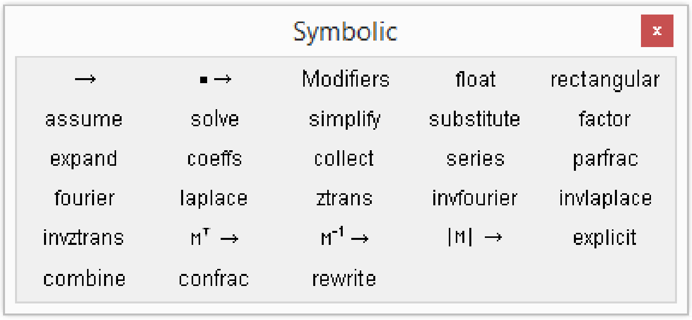


Рис. 3. На панели **Symbolic** (Символика)

Необходимые для математической записи действий, перечисленных в начале лекции, операторы дифференцирования, интегрирования, суммирования, произведения, предела размещены на панели **Calculus** (Вычисления) математической палитры **Math** (Математика).

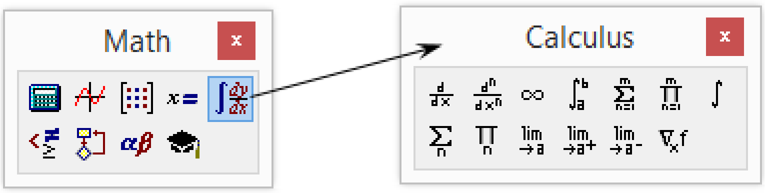
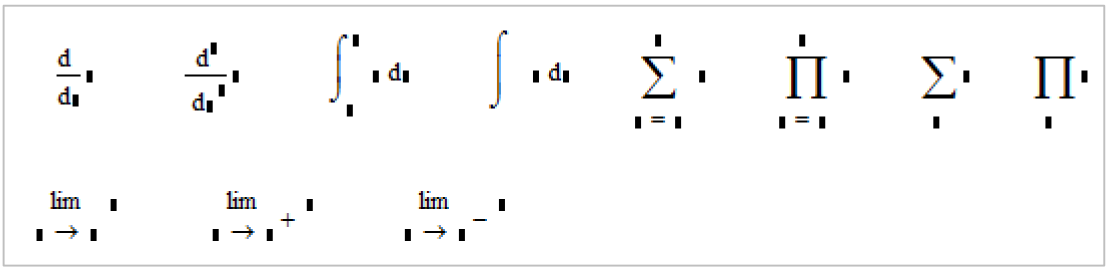


Рис. 4. Математические операторы на панели **Calculus** (Вычисления)

Выбор любого из них (кроме кнопки ∞ «бесконечность» для вставки одноименного символа) приводит к выводу шаблона соответствующего оператора:



После этого необходимо заполнить все «знакоместа», задавая необходимые операнды.

Для получения результата в символьной форме используется оператор символьного вывода. При этом могут быть использованы ключевые слова для преобразования результата (например, **simplify**) или уточнения условий вычисления (например, **assume, substitute, explicit**).

1. Вычисление сумм и произведений

Вычисление суммы конечного числового ряда

$1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \ldots + N\cdot 2^N$	$\sum_{n=1}^{N} \left(n\cdot 2^n\right) \rightarrow 2^{N+1}\cdot(N-1)+2$
$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^N$	$\sum_{n=0}^{N} a^n \text{ fully} \rightarrow \begin{cases} N+1 & \text{if } a = 1 \\ \dfrac{a^{N+1}-1}{a-1} & \text{if } a \neq 1 \end{cases}$

Сумма N первых членов арифметической прогрессии (a_1 – первый член прогрессии, d – разность):

$$\sum_{n=1}^{N} \left[a_1 + (n-1)\cdot d\right] \rightarrow N\cdot a_1 - d\cdot\left[N - \frac{N\cdot(N+1)}{2}\right] \text{ simplify } \rightarrow \frac{N\cdot\left(2\cdot a_1 - d + N\cdot d\right)}{2}$$

Сумма N первых членов геометрической прогрессии (b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель):

$$\sum_{n=1}^{N} \left(b_1\cdot q^{n-1}\right) \rightarrow \frac{b_1\cdot\left(q^N - 1\right)}{q-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_1\cdot q^{n-1}\right) \rightarrow \begin{cases} b_1\cdot\infty & \text{if } 1 \le q \\ -\dfrac{b_1}{q-1} & \text{if } q \neq 1 \wedge |q| < 1 \end{cases}$$

Вычисление суммы бесконечного числового ряда

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \rightarrow \frac{\pi}{4}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ гармонический ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$
$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) \rightarrow e$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \rightarrow \frac{3}{4} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(2n+1)} \rightarrow \frac{5}{3} - 2\cdot\ln(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(n+2)^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}$$

Сумма бесконечного числа членов геометрической прогрессии (b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_1\cdot q^{n-1}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} b_1\cdot\infty & \text{if } 1 \le q \\ -\dfrac{b_1}{q-1} & \text{if } q \ne 1 \wedge |q| < 1 \end{vmatrix}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_1\cdot q^{n-1}\right) \text{ assume}, q > -1, q < 1 \rightarrow -\frac{b_1}{q-1}$$

Вычисление суммы бесконечного функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \rightarrow e^x \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!} \rightarrow \cos(x) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n} \rightarrow \ln(x+1)$$

Вычисление произведений

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \frac{1}{2} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\cdot(2n+7)}{(2n+3)\cdot(2n+5)} \rightarrow \frac{3}{7} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}\right) \rightarrow \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{3}}{9}$$

2. Вычисление пределов последовательностей и функций

Вычисление предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \rightarrow \ln(2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n}{1+b+b^2+b^3+\ldots+b^n}\right) \qquad (|a| < 1, |b| < 1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b^k} \text{ assume}, a < 1, a > -1, b < 1, b > -1 \rightarrow \frac{b-1}{a-1}$$

$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \ldots + \left[x + \frac{(n-1) \cdot a}{n} \right] \right] \right]$	$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left(x + \frac{k \cdot a}{n} \right) \right] \to \frac{a}{2} + x$

Вычисление предела функции

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{x^2} \right) \to \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{(1+x)^a - 1}{x} \right] \to a \qquad \lim_{x \to 0^+} \left(x^a \cdot \ln(x) \right) \text{ assume}, a > 0 \to 0$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} \right) \to \frac{1}{4} \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - 1 - x}{x} \right) \to -2$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}} \right) \to \frac{7}{36} \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} \to 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left(\frac{2\sin(x)^2 + \sin(x) - 1}{2\sin(x)^2 - 3\sin(x) + 1} \right) \to -3 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right) - \sin\left(\sqrt{x}\right) \right) \to 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\ln(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln\left(\frac{\ln(a \cdot x)}{\ln\left(\frac{x}{a}\right)} \right) \right) \text{ assume}, a > 1 \to 2 \cdot \ln(a) \qquad \lim_{x \to 1^+} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{1-x} \right) \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \lim_{y \to \infty} \left[\frac{x + y}{x^2 - \left(x \cdot y + y^2 \right)} \right] \to 0 \qquad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \left(x^2 + y^2 \right)^{x^2 \cdot y^2} \to 1$$

$$\lim_{x \to 1} \lim_{y \to 0} \frac{\ln\left(x + e^y\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to \ln(2) \qquad \lim_{x \to \infty} \lim_{y \to 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}} \to e$$

Нахождение производной по определению

Рассмотрим несколько изящных примеров, показывающих возможности вычисления пределов и одновременно красиво демонстрирующих основы математического анализа – нахождение производной классическим способом как предела отношения приращения функции к приращению аргумента при неограниченном уменьшении последнего.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to \dfrac{d}{dx} f(x)$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} \to a^x \cdot \ln(a)$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \to \cos(x)$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\log(x+\Delta x, a) - \log(x, a)}{\Delta x} \to \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\tan(x+\Delta x) - \tan(x)}{\Delta x} \to \tan(x)^2 + 1 \;\Big\vert\; \begin{matrix} \text{rewrite}, \cos \\ \text{expand} \end{matrix} \to \dfrac{1}{\cos(x)^2}$	

Приведем пример вычисления для функции нескольких переменных частных производных первого порядка, опираясь на определение:

$$f(x,y) := \frac{y}{x} \cdot \cos(x+y)^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \;\text{simplify}\; \to -\frac{y \cdot \cos(x+y)^2 + x \cdot y \cdot \sin(2 \cdot x + 2 \cdot y)}{x^2}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \;\text{simplify}\; \to \frac{\cos(x+y)^2 - y \cdot \sin(2 \cdot x + 2 \cdot y)}{x}$$

А создав функции пользователя для вычисления частных производных, для заданной функции к ним можно будет обратиться следующим образом:

$$D_x(f) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad D_y(f) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$h(x,y) := \frac{y}{x} \cdot \cos(x+y)^2$$

$$D_x(h) \;\text{simplify}\; \to -\frac{y \cdot \cos(x+y)^2 + x \cdot y \cdot \sin(2 \cdot x + 2 \cdot y)}{x^2}$$

$$D_y(h) \;\text{simplify}\; \to \frac{\cos(x+y)^2 - y \cdot \sin(2 \cdot x + 2 \cdot y)}{x}$$

В следующем разделе будут приведены и другие способы вычисления производных с использованием специальных операторов MathCAD.

3. Дифференцирование по заданной переменной

Вычисление производной

Для вычисления производной функции или выражения по заданной переменной можно использовать оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ с панели **Calculus** (Вычисления).

$$\frac{d}{dx}(\lambda \cdot F(x)) \rightarrow \lambda \cdot \frac{d}{dx}F(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x)) \rightarrow \alpha \cdot \frac{d}{dx}F(x) + \beta \cdot \frac{d}{dx}G(x)$$

$$\frac{d}{dx}(F(x) \cdot G(x)) \rightarrow F(x) \cdot \frac{d}{dx}G(x) + \frac{d}{dx}F(x) \cdot G(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right) \text{ simplify } \rightarrow -\frac{F(x) \cdot \frac{d}{dx}G(x) - \frac{d}{dx}F(x) \cdot G(x)}{G(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2 \cdot x}{1 - x^2}\right) \rightarrow \frac{4 \cdot x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} - \frac{2}{x^2 - 1} \text{ simplify } \rightarrow \frac{2 \cdot \left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

Следующий пример иллюстрирует применение оператора дифференцирования к функции пользователя и вычисления производной функции в заданной точке:

$$y(x) := \frac{\left(2 - x^2\right) \cdot \left(2 - x^3\right)}{(1 - x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow \frac{2 \cdot x \cdot \left(x^3 - 2\right)}{(x - 1)^2} - \frac{2 \cdot \left(x^2 - 2\right) \cdot \left(x^3 - 2\right)}{(x - 1)^3} + \frac{3 \cdot x^2 \cdot \left(x^2 - 2\right)}{(x - 1)^2} \text{ simplify } \rightarrow 4 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \frac{5}{(x - 1)^2} - \frac{2}{(x - 1)^3} + 1$$

$$\frac{d}{dx}y(x) \text{ substitute}, x = 0 \rightarrow 8$$

$$d(x) := \frac{d}{dx}y(x) \qquad d(0) \rightarrow 8 \qquad d(a + 2) \text{ simplify } \rightarrow \frac{3 \cdot a^5 + 25 \cdot a^4 + 78 \cdot a^3 + 114 \cdot a^2 + 84 \cdot a + 24}{(a + 1)^3}$$

Правило дифференцирования сложных функций в общем виде и для конкретной функции иллюстрирует следующий фрагмент MathCAD-документа:

Производная сложной функции

$$\frac{d}{dx}F(\phi(x)) \rightarrow \frac{d}{dx}\phi(x) \cdot \left| \begin{array}{l} x0 \leftarrow \phi(x) \\ \frac{d}{dx0}F(x0) \end{array} \right.$$

$$h(x) := (x - 1)^2 \qquad \frac{d}{dx}h(x) \rightarrow 2 \cdot x - 2 \qquad \frac{d}{dx}h(\sin(x)) \rightarrow 2 \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x) - 1)$$

Вычисление производного заданного порядка последовательным дифференцированием

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\sin(x)\right)\right] \rightarrow -\sin(x)-\frac{1}{4\cdot x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(x\cdot\sqrt{1+x^2}\right)\right]\right] \text{ simplify } \rightarrow \frac{3}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f(x) := x^2\cdot\sin(2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\right]\right]\right]\right]\right]\right] \rightarrow 256\cdot x^2\cdot\sin(2\cdot x)-2048\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)-3584\cdot\sin(2\cdot x)$$

Вычисление производной заданного порядка с помощью оператора $\frac{d^{\blacksquare}}{d_{\blacksquare}^{\blacksquare}}\blacksquare$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(x\cdot\sqrt{1+x^2}\right) \text{ simplify } \rightarrow \frac{3}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f(x) := x^2\cdot\sin(2x)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}f(x) \text{ simplify } \rightarrow 12\cdot\cos(2\cdot x)-24\cdot x\cdot\sin(2\cdot x)-8\cdot x^2\cdot\cos(2\cdot x)$$

$$\frac{d^8}{dx^8}f(x) \rightarrow 256\cdot x^2\cdot\sin(2\cdot x)-2048\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)-3584\cdot\sin(2\cdot x)$$

$$\frac{d^{50}}{dx^{50}}f(x) \text{ factor } \rightarrow -562949953421312\cdot\left(2\cdot x^2\cdot\sin(2\cdot x)-100\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)-1225\cdot\sin(2\cdot x)\right)$$

$$562949953421312 \text{ factor } \rightarrow 2^{49}$$

Вычисление частной производной

Вычисление частных проиозводных с помощью операторов $\frac{d}{d_{\blacksquare}}\blacksquare$, $\frac{d^{\blacksquare}}{d_{\blacksquare}^{\blacksquare}}\blacksquare$

$$f(x,y) := y\cdot\cos\left(x+y^2\right)$$

$$\frac{d}{dx}f(x,y) \text{ simplify } \rightarrow -y\cdot\sin\left(y^2+x\right)$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y) \text{ simplify } \rightarrow \cos\left(y^2+x\right)-2\cdot y^2\cdot\sin\left(y^2+x\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \text{ simplify } \rightarrow -y\cdot\cos\left(y^2+x\right)$$

$$\frac{d^2}{dy^2}f(x,y) \text{ simplify } \rightarrow -6\cdot y\cdot\sin\left(y^2+x\right)-4\cdot y^3\cdot\cos\left(y^2+x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}f(x,y) \text{ simplify } \rightarrow -\sin\left(y^2+x\right)-2\cdot y^2\cdot\cos\left(y^2+x\right)$$

Вычисление частных проиозводных первого порядка с помощью оператор градиента $\nabla_{\blacksquare}\blacksquare$

$$f(x,y) := y\cdot\cos\left(x+y^2\right)$$

$$\nabla_x f(x,y) \rightarrow -y\cdot\sin\left(y^2+x\right)$$

$$\nabla_y f(x,y) \rightarrow \cos\left(y^2+x\right)-2\cdot y^2\cdot\sin\left(y^2+x\right)$$

$$h(x,y) := \left(\frac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x^2}{y}}$$

$$\nabla_x h(x,y) \text{ simplify } \rightarrow \frac{e^{\frac{x^2}{y}}\cdot\left(2\cdot x^2+y\right)}{y^2}$$

$$\nabla_y h(x,y) \rightarrow -\frac{x^3\cdot e^{\frac{x^2}{y}}}{y^3}-\frac{x\cdot e^{\frac{x^2}{y}}}{y^2}$$

Ответить на вопрос, является ли функция $z = e^y \cdot \Phi\left(y \cdot e^{x^2/2y^2}\right)$, где $\Phi(t)$ - произвольная дифференцируемая функция, решением дифференциального уравнения с частными производными первого порядка $(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$, можно следующим образом

$$z(x,y) := e^y \cdot \Phi\left(y \cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) \qquad \left(x^2 - y^2\right)\cdot\nabla_x z(x,y) + x\cdot y\cdot\nabla_y z(x,y) - x\cdot y\cdot z(x,y) \text{ simplify } \rightarrow 0$$

Вычисление градиента функции

$$f(x,y) := x\cdot\sin(x\cdot y) + y$$

$$\nabla_x f(x,y) \rightarrow \sin(x\cdot y) + x\cdot y\cdot\cos(x\cdot y) \qquad \nabla_y f(x,y) \rightarrow x^2\cdot\cos(x\cdot y) + 1$$

Градиент функции:

$$\nabla_{x,y} f(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(x\cdot y) + x\cdot y\cdot\cos(x\cdot y) \\ x^2\cdot\cos(x\cdot y) + 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} f(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(x\cdot y) + x\cdot y\cdot\cos(x\cdot y) \\ x^2\cdot\cos(x\cdot y) + 1 \end{pmatrix}$$

Градиент функции в точке:

$$x := \frac{\pi}{3} \qquad y := -1$$

$$\nabla_{x,y} f(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi^2}{18} + 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla_{x,y} f(x,y) \text{ substitute}, x = \frac{\pi}{3}, y = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi^2}{18} + 1 \end{pmatrix}$$

4. Интегрирование по заданной переменной

Вычисление неопределенного интеграла

Для вычисления неопределенного интеграла функции или выражения можно использовать оператор интегрирования $\int$ с панели **Calculus** (Вычисления).

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx \rightarrow x - 2\cdot\ln(x) - \frac{1}{x} \qquad \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos(2x)}} dx \rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{asin}\left(\sqrt{2}\cdot\sin(x)\right)}{2}$$

$$\int \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx \rightarrow \frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{2} - \frac{\ln\left(x^2 + 2\right)}{2}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2\cdot(x+b)^2}\,dx \to \frac{2\cdot\ln\left(\frac{a+x}{b+x}\right)}{(a-b)^3} - \frac{2}{(a-b)^2\cdot(a+x)} - \frac{1}{(a-b)\cdot(a+x)\cdot(b+x)}$$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \to -\sqrt{1-x^2}\cdot\left[\frac{\left(x^2-1\right)^2}{5}+\frac{2\cdot x^2}{3}+\frac{1}{3}\right] \text{ simplify } \to -\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(3\cdot x^4+4\cdot x^2+8\right)}{15}$$

Вычисление определенного интеграла

Для вычисления определенного интеграла функции или выражения можно использовать оператор интегрирования $\int_a^b$ с панели **Calculus** (Вычисления).

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \to \frac{\pi}{3} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos(x))\cdot(3+\cos(x))}\,dx \to -\frac{\pi\cdot\left(3\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{3}\right)}{6}$$

$$\int_a^b \frac{x}{x+2}\,dx \to \left|\begin{array}{l} b-a+2\cdot\ln(a+2)-2\cdot\ln(b+2) \ \text{ if } \ a \ge -2 \vee -2 \ge b \\ \text{undefined} \ \text{ otherwise} \end{array}\right.$$

Вычисление несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\cdot\sqrt{1-x}}\,dx \to \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{\infty} e^{-a\cdot x}\cdot\sin(b\cdot x)\,dx \text{ assume}, a>0, b = \text{real} \to \frac{b}{a^2+b^2} \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx \to \frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{2}$$

Вычисление кратных интегралов

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dy\,dx \to 1 \qquad \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\cdot y^2\,dy\,dx \to \frac{1}{40} \qquad \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2\cdot\sin(\phi)^2\,dr\,d\phi \to \frac{\pi\cdot a^3}{3}$$

Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра

$$\frac{d}{dy}\left(\int_0^y \cos(x\cdot y)\,dx\right) \to 2\cdot\cos\left(y^2\right) - \frac{\sin\left(y^2\right)}{y^2}$$

5. Разложение функции в ряд Тейлора

Разложение функции в ряд Тейлора может быть выполнено с помощью оператора символьного вывода с ключевым словом **series** с панели **Symbolic**. К ключевому слову через запятую можно добавить модификаторы, указывающие:

- относительно какой переменной надо выполнить разложение (например, **series, x**),
- по степеням какой разности (например, **series, x** = a - в случае степени ((*x* – *a*)), следует выполнить разложение,
- число членов ряда (например, **series, x, 6**).

Примеры разложений

$$\frac{x}{e^{x}-1}\ \text{series}\ \rightarrow 1-\frac{x}{2}+\frac{x^{2}}{12}-\frac{x^{4}}{720}$$

$$f(x) := \sqrt{1-2x+x^{3}}-\sqrt[3]{1-3x+x^{2}} \qquad f(x)\ \text{series},4\ \rightarrow \frac{x^{2}}{6}+x^{3}+\frac{119\cdot x^{4}}{72}+\frac{239\cdot x^{5}}{72}$$

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\ \text{series},9\ \rightarrow -\frac{x^{2}}{6}-\frac{x^{4}}{180}-\frac{x^{6}}{2835}-\frac{x^{8}}{37800}-\frac{x^{10}}{467775}$$

$$x^{3}+x^{2}-5\sin(x)+4\ \text{series},x=2,4\ \rightarrow -5\cdot\sin(2)+16-(5\cdot\cos(2)-16)\cdot(x-2)+\left(\frac{5\cdot\sin(2)}{2}+7\right)\cdot(x-2)^{2}+\left(\frac{5\cdot\cos(2)}{6}+1\right)\cdot(x-2)^{3}$$

$$\sin(x)\ \text{series},x=1,6\ \rightarrow \sin(1)+\cos(1)\cdot(x-1)-\frac{\sin(1)\cdot(x-1)^{2}}{2}-\frac{\cos(1)\cdot(x-1)^{3}}{6}+\frac{\sin(1)\cdot(x-1)^{4}}{24}+\frac{\cos(1)\cdot(x-1)^{5}}{120}$$

$$f(x) := \ln\left(\frac{1}{2+2x+x^{2}}\right) \qquad f(x)\ \text{series},x=-1\ \rightarrow -(x+1)^{2}+\frac{(x+1)^{4}}{2}-\frac{(x+1)^{6}}{3}$$

Использованная и рекомендуемая литература и Internet-источники

1. Дьяконов В. MATHCAD 8/2000: специальный справочник. – СПб.: Изд-во «Питер», 2000.
2. Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCAD 2001. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
3. Ивановский Р.И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCAD Pro. – М.: Высш. шк., 2003.
4. https://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad
5. https://studfiles.net/preview/5725700/page:11/ (Дата обращения: 18.09.2017).
6. http://itmu.vsuet.ru/Posobija/MathCAD/gl05/index.htm (Дата обращения: 18.09.2017).
7. http://samoychiteli.ru/document20841.html (Дата обращения: 18.09.2017).
8. http://bourabai.ru/einf/mathcad/ch05.htm (Дата обращения: 18.09.2017).