Лекция № 3

Матричные вычисления в MathCAD

Символьный процессор MathCAD позволяет выполнять самые разные матричные вычисления. При этом к матричным вычислениям можно применять рассмотренную ранее команду упрощения из меню символьных вычислений **Symbolics / Simplify** (Символика / Упростить) или оператор символьного вывода с ключевым словом **simplify**.

Имеется ряд матричных операций, которые можно организовать с помощью пункта меню **Symbolics / Matrix** (Символика / Матрица), либо помощью нескольких кнопок на панели **Symbolic** (Символика), относящихся к матрицам (см. рис. 1).

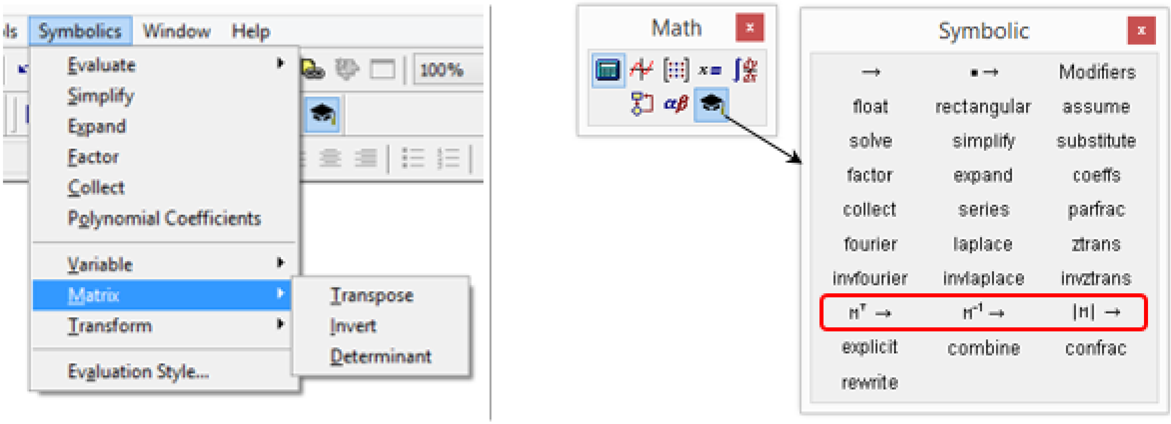

Рис. 1. Матричные операции

Это такие операции, как:

▪ **Transpose** (Транспонирование)	$M^T \rightarrow$
▪ **Invert** (Обратная матрица)	$M^{-1} \rightarrow$
▪ **Determinant** (Определитель)	$\lvert M \rvert \rightarrow$

Замечание 1. Выполняются действия с матрицами в той же последовательности, что и рассмотренные символьные операции со скалярными переменными. Перед их применением следует выделить в выражении матрицу, к которой будет относится операция.

Замечание 2. Обращение, транспонирование и вычисление определителя матриц можно осуществить с помощью набора векторно-матричных операций, входящих в математическую палитру (рис. 2).

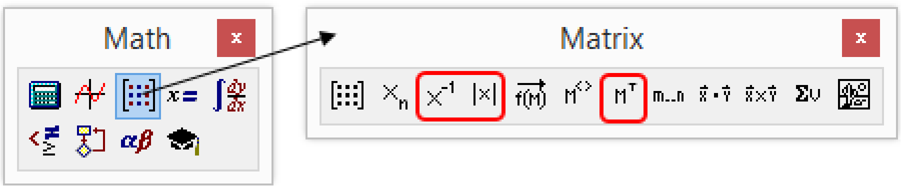

Рис. 2. Матричные операции математической палитры

Примеры типовых матричных операций в символьной форме приведены на рис. 3 и рис.4.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ b+1 & \sin(a) & \sqrt{2} \\ 0 & a & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad \text{by matrix transposition, yields} \quad \begin{pmatrix} 2 & b+1 & 0 \\ -1 & \sin(a) & a \\ a & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & a \end{pmatrix} \quad \text{by matrix inversion, yields} \quad \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b} & -\frac{b}{a^2+b} \\ \frac{1}{a^2+b} & \frac{a}{a^2+b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & 2a & 2 \\ 2 & 2 & -a \end{pmatrix} \quad \text{has determinant} \quad 2 \cdot a^2 + 4$$

Рис. 3. Результат выполнения матричных операций с помощью пунктов меню **Symbolics / Matrix**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ b+1 & \sin(a) & \sqrt{2} \\ 0 & a & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & b+1 & 0 \\ -1 & \sin(a) & a \\ a & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & a \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b} & -\frac{b}{a^2+b} \\ \frac{1}{a^2+b} & \frac{a}{a^2+b} \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & 2a & 2 \\ 2 & 2 & -a \end{pmatrix}\right| \rightarrow 2 \cdot a^2 + 4$$

Рис. 4. Результат выполнения матричных операций с помощью панели **Symbolic**

Матричные вычисления можно условно разделить на несколько типов. Первый тип – это простейшие действия, которые реализованы операторами и несколькими функциям, предназначенными для создания, объединения, сортировки, получения основных свойств матриц и т. п. Второй тип – это более сложные функции, которые реализуют алгоритмы вычислительной линейной алгебры, такие как решение систем линейных уравнений, вычисление собственных векторов и собственных значений, различные матричные разложения.

1. Простейшие операции с матрицами

В системах MathCAD определены все виды матричных (векторных) операций, предусмотренных канонами линейной алгебры. Кроме того, введены такие необычные операции, как, например, суммирование вектора и матрицы со скаляром, векторизация вычислений и т.д. Простейшие операции матричной алгебры реализованы в MathCAD в виде операторов. Написание операторов по смыслу максимально приближено к их математическому действию. Каждый оператор выражается соответствующим символом. Для задания отдельных операторов можно использовать панель **Matrix** (Матрица) (рис. 2). Матрицу можно сформировать с помощью шаблона, вставляемого в документ по нажатию кнопки .

1.1. Векторные и матричные операторы

Транспонирование векторов[1] и матриц

$$\begin{pmatrix} a \\ \sin(a+b) \\ -2 \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} a & \sin(a+b) & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{1+\sqrt{3}} \\ A & -2 & B \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & A \\ \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{\sqrt{3}+1} & B \end{pmatrix}$$

Сложение и вычитание матриц

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{5} \\ a & b & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{5} \\ 2a & 3b & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2\cdot\sqrt{5} \\ 3\cdot a & 4\cdot b & 1 \end{pmatrix} \qquad A - B \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -a & -2\cdot b & -3 \end{pmatrix}$$

Сложение (вычитание) матрицы со скаляром

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 2\cdot a & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad x := 2$$

$$A + x \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 2\cdot a + 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \qquad A - x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 2\cdot a - 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A + a \rightarrow \begin{pmatrix} a+2 & a+6 & a-4 \\ 3\cdot a & a+3 & a+9 \end{pmatrix} \qquad A - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{9}{2} \\ 2\cdot a - \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

Смена знака матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad -A \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

[1] Вектор является частным случаем матриц размерности $N \times 1$.

При умножении следует помнить, что матрицу размерности $N \times M$ допустимо умножать только на матрицу размерности $M \times K$. В результате получается матрица размерности $N \times K$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sqrt{2} & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \rightarrow$ (Недопустимая размерность перемножаемых матриц)

$$A \cdot B^T \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot \sqrt{3} + 5 & 4 \\ \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{3} - 2 & 2 \cdot \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

Умножение вектора и строки

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow 25 \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \cdot \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 5 \cdot \sqrt{2} & 25 & -5 \\ 2 \cdot \sqrt{2} & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Умножение (деление) матрицы на скаляр

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 2 \cdot a & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad x := 2$$

$$A \cdot x \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ 4 \cdot a & 6 & 18 \end{pmatrix} \qquad \frac{A}{x} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ a & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Обращение матрицы

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 2 \\ 1 & -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3} - 2} & -\frac{\sqrt{3} - 2}{3 \cdot \sqrt{3} - 2} & \frac{12 \cdot \sqrt{3} - 8}{19 \cdot \sqrt{3} - 5} \\ -\frac{2}{3 \cdot \sqrt{3} - 2} & \frac{5}{3 \cdot \sqrt{3} - 2} & \frac{2 \cdot \sqrt{3} + 6}{\sqrt{3} + 7} \\ \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3} - 2} & -\frac{\sqrt{3} + 1}{3 \cdot \sqrt{3} - 2} & -\frac{3}{3 \cdot \sqrt{3} - 2} \end{pmatrix}$$

Определитель квадратной матрицы

$$\left| \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 2 \\ 1 & -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| \rightarrow 2 - 3 \cdot \sqrt{3}$$

Модуль вектора

Модуль вектора обозначается тем же символом, что и определитель матрицы.

$$\left| \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \rightarrow \sqrt{31}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение обозначается символом умножения. Оператор может быть вызван с панели **Matrix** (Матрица) (кнопка $\vec{x}\cdot\vec{y}$).

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 5\cdot a \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \rightarrow 15\cdot a + 2\cdot\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Векторное произведение

Обозначается векторное произведение символом ×, который можно ввести нажатием кнопки в панели **Matrix** (Матрица) (кнопка $\vec{x}\times\vec{y}$).

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 5\cdot a \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot a}{2} - 6 \\ 4 - \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} \\ 3\cdot\sqrt{2} - 10\cdot a \end{pmatrix}$$

Сумма элементов вектора

Для определения суммы элементов вектора используется оператор, задаваемый кнопкой Σv на панели **Matrix** (Матрица).

$$\sum \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ -b \end{pmatrix} \rightarrow 3\cdot a - b$$

Возведение матрицы в степень

К квадратным матрицам можно формально применить операцию возведения в степень n. При этом n должно быть целым числом.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2-\sqrt{2} & 3\cdot\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 9 & 0 \\ 2\cdot\sqrt{2} & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Это равносильно умножению одинаковых матриц

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2-\sqrt{2} & 3\cdot\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 9 & 0 \\ 2\cdot\sqrt{2} & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Это равносильно умножению одинаковых обратных матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Доступ к отдельным элементам матрицы

Осуществляется указанием одного (для элемента вектора-столбца) и двух индексов (для матрицы). Для задания индексов можно использовать кнопку X_n на панели **Matrix** (Матрица).

$$A := \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad A_0 \rightarrow 2 \qquad A_2 \rightarrow \sqrt{5} + 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad A_0 \to 2 \qquad A_2 \to \sqrt{5}+1$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & e \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & a & \sqrt{5} \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad B_{0,0} \to 0 \qquad B_{1,2} \to \sqrt{5} \qquad B_{1,0} \to \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Заметим, что по умолчанию нумерация элементов начинается с 0. Чтобы нумерация начиналась с нуля, следует изменить значение встроенной переменной ORIGIN с 0 на 1.

$$ORIGIN := 1$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & e \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & a & \sqrt{5} \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad B_{1,1} \to 0 \qquad B_{2,3} \to \sqrt{5} \qquad B_{2,1} \to \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Доступ к столбцам и строкам матрицы

Доступ к заданному столбцу осуществляется с помощью оператора, вызываемого нажатием кнопки $M^{\langle\rangle}$ с панели **Matrix** (Матрица). Для доступа к строкам используются два оператора: транспонирование матрицы и выделение из матрицы столбца. Например,

$$ORIGIN := 1$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & e \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & a & \sqrt{5} \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad B^{\langle 2\rangle} \to \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left(B^T\right)^{\langle 2\rangle T} \to \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & a & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

2. Векторизация

Процедуры векторизации являются одним из примеров выхода систем компьютерной математики за рамки общих правил. С помощью этой процедуры можно в числовой и символьной формах выполнять:

- поэлементное умножение и деление матриц,
- поэлементное умножение и деление векторов,
- вычитание одной и той же скалярной функции для всех элементов матрицы или вектора,
- выполнение одной и той же скалярной операции для всех элементов матрицы или вектора.

Оператор векторизации можно использовать только с векторами и матрицами одинакового размера.

Примеры, иллюстрирующие процедуру векторизации, приведены ниже:

$$\overrightarrow{\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & -2 \\ b & 1\end{pmatrix}\right]} \to \begin{pmatrix} a^2 & -2\cdot b \\ -b & a\end{pmatrix}$$

$$a := \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{e^{a-b}} \to \begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{(a+b)} \to \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\frac{a}{b}} \to \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & 0 \\ \pi & -\pi & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\sin(A)} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\sqrt{B}} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \\ 2i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓Ввод процедуры векторизации (после полного охвата уголковым курсором необходимого выражения) осуществляется нажатием кнопки $\overrightarrow{f(M)}$ на панели **Matrix** (Матрица).

3. Матричные функции

Перечислим основные встроенные функции, предназначенные для облегчения работы с векторами и матрицами. Они нужны для создания матриц, слияния матриц, выделения фрагмента (части) матрицы, получения основных свойств матриц и т.п.

Определение элементов матрицы через функцию

matrix(M, N, f) – создание матрицы размера N×M, каждый элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца есть f(i, j),

M – количество строк,

N – количество столбцов,

f(I, j) - функция

$$f(i,j) := a\cdot i + \sqrt{3}\cdot j \qquad A := \mathrm{matrix}(2,3,f) \qquad A \to \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 2\cdot\sqrt{3} \\ a & a+\sqrt{3} & a+2\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Создание матриц специального вида

- identity(N) – создание единичной матрицы размера N×N,
- diag(V) – создание диагональной матрицы, на диагонали которой находятся элементы вектора V

$$\mathrm{identity}(3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} a \\ \sqrt{3} \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}\right) \to \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Выделение подматрицы

Функция submatrix(A, beg_r, end_r, beg_c, end_c) возвращает часть матрицы A, находящуюся между строками beg_r, end_r и столбцами beg_c, end_c включительно.

$ORIGIN := 1$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & e \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & a & \sqrt{5} \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{submatrix}(B,2,3,1,2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{submatrix}(B,1,1,1,3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & e \end{pmatrix}$$

$$\text{submatrix}(B,1,2,1,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{submatrix}(B,2,2,3,3) \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Слияние матриц

Для того чтобы составить из двух или более матриц одну, предусмотрены две матричные функции:

- augment(A, B, C, …) возвращает матрицу, сформированную слиянием матриц-аргументов слева направо;
- stack(A, B, C, …) возвращает матрицу, сформированную слиянием матриц-аргументов сверху вниз.

Аргументы A, B, C, … – векторы или матрицы соответствующего размера.

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & 0 \\ \pi & -\pi & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{augment}(A,B) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & 0 & 4 & 9 \\ \pi & -\pi & 0 & 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{stack}\left(A^T,B\right) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & \pi \\ \frac{\pi}{3} & -\pi \\ 0 & 0 \\ 4 & 9 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Вывод размера матриц

Для получения сведений о характеристиках матриц или векторов предусмотрены следующие встроенные функции:

- rows(A) – число строк матрицы A,
- cols(A) – число столбцов матрицы A,
- length(v) – число элементов вектора v,
- last(v) – индекс последнего элемента вектора v.

$$A := \begin{pmatrix} a & \sin(a) & 1 \\ -2 & b & -4 \\ a+b & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{rows}(A) \rightarrow 4 \qquad \text{cols}(A) \rightarrow 3$$

След матрицы (сумма элементов на главной диагонали)

- tr(A) – сумма элементов главной диагонали матрицы A

$$A := \begin{pmatrix} -2 & b & -4 \\ a+b & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad tr(A) \rightarrow \sqrt{3} - 8$$

Сортировка матриц

Для перестановки элементов матрицы или вектора, расположив их в определенной строке или столбце в порядке возрастания или убывания, используются встроенные функции:

- sort(v) – сортировка элементов вектора v в порядке возрастания,
- csort(A, i) – сортировка строк матрицы A выстраиванием элементов i-го столбца в порядке возрастания,
- rsort(A, i) – сортировка столбцов матрицы A выстраиванием элементов i-й строки в порядке возрастания,
- reverse(v) – перестановка элементов вектора v (элементов каждого столбца матрицы v) в обратном порядке.

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} a & \sin(a) & 1 \\ -2 & b & -4 \\ a+b & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{3} \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C := sort(B) \rightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ \sqrt{3} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad reverse(C) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \sqrt{3} \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$A1 := csort(A,3) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -2 & b & -4 \\ a & \sin(a) & 1 \\ a+b & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad A2 := rsort(A,4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sin(a) & a \\ -4 & b & -2 \\ \sqrt{5} & \sqrt{3} & a+b \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$reverse(A1) \rightarrow \begin{pmatrix} a+b & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ a & \sin(a) & 1 \\ -2 & b & -4 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Использованная и рекомендуемая литература и Internet-источники

1. Дьяконов В. MATHCAD 8/2000: специальный справочник. – СПб.: Изд-во «Питер», 2000.
2. Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCAD 2001. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
3. Ивановский Р.И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCAD Pro. – М.: Высш. шк., 2003.
4. https://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad
5. https://studfiles.net/preview/5725700/page:11/ (Дата обращения: 18.09.2017).
6. http://itmu.vsuet.ru/Posobija/MathCAD/gl05/index.htm (Дата обращения: 18.09.2017).

7. http://samoychiteli.ru/document20841.html (Дата обращения: 18.09.2017).
8. http://bourabai.ru/einf/mathcad/ch05.htm (Дата обращения: 18.09.2017).