Лекция № 2

Символьные вычисления в MathCAD

Системы компьютерной алгебры снабжаются специальным процессором для выполнения аналитических (символьных) вычислений. Его основой является ядро, хранящее всю совокупность формул и формульных преобразований, с помощью которых производятся аналитические вычисления. Чем больше этих формул в ядре, тем надежней работа символьного процессора и тем вероятнее, что поставленная задача будет решена, разумеется, если такое решение существует в принципе.

В MathCAD символьные вычисления выполняются на базе ядра системы Maple (до версии 14), а начиная с 14 версии, используется символьное ядро MuPAD. Доступ к ядру осуществляется лишь частично. К сожалению, прямой доступ к большинству его операций для пользователей MathCAD закрыт. Тем не менее это обстоятельство нельзя считать большим недостатком системы MathCAD. Во-первых, потому что ее назначение – прежде всего это решение задач в численном виде. А во-вторых, коммерческие системы Maple и MuPAD явно избыточны для большинства пользователей СКА.

1. Способы символьных вычислений

Символьные вычисления в MathCAD можно осуществлять в двух различных вариантах:

- с помощью команд меню,
- с помощью оператора символьного вывода →, ключевых слов символьного процессора и обычных формул.

Первый способ более удобен тогда, когда требуется быстро получить какой-либо аналитический результат для однократного использования, не сохраняя сам ход вычислений. Второй способ более нагляден, так как позволяет записывать выражения в традиционной математической форме и сохранять символьные вычисления в документах MathCAD. Кроме того, аналитические преобразования, проводимые через меню, касаются только одного, выделенного в данный момент, выражения. Соответственно, на них не влияют формулы, находящиеся в документе MathCAD выше этого выражения (например, операторы присваивания значений каким-либо переменным). Оператор символьного вывода, напротив учитывает все предыдущее содержимое документа и выдает результат с его учетом (см., например, рис. 1).

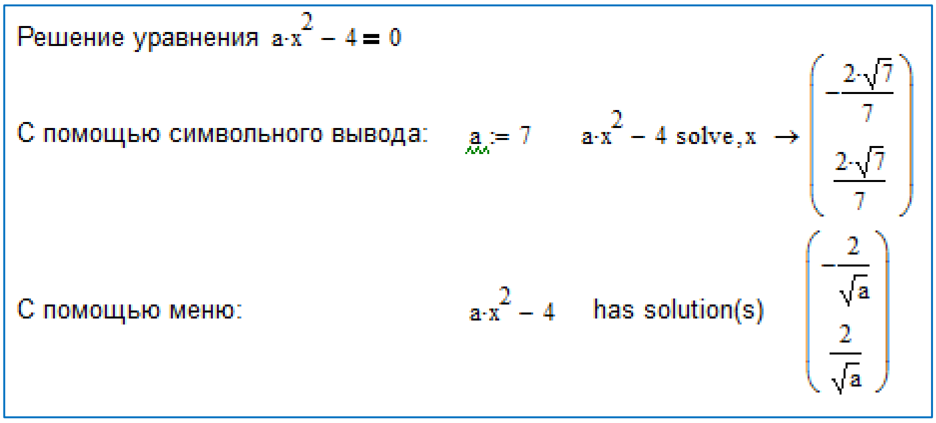


Рис. 1.

Замечание 1. В символьных вычислениях допускается использование большинства встроенных функций MathCAD.

Для символьных вычислений при помощи команд предназначено главное меню **Symbolics** (Символика), объединяющее математические операции, которые MathCAD умеет выполнять аналитически (рис. 2). Для реализации второго способа применяются все средства MathCAD, пригодные для численных вычислений (например, панели Calculator, Evaluation и др.), и специальная математическая панель инструментов **Symbolic** (Символика) (рис. 3).

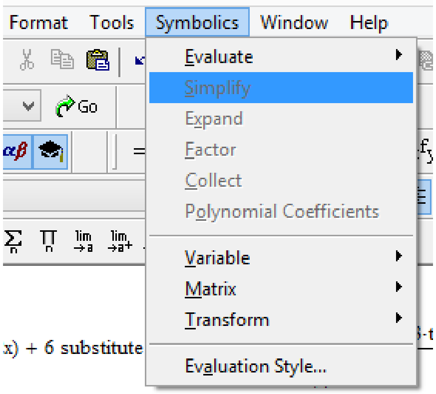


Рис. 2. Меню **Symbolics**

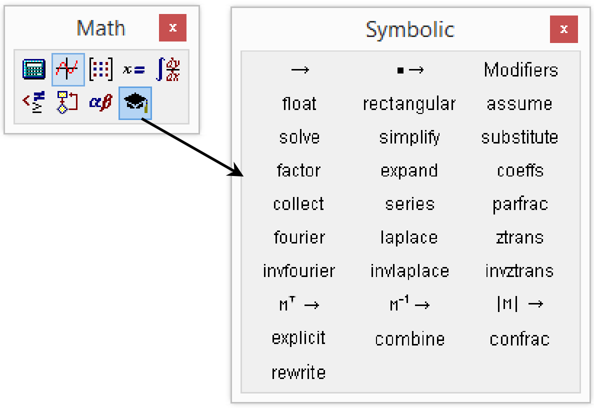


Рис. 3. Панель **Symbolic**

На панели **Symbolic** (Символика) находятся кнопки, соответствующие специфическим командам символьным преобразований.

Замечание 2. Символьные операции с помощью меню возможны лишь над каким-либо объектом (выражением, его частью или отдельной переменной). Для того чтобы правильно осуществить желаемое аналитическое преобразование, предварительно необходимо выделить тот объект, к которому оно будет относиться. См., например, рис. 4 (Перед выбором из меню команды Expand было выделено выражение $\cos(2\alpha)$).

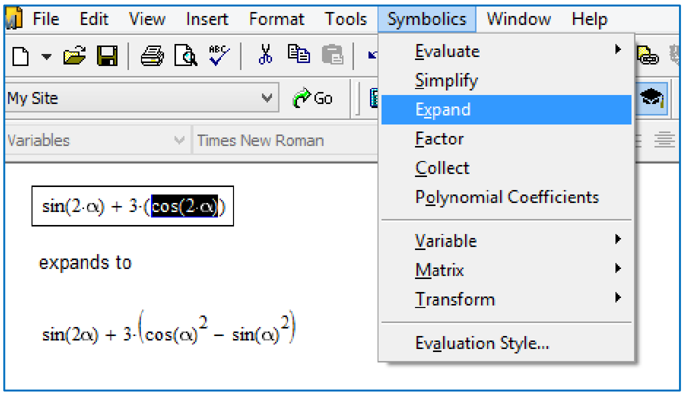


Рис. 4.Символьное вычисление части выражения и его результат

Замечание 3. Символьным преобразованиям через меню недоступны предварительные определения функций.

Замечание 4. Если выражение не поддается аналитическим преобразованиям (либо в силу того, что задача вовсе не имеет аналитического решения, либо она оказывается слишком сложной для символьного процессора MathCAD), то в качестве результата выводится само выражение. Например,

$$\cos(4x) \text{ expand } \rightarrow \cos(x)^4 - 6\cdot\cos(x)^2\cdot\sin(x)^2 + \sin(x)^4$$

$$\cos(2x) \text{ expand } \rightarrow \cos(x)^2 - \sin(x)^2$$

$$\cos(x) \text{ expand } \rightarrow \cos(x)$$

2. Точные вычисления

В MathCAD можно выполнять точные вычисления с представлением результатов в традиционной математической форме – с записью ответа в форме радикала и специальных иррациональных чисел, таких, например, как π и e (рис. 5).

$$\frac{5}{9} + \frac{6}{7} \rightarrow \frac{89}{63}$$

$$\sqrt{27} \rightarrow 3\cdot\sqrt{3}$$

$$\sqrt{27} + \sqrt{81} + \sqrt{54} \rightarrow 3\cdot\sqrt{3} + 3\cdot\sqrt{6} + 9$$

$$\sqrt{27} + \sqrt[4]{729} \rightarrow 3\cdot\sqrt{3} + 729^{\frac{1}{4}} \text{ simplify } \rightarrow 6\cdot\sqrt{3}$$

$$\operatorname{asin}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)^4 + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)^4 + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)^4 + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)^4 \rightarrow \frac{(\sqrt{2}-2)^2}{8} + \frac{(\sqrt{2}+2)^2}{8} \text{ simplify } \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

Рис. 5. Примеры точных вычислений в MathCAD

3. Символьная алгебра

Символьный процессор MathCAD умеет выполнять основные алгебраические преобразования математических выражений целиком или их фрагментов. К таким преобразованиям относятся:

1. приведение выражений к более простому виду (упрощение выражений);
2. приведение подобных;
3. разложение на множители;

4. приведение к общему знаменателю;
5. вынесение общего множителя;
6. разложение на элементарные дроби;
7. вычисление коэффициентов полиномов;
8. выполнение подстановок.

3.1 Упрощение выражений (Simplify)

Упрощение выражение – наиболее часто применяемая операция. Символьный процессор MathCAD стремится преобразовать выражением, чтобы оно приобрело более простую форму. При этом используются различные арифметические формулы, приведение подобных слагаемых, тригонометрические тождества, пересчет обратных функций и др. Упрощение выражений выполняется:

1) с помощью команды меню **Symbolics / Simplify** (Символика / Упростить):

$$\frac{2\cdot b + a - \dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2a\cdot b^2-3a^2\cdot b}\cdot\frac{a^3\cdot b-2\cdot a^2\cdot b^2+a\cdot b^3}{a^2-b^2} \quad \text{simplifies to} \quad \frac{2\cdot a}{a+b}-1$$

$$\sin\left(\frac{9\cdot\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)^2-\sin\left(\frac{7\cdot\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)^2 \quad \text{simplifies to} \quad \frac{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2}$$

2) при помощи оператора символьного вывода с ключевым словом **simplify**. При этом необходимо учитывать, что если некоторым переменным, входящим в выражение, ранее были присвоены некоторые значения, то они будут подставлены в него при выполнении символьного вывода:

$$\frac{x^3-x^2-4\cdot x+4}{x^3-3\cdot x+2}\cdot\frac{3\cdot x-3}{2\cdot x-4} \text{ simplify } \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^{-6}-64}{4+2\cdot x^{-1}+x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\frac{4x^2\cdot(2x+1)}{1-2x} \text{ simplify } \rightarrow 2\cdot x+1$$

$$\frac{2\cdot b + a - \dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2a\cdot b^2-3a^2\cdot b}\cdot\frac{a^3\cdot b-2\cdot a^2\cdot b^2+a\cdot b^3}{a^2-b^2} \text{ simplify } \rightarrow \frac{2\cdot a}{a+b}-1$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\frac{10}{\sqrt[3]{25}}\right)\div\left(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}\right)+\sqrt[6]{5} \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{2}$$

$$\sin(x)^2+\cos(x)^2 \text{ simplify } \rightarrow 1$$

$$\sin\left(\frac{9\cdot\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)^2-\sin\left(\frac{7\cdot\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)^2 \text{ simplify } \rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2}$$

✓Чтобы получить результат в «максимально упрощенном виде» (насколько это возможно в MathCAD), следует вместе с ключевым словом **simplify** использовать модификатор[1] **max**.

Например, сравним результаты упрощения выражений, используя ключевое слово **simplify** без модификатора **max** и с ним:

$$\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} \text{ simplify } \rightarrow \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a-2}$$

$$\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} \text{ simplify, max } \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$$

$$\left(\sqrt{a\cdot b} - \frac{a\cdot b}{a+\sqrt{a\cdot b}}\right)\cdot\left[\frac{(a\cdot b)^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}}\right)^{-1} \text{ simplify } \rightarrow \frac{a\cdot b^{\frac{5}{4}} + a\cdot b^{\frac{3}{4}}\cdot(a\cdot b)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$$

$$\left(\sqrt{a\cdot b} - \frac{a\cdot b}{a+\sqrt{a\cdot b}}\right)\cdot\left[\frac{(a\cdot b)^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}}\right)^{-1} \text{ simplify, max } \rightarrow -a\cdot\sqrt{a\cdot b}$$

3.2 Задание ограничений на переменные в выражениях (assume)

Для выполнения преобразований с заданием ограничений на значения и тип переменной используется ключевое слово **assume**, после которого через запятую вводятся следующие определения относительно переменных:

var = real	переменная var принимает вещественные значения
var = integer	переменная var принимает целые значения
var = RealRange(a,b)	переменная var принимает вещественные значения из промежутка [a, b]
var = odd	переменная var принимает целые нечетные значения
var = even	переменная var принимает целые четные значения
var > value	переменная var принимает значения больше заданного значения value. Аналогично и с другими операторами сравнения (≥, <, ≤)

✓Символьные вычисления допускается проводить с применением цепочек из ключевых слов.

[1] **Модификатор** – дополнительные установки символьных преобразований.

Приведем примеры использования ключевого слова **assume** при упрощении выражений:

$$\sqrt{a^2}\ \text{simplify}, \text{assume}, a = \text{real} \ \rightarrow |a|$$

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\ \text{assume}, a > 0, b < 0 \ \rightarrow a - b$$

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\ \text{simplify}, \text{assume}, a = \text{real}, b < 0 \ \rightarrow |a| - b$$

$$\sqrt{(x-4)^2}\ \text{assume}, x = \text{RealRange}(6,12) \ \rightarrow x - 4$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\cdot n\right)\ \text{simplify}, \text{assume}, n = \text{integer} \ \rightarrow \frac{(-1)^n\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left[\alpha+\frac{\pi(2n-1)}{2}\right]\ \text{simplify}, \text{assume}, n = \text{integer} \ \rightarrow (-1)^n\cdot\sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha+\pi\cdot n)\ \text{simplify}, \text{assume}, n = \text{odd} \ \rightarrow -\sin(\alpha)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right)\div\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)\ \text{simplify}, \text{max} \ \rightarrow \frac{\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}-1\right)\cdot(a-1)\cdot\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\right)}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right)\div\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)\ \Bigg|\begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{assume}, a > 1\end{array} \rightarrow \sqrt{a-1}$$

Замечание 5. В записи ограничений символу **=** соответствует оператор логического сравнения типа «равно».

3.3 Разложение выражения (Expand)

Операция символьного *разложения* (expand) выражений противоположна по смыслу операции упрощения. В ходе разложения раскрываются все суммы и произведения, а сложные тригонометрические зависимости разлагаются с помощью тригонометрических тождеств. Разложение выражений производится:

1) с помощью команды меню **Symbolics / Expand** (Символика / Разложить):

$$\frac{\left(x^3+x^2+a\right)\cdot(x+b)}{\left(x^2+1\right)\cdot(x-1)} \quad \text{expands to} \quad \frac{b\cdot x^2+b\cdot x^3+x^3+x^4+a\cdot b+a\cdot x}{x^3-x^2+x-1}$$

$$\sin(x+y) \quad \text{expands to} \quad \cos(x)\cdot\sin(y)+\sin(x)\cdot\cos(y)$$

$$\sin(2x)-(\cos(3x)) \quad \text{expands to} \quad \sin(2x)-\left(\cos(x)^3-3\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)^2\right)$$

2) при помощи оператора символьного вывода с ключевым словом **expand**:

$$\frac{\left(x^3+x^2+a\right)\cdot(x+b)}{\left(x^2+1\right)\cdot(x-1)}\ \text{expand}\ \rightarrow \frac{b\cdot x^2+b\cdot x^3+x^3+x^4+a\cdot b+a\cdot x}{x^3-x^2+x-1}$$

$$\sin(\alpha+\beta)\ \text{expand}\ \rightarrow \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\cos(2\alpha)\ \text{expand}\ \rightarrow \cos(\alpha)^2-\sin(\alpha)^2$$

$$\sin(3\alpha)\ \text{expand}\ \rightarrow 3\cdot\cos(\alpha)^2\cdot\sin(\alpha)-\sin(\alpha)^3$$

$$\sin(2x)-\cos(4x)\ \text{expand}\ \rightarrow 6\cdot\cos(x)^2\cdot\sin(x)^2-\cos(x)^4+2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)-\sin(x)^4$$

Очень эффектно оператор **expand** работает в качестве справочного инструмента:

$$(a+b)^3\ \text{expand}\ \rightarrow a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$$

$$(a+b+c)^2\ \text{expand}\ \rightarrow a^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+b^2+2\cdot b\cdot c+c^2$$

$$(a+b)^4\ \text{expand}\ \rightarrow a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4$$

$$\tan(\alpha+\beta)\ \text{expand}\ \rightarrow -\frac{\tan(\beta)+\tan(\alpha)}{\tan(\beta)\cdot\tan(\alpha)-1}$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\ \text{expand}\ \rightarrow \sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\ \text{expand}\ \rightarrow \cos\left(\frac{\pi\cdot n}{2}\right)\cdot\sin(\alpha)+\sin\left(\frac{\pi\cdot n}{2}\right)\cdot\cos(\alpha)$$

$$\tan\left(\alpha+\frac{7\cdot\pi}{2}\right)\ \text{expand}\ \rightarrow -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

3.4 Разложение на множители (Factor)

Разложение выражений на простые множители выполняется при помощи команды **Symbolics / Factor** (Символика / Разложить на множители), либо с использованием вместе с оператором символьного вывода ключевого слова **factor**. Эта операция позволяет разложить полиномы на произведение более простых полиномов, а целые числа – на простые сомножители. Применяя команду меню, следует перед ее вызовом выделить все выражением или его часть, которую планируется разложить на множители.

Приведем несколько примеров разложения выражений на множители с использованием символьного оператора вывода:

$$124568\ \text{factor}\ \rightarrow 2^3\cdot 23\cdot 677$$

$$56!\ \text{factor}\ \rightarrow 2^{53}\cdot 3^{26}\cdot 5^{13}\cdot 7^9\cdot 11^5\cdot 13^4\cdot 17^3\cdot 19^2\cdot 23^2\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 41\cdot 43\cdot 47\cdot 53$$

$$x^3 + 1 \text{ factor } \rightarrow (x+1)\cdot(x^2 - x + 1)$$

$$x\cdot y^2 + x\cdot y - 3\cdot x^2\cdot y^3 \text{ factor } \rightarrow -x\cdot y\cdot(3\cdot x\cdot y^2 - y - 1)$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^3 + 1} \text{ factor } \rightarrow \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x^2 - x + 1)}$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x+3} \text{ factor } \rightarrow \frac{3\cdot x^2 + 5\cdot x - 4}{(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

А вот как можно проверить, являются ли целые числа, например, 199995 и 1377773, простыми:

$$199995 \text{ factor } \rightarrow 3\cdot 5\cdot 67\cdot 199$$

$$1377773 \text{ factor } \rightarrow 1377773$$

✓ По умолчанию, MathCAD разлагает полиномы с рациональными коэффициентами в произведение полиномов с меньшим порядком, но также с рациональными коэффициентами, если это возможно.

Например, если попытаться разложить на множители многочлен $x^2 - 2$, MathCAD выдаст следующий результат

$$x^2 - 2 \text{ factor } \rightarrow x^2 - 2$$

Разложение не произведено, так как рассматриваемый многочлен имеет иррациональные нули $\pm\sqrt{2}$. Для того чтобы разложить его на множители, после ключевого слова **factor** через запятую следует указать один из этих нулей:

$$x^2 - 2 \text{ factor}, \sqrt{2} \rightarrow (x - \sqrt{2})\cdot(x + \sqrt{2})$$

Замечание 6. После ключевого слова **factor** можно через запятую указать список иррациональных выражений, которые будут содержаться в множителях.

Приведем еще несколько примеров, содержащих иррациональные коэффициенты в разложении:

$$(x^2 - 2)\cdot(x^2 - 5) \text{ factor}, \sqrt{2}, \sqrt{5} \rightarrow (x + \sqrt{2})\cdot(x - \sqrt{2})\cdot(x + \sqrt{5})\cdot(x - \sqrt{5})$$

$$x^2 - a \text{ factor}, \sqrt{a} \rightarrow (x - \sqrt{a})\cdot(x + \sqrt{a})$$

$$x - a \text{ factor}, \sqrt{x}, \sqrt{a} \rightarrow -(\sqrt{a} - \sqrt{x})\cdot(\sqrt{a} + \sqrt{x})$$

$$x^4 - 2 \text{ factor}, \sqrt{2} \rightarrow (x^2 - \sqrt{2})\cdot(x^2 + \sqrt{2})$$

$$x^4 - 2 \text{ factor}, 2^{\frac{1}{4}} \rightarrow \left(x - 2^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(x + 2^{\frac{1}{4}}\right)\cdot(x^2 + \sqrt{2})$$

$$\sqrt{3}\cdot x^2-\sqrt{5}\ \text{factor},5^{\frac{1}{4}},3^{\frac{1}{4}}\ \rightarrow\ \sqrt{3}\cdot\left(x+\frac{3^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{3^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}}{3}\right)$$

Если к полученному в последнем примере выражению применить оператор символьного вывода с ключевым словом **combine**, то получим (объединены степени):

$$\sqrt{3}\cdot x^2-\sqrt{5}\ \text{factor},5^{\frac{1}{4}},3^{\frac{1}{4}}\ \rightarrow\ \sqrt{3}\cdot\left(x-\frac{3^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{3^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}}{3}\right)\ \text{combine}\ \rightarrow\ \sqrt{3}\cdot\left(x-\frac{135^{\frac{1}{4}}}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{135^{\frac{1}{4}}}{3}\right)$$

Замечание 7. Используя ключевое слово **combine** можно объединять элементарные функции одного типа. Например,

$$\frac{4^x\cdot 5^{2x}\cdot 5^{\sin(x)}\cdot 5^{1+\cos(x)}}{5^{-\sin(x)}}\ \text{combine}\ \rightarrow\ 4^x\cdot 5^{2\cdot x+\cos(x)+2\cdot\sin(x)+1}$$

$$e^{2x}\cdot e^{y+z}\ \text{combine},\exp\ \rightarrow\ e^{2\cdot x+y+z}$$

$$2\ln(3)+3\ln(8)\ \text{combine},\ln\ \rightarrow\ \ln(4608)$$

В том случае, когда среди нулей многочлена есть комплексные числа, то для разложения многочлена на множители после ключевого слова **factor** следует указать мнимую единицу (вводя ее как 1i) или комплексный нуль многочлена. Например,

$$\boxed{x^2+4\ \text{factor},1i\ \rightarrow\ (x-2i)\cdot(x+2i)}$$

$$x^2+3\ \text{factor},i,\sqrt{3}\ \rightarrow\ \left(x+\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}\cdot i\right)$$

$$x^2+5\ \text{factor},\sqrt{-5}\ \rightarrow\ \left(x+\sqrt{5}\cdot i\right)\cdot\left(x-\sqrt{5}\cdot i\right)$$

$$\left(x^2+5\right)\cdot\left(x^2-3\right)\ \text{factor},i,\sqrt{5},\sqrt{3}\ \rightarrow\ \left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{5}\cdot i\right)\cdot\left(x-\sqrt{5}\cdot i\right)$$

$$x^3-1\ \text{factor},i,\sqrt{3}\ \rightarrow\ \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot\left[x+\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i\right]\cdot(x-1)$$

$$x^2-5i\ \text{factor},\sqrt{5i}\ \rightarrow\ \left(x-\sqrt{5i}\right)\cdot\left(x+\sqrt{5i}\right)$$

$$x^2+(2+3i)\ \text{factor},\sqrt{2+3i}\ \rightarrow\ \left[x+\sqrt{(2+3i)}\cdot i\right]\cdot\left(x-\sqrt{2+3i}\cdot i\right)$$

Разложить на множители можно и выражения, которые содержат не только полиномы и дробно-рациональные выражения. Например,

$$1 - \cos(x)^2 \text{ factor } \rightarrow -(\cos(x) - 1)\cdot(\cos(x) + 1)$$

$$\cos(2x)^2 - \sin(4x)^4 \text{ factor } \rightarrow \left(\cos(2\cdot x) - \sin(4\cdot x)^2\right)\cdot\left(\sin(4\cdot x)^2 + \cos(2\cdot x)\right)$$

$$\frac{1}{\cos(x)^2 - \sin(4x)^2} \text{ factor } \rightarrow \frac{1}{(\cos(x) - \sin(4\cdot x))\cdot(\sin(4\cdot x) + \cos(x))}$$

$$\left(\sin(x)^2 - \cos(2x)^2\right)\cdot\left(x^2 - 4\right) \text{ factor } \rightarrow (\sin(x) - \cos(2\cdot x))\cdot(\cos(2\cdot x) + \sin(x))\cdot(x - 2)\cdot(x + 2)$$

$$e^{2x} + x\cdot\sin(2x)\cdot e^{2x} + \frac{1}{e^{-2x}} \text{ factor } \rightarrow e^{2\cdot x}\cdot(x\cdot\sin(2\cdot x) + 2)$$

$$x^{\frac{2}{3}} - 8 \text{ factor}, x^{\frac{1}{3}}, \sqrt{2} \rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}} - 2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{3}} + 2\cdot\sqrt{2}\right)$$

3.5 Приведение подобных слагаемых (Collect)

Приведение подобных слагаемых полинома выполняется:

1) с помощью команды меню **Symbolics / Collect** (Символика / Привести подобные), при этом в выражении следует выделить имя переменной, относительно которой надо привести подобные слагаемые:

$\boxed{x^2 + 2\cdot x + 6\cdot x^2 - 6\cdot x + 5}$ by collecting terms, yields $7\cdot x^2 - 4\cdot x + 5$

$\boxed{(x + 2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x + 5\cdot y) + z}$ by collecting terms, yields $-5\cdot z^2\cdot y^2 + \left(2\cdot z - x\cdot z^2\right)\cdot y + z + x\cdot z$

2) С помощью оператора символьного вывода с ключевым словом **collect**:

$$x^2 + 2\cdot x + 6x^2 - 6x + 5 \text{ collect } \rightarrow 7\cdot x^2 - 4\cdot x + 5$$

Если выражение содержит несколько переменных, то после ключевого слова collect необходимо указать имя переменной, относительно которой требуется привести подобные слагаемые:

$$(x + 2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x + 5\cdot y) + z \text{ collect}, x \rightarrow \left(z - y\cdot z^2\right)\cdot x + 2\cdot y\cdot z - 5\cdot y^2\cdot z^2 + z$$

$$(x + 2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x + 5\cdot y) + z \text{ collect}, y \rightarrow -5\cdot z^2\cdot y^2 + \left(2\cdot z - x\cdot z^2\right)\cdot y + z + x\cdot z$$

$$(x + 2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x + 5\cdot y) + z \text{ collect}, z \rightarrow [-y\cdot(x + 5\cdot y)]\cdot z^2 + (x + 2\cdot y + 1)\cdot z$$

После ключевого слова collect допускается задание нескольких переменных через запятую. В этом случае приведение подобных слагаемых выполняется последовательно по всем переменным:

$$(x + 2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x + 5\cdot y) + z \text{ collect}, x, y \rightarrow \left[\left(-z^2\right)\cdot y + z\right]\cdot x + -5\cdot z^2\cdot y^2 + 2\cdot z\cdot y + z$$

3.6 Разложение на элементарные дроби (Convert to Partial Fractions)

Чтобы разложить сложную дробь на более простые дроби, следует либо выполнить команду **Symbolics / Variable / Convert to Partial Fractions** (Символика / Переменная / Разложить на элементарные дроби), либо указать ключевое слово **parfrac** при использовании оператора символьного вывода. Применяя первый способ (меню), перед выбором команды из меню необходимо выделить переменную, по которой будет производиться разложение (рис. 6), а если используется второй способ (с оператором символьного вывода), то имя переменной следует указать после ключевого слова **parfrac** (обязательно только в том случае, когда выражение содержит несколько переменных) (рис. 7).

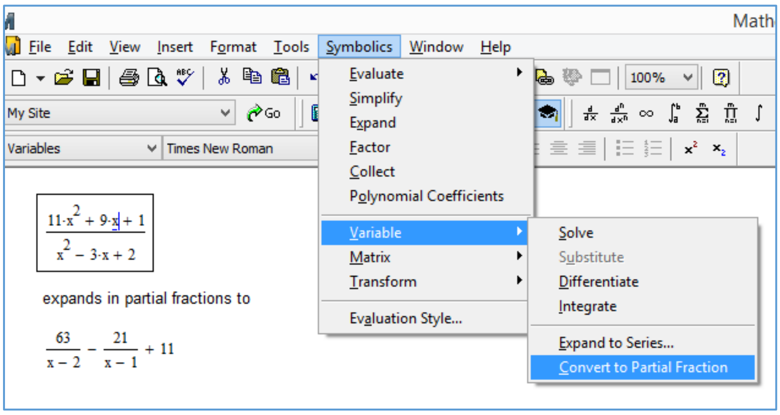


Рис. 6. Разложение сложной дроби на элементарные дроби

$$\frac{11\cdot x^2 + 9\cdot x + 1}{x^2 - 3\cdot x + 2} \text{ parfrac } \rightarrow \frac{63}{x-2} - \frac{21}{x-1} + 11$$

$$\frac{x^2 + b\cdot x + 4}{x^2 - a^2} \text{ parfrac}, x \rightarrow \frac{b - \frac{a^2 + b\cdot a + 4}{2\cdot a}}{a + x} - \frac{a^2 + b\cdot a + 4}{2\cdot a\cdot(a - x)} + 1$$

$$\frac{x}{\left(x^2 + 3\right)\cdot\left(x^2 - 2\right)} \text{ parfrac } \rightarrow \frac{x}{5\cdot\left(x^2 - 2\right)} - \frac{x}{5\cdot\left(x^2 + 3\right)}$$

Рис. 7. Разложение сложной дроби на элементарные дроби

В том случае, когда среди нулей многочленов в знаменателе разлагаемой дроби есть иррациональные и/или комплексные числа (выражения), то для выполнения разложения дроби на простейшие с линейными знаменателями следует после ключевого слова **parfrac** указать значения, соответствующие нулям (как и в случае разложения на множители, см. п. 3.3). Например,

$$\frac{x}{x^2 - 2} \text{ parfrac}, \sqrt{2} \rightarrow \frac{1}{2\cdot\left(x + \sqrt{2}\right)} + \frac{1}{2\cdot\left(x - \sqrt{2}\right)}$$

$$\frac{x}{x^2+1}\ \text{parfrac}, i\ \rightarrow \frac{1}{2\cdot(x-i)}+\frac{1}{2\cdot(x+i)}$$

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-2\right)}\ \text{parfrac}, i\ \rightarrow \frac{1}{6\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{6\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)}-\frac{1}{6\cdot(x-i)}-\frac{1}{6\cdot(x+i)}$$

3.7 Подстановка переменной (Substitute)

Очень удобная возможность символьных вычислений – это операция подстановки значения переменной в выражение.

Для осуществления этой операции с оператором символьного вывода используется ключевое слово **substitute**. После ключевого слова необходимо ввести логическое выражение, показывающее, какую именно переменную какой формулой (или значением) следует заменить. Например,

$$\sin\left(k\cdot x^2+b\cdot x\right)\ \text{substitute}, k = a\cdot x^2\ \rightarrow \sin\left(a\cdot x^4+b\cdot x\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{substitute}, x = \sin(t)\ \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(2\cdot t)+1}}$$

$$\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, a = 1\\ \text{simplify}, \text{max}\end{array}\right. \rightarrow \sqrt{2}-1$$

Подстановка может быть выполнена и для списка элементов выражения:

$$x^2+2\cdot a\cdot x+b\ \text{substitute}, a = 2, x = 1\ \rightarrow b+5$$

Замечание 8. Если переменным, входящим в выражение, ранее были присвоены какие-нибудь значения, то именно они подставляются в выражение, а не указанные с ключевым словом **substitute**. Например,

$$a := 7 \qquad x^2+2\cdot a\cdot x+b\ \text{substitute}, a = 2, x = 1\ \rightarrow b+15$$

Чтобы отменить подстановку значений, ранее присвоенных переменным, можно использовать ключевое слово **explicit**

$$a := 7 \qquad x^2+2\cdot a\cdot x+b\ \left|\begin{array}{l}\text{explicit}\\ \text{substitute}, a = 2, x = 1\end{array}\right. \rightarrow b+5$$

Оператор символьного вывода с ключевым словом **substitute** может быть использован и для замены заданного фрагмента выражения другим выражением (или значением). Так, например, эта возможность может быть использована для решения следующей задачи.

Задача 1. *Вычислить значение тригонометрического выражения*

$$\frac{6\sin\alpha-7\cos\alpha+1}{8\sin\alpha+9\cos\alpha-1}, \text{ если } \ tg\frac{\alpha}{2}=4.$$

Решение. Зная формулы, выражающие $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, вычисление значения выражения можно оформить следующим образом:

$$\frac{6\cdot\sin(\alpha)-7\cdot\cos(\alpha)+1}{8\cdot\sin(\alpha)+9\cdot\cos(\alpha)-1}\left|\begin{array}{l}\text{substitute}, \sin(\alpha)=\dfrac{2\cdot\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\\ \text{substitute}, \cos(\alpha)=\dfrac{1-\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\\ \text{substitute}, \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=4\end{array}\right. \rightarrow -\frac{85}{44}$$

3.8 Запись выражения через элементарные функции (rewrite)

В MathCAD можно выражение «переписать» через заданную функцию, используя ключевое слово **rewrite**. Имя желаемой функции следует указать через запятую после ключевого слова. Некоторые допустимые имена функций приведены в таблице:

Запись в MathCAD	Математическая запись
cos	cos
cosh	ch
cot	ctg
coth	cth
exp	exp
ln	ln
log	lg

Запись в MathCAD	Математическая запись
sin	sin
sincos	sin, cos
sinh	sh
sinhcosh	sh, ch
tan	tg
tanh	th

Например,

$$\sin(x)\ \text{rewrite}, \exp\ \rightarrow -\frac{e^{x\cdot i}\cdot i}{2}+\frac{1}{2}\cdot e^{x\cdot(-i)}\cdot i$$

$$\sin(x)+\cos(2x)\ \text{rewrite}, \tan\ \rightarrow \frac{2\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}-\frac{\tan(x)^2-1}{\tan(x)^2+1}$$

$$\tan(x)\ \text{rewrite}, \cot\ \rightarrow \frac{1}{\cot(x)}$$

$$e^{ix}\ \text{rewrite}, \sin\ \rightarrow 1-2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2+\sin(x)\cdot i$$

$$e^{ix}\ \text{rewrite}, \text{sincos} \ \rightarrow \cos(x) + \sin(x)\cdot i$$

$$e^{x}\ \text{rewrite}, \text{tanh} \ \rightarrow -\frac{\tanh\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\tanh\left(\frac{x}{2}\right) - 1}$$

$$e^{x}\ \text{rewrite}, \text{sinhcosh} \ \rightarrow \cosh(x) + \sinh(x)$$

Так как

$$\frac{6\cdot\sin(\alpha) - 7\cdot\cos(\alpha) + 1}{8\cdot\sin(\alpha) + 9\cdot\cos(\alpha) - 1}\ \text{rewrite}, \tan \ \rightarrow -\frac{\dfrac{7\cdot\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1} + \dfrac{12\cdot\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1} + 1}{\dfrac{9\cdot\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1} - \dfrac{16\cdot\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1} + 1}$$

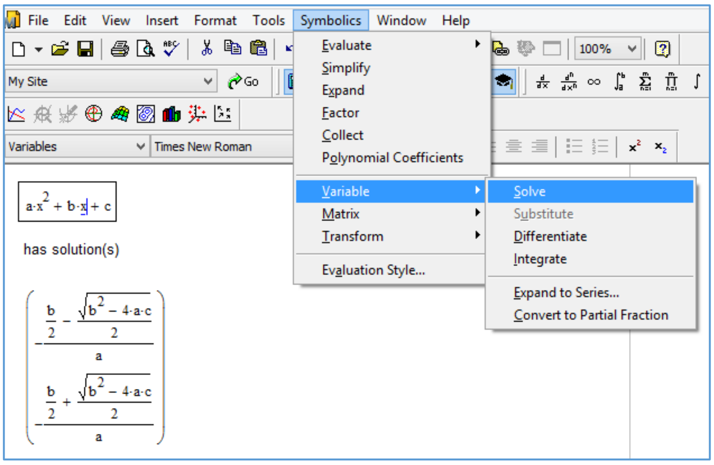
то, используя ключевое слово **rewrite**, решение задачи 1 можно оформить следующим образом:

$$\frac{6\cdot\sin(\alpha) - 7\cdot\cos(\alpha) + 1}{8\cdot\sin(\alpha) + 9\cdot\cos(\alpha) - 1}\ \left|\begin{array}{l}\text{rewrite}, \tan \\ \text{simplify} \\ \text{substitute}, \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4\end{array}\right. \ \rightarrow -\frac{85}{44}$$

4. Решение уравнений, неравенств и их систем

Решение уравнения относительно заданной переменной может быть выполнено:

1) с помощью команды меню **Symbolics / Variable / Solve** (Символика / Переменная / Решить). Если задано некоторое выражение и выделена переменная, то команда возвращает символьные значения указанной переменной, при которых выражением принимает значение, равное 0.



2) при помощи оператора символьного вывода с ключевым словом **solve**. Если выражение содержит несколько переменных, то после ключевого слова следует указать имя переменной, относительно которой надо решить уравнение. При этом необходимо учитывать, что если некоторым переменным, входящим в уравнение, ранее были присвоены некоторые значения, то они будут подставлены в него при выполнении символьного вывода:

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{\dfrac{b}{2} - \dfrac{\sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2}}{a} \\ -\dfrac{\dfrac{b}{2} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2}}{a} \end{pmatrix}$$

$$a := 6 \qquad b := 7 \qquad a\cdot x^2 + b\cdot x + c \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{49 - 24\cdot c}}{12} - \dfrac{7}{12} \\ \dfrac{\sqrt{49 - 24\cdot c}}{12} - \dfrac{7}{12} \end{pmatrix}$$

Использование ключевого слова **explicit** отменяет подстановку заданных ранее значений переменных. Например,

$$a := 6 \qquad b := 7 \qquad a\cdot x^2 + b\cdot x + c \left| \begin{matrix} \text{explicit} \\ \text{solve}, x \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{\dfrac{b}{2} - \dfrac{\sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2}}{a} \\ -\dfrac{\dfrac{b}{2} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2}}{a} \end{pmatrix}$$

✓ В приведенных выше примерах решаются уравнения вида F(x) = 0. При этом достаточно было задать только его левую часть. Если же требуется решить уравнения вида F(x) = f(x), то при его записи символ «равно» следует вводить как символ логического сравнения «равно» **=** , или вводить выражение F(x) – f(x), для которого ищутся нули. Например,

$$x + b \mathbf{=} \frac{x+1}{x-1} \text{ solve}, b \rightarrow \frac{x+1}{x-1} - x$$

$$x + b - \frac{x+1}{x-1} \text{ solve}, b \rightarrow \frac{x+1}{x-1} - x$$

Символьное решение уравнения можно оформить и с помощью блока решений **Given-Find**, используя при этом оператор символьного вывода. Например,

$$\text{Given} \qquad a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0 \qquad \text{Find}(x) \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} & -\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{pmatrix}$$

При этом корни уравнения выводятся в виде вектора-строки. Результат можно вывести и в виде столбца, для этого надо к функции Find применить оператор транспонирования:

$$\text{Given} \qquad a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0 \qquad \text{Find}(x)^T \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ -\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{pmatrix}$$

✓ Если уравнение имеет решение, но MathCAD не может найти его в аналитическом виде, то будет выведен результат численного решения уравнения в виде числа (чисел) с плавающей точкой. При этом по умолчанию количество цифр в результате не превышает 20. Например,

$$x^5 + 3\cdot x + 2 \ \text{solve}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0648857545201774155 - 0.95054603496382974316i \\ 1.0648857545201774155 + 0.95054603496382974316i \\ -0.63283452024215229056 \\ -0.74846849439910127022 - 0.99543395446793170782i \\ -0.74846849439910127022 + 0.99543395446793170782i \end{pmatrix}$$

$$\text{Given} \qquad x^5 + 3\cdot x + 2 = 0 \qquad \text{Find}(x)^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0648857545201774155 - 0.95054603496382974316i \\ 1.0648857545201774155 + 0.95054603496382974316i \\ -0.63283452024215229056 \\ -0.74846849439910127022 - 0.99543395446793170782i \\ -0.74846849439910127022 + 0.99543395446793170782i \end{pmatrix}$$

Для изменения количества выводимых знаков в числах используется ключевое слово **float** с указанием через запятую необходимого количества знаков (точности вывода результата). Например,

$$x^5 + 3\cdot x + 2 \ \text{solve}, x, \text{float}, 3 \ \rightarrow \begin{pmatrix} 1.06 + 0.951i \\ 1.06 - 0.951i \\ -0.633 \\ -0.748 + 0.995i \\ -0.748 - 0.995i \end{pmatrix} \qquad x^5 + 3\cdot x + 2 \ \text{solve}, \text{float}, 5 \ \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0649 + 0.95055i \\ 1.0649 - 0.95055i \\ -0.63283 \\ -0.74847 + 0.99543i \\ -0.74847 - 0.99543i \end{pmatrix}$$

$$\text{Given} \qquad x^5 + 3\cdot x + 2 = 0 \qquad \text{Find}(x)^T \ \text{float}, 3 \ \rightarrow \begin{pmatrix} 1.06 + 0.951i \\ 1.06 - 0.951i \\ -0.633 \\ -0.748 + 0.995i \\ -0.748 - 0.995i \end{pmatrix}$$

Для указания ограничений на искомые корни уравнения используется ключевое слово **assume** (см. п. 3.2). Например,

$$x^6 + x^5 - 23\cdot x^4 - 3\cdot x^3 + 20\cdot x^2 - 40\cdot x + 800 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2\cdot\sqrt{2} \\ 2\cdot\sqrt{2} \\ -\sqrt{5}\cdot i \\ \sqrt{5}\cdot i \end{pmatrix}$$

$$x^6 + x^5 - 23\cdot x^4 - 3\cdot x^3 + 20\cdot x^2 - 40\cdot x + 800 \text{ solve, assume, } x = \text{real} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2\cdot\sqrt{2} \\ 2\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$x^6 + x^5 - 23\cdot x^4 - 3\cdot x^3 + 20\cdot x^2 - 40\cdot x + 800 \text{ solve, assume, } x > 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$x^6 + x^5 - 23\cdot x^4 - 3\cdot x^3 + 20\cdot x^2 - 40\cdot x + 800 \text{ solve, assume, } x = \text{RealRange}(3,5) \rightarrow 4$$

Рассмотрим некоторые особенности при построении решений тригонометрических уравнений. Так, например, оформив решение уравнения $\sin 2x = ½$ следующим образом

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\pi}{12} \\ \frac{5\cdot\pi}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{Given} \quad \sin(2x) = \frac{1}{2} \quad \text{Find}(x) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\pi}{12} & \frac{5\cdot\pi}{12} \end{pmatrix}$$

получим не все множество его корней, а только найденные при условии, когда аргумент функции (в нашем случае $2x$) принадлежит интервалу $[0, 2\pi)$. Чтобы найти решение уравнения на другом промежутке, надо его задать с помощью ключевого слова **assume**. Например,

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \text{ solve, assume, } x = \text{RealRange}\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{7\cdot\pi}{12} \\ \frac{5\cdot\pi}{12} \\ -\frac{11\cdot\pi}{12} \\ \frac{\pi}{12} \end{pmatrix}$$

А для того чтобы получить **все множество вещественных** решений, необходимо добавить модификатор **fully**:

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}\ \text{solve,fully} \rightarrow \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{12} + \pi\cdot\_n \\ \frac{5\cdot\pi}{12} + \pi\cdot\_n \end{pmatrix} & \text{if } \_n \in \mathbb{Z} \wedge \_n \in \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$$\text{Given} \quad \sin(2x) = \frac{1}{2} \quad \text{Find}(x)\ \text{fully} \rightarrow \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{12} + \pi\cdot\_n & \frac{5\cdot\pi}{12} + \pi\cdot\_n \end{pmatrix} & \text{if } \_n \in \mathbb{Z} \wedge \_n \in \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

В записи решения появляется сгенерированная MathCAD целочисленная переменная _n. (с символом _ (подчеркивание) впереди). При желании сгенерированное имя можно заменить на другое, которое ранее в документе не было использовано. Для такой замены используется модификатор **using**. Например,

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}\ \text{solve,fully,using,}\_n = n \rightarrow \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{12} + \pi\cdot n \\ \frac{5\cdot\pi}{12} + \pi\cdot n \end{pmatrix} & \text{if } n \in \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$$\text{Given} \quad \sin(2x) = \frac{1}{2} \quad \text{Find}(x)\ \text{fully,using,}\_n = n \rightarrow \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{12} + \pi\cdot n & \frac{5\cdot\pi}{12} + \pi\cdot n \end{pmatrix} & \text{if } n \in \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

Если переменная n ранее была задана, то общее решение рассматривается при заданном n, и результат будет такой:

$$n := 6$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}\ \text{solve,fully,using,}\_n = n \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{73\cdot\pi}{12} \\ \frac{77\cdot\pi}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{Given} \quad \sin(2x) = \frac{1}{2} \quad \text{Find}(x)\ \text{fully,using,}\_n = n \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{73\cdot\pi}{12} & \frac{77\cdot\pi}{12} \end{pmatrix}$$

Для решения **систем уравнений** можно использовать или блок решений **Given-Find** с оператором символьного вывода, или оператор символьного вывода с ключевым словом **solve**. В последнем случае система уравнений должна быть записана в матричном виде (строкой уравнений или столбцом уравнений). Например,

Given $x^2 + y^2 = 4$ $x = y$ $\mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$	Решения в столбцах
$(x^2 + y^2 = 4 \;\; x = y)$ solve,x,y $\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 4 \\ x = y \end{pmatrix}$ solve,x,y $\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$	Решения в строках

Оператор символьного вывода с ключевым словом **solve** используется и для решения неравенств. Например,

$$(x-4)^2 + 7 > 3 \text{ solve } \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1+2x} - \frac{2}{2+3x} + \frac{3}{3+4x} < \frac{4}{5x+4} \text{ solve } \rightarrow 0 < x \vee -\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2} \vee -\frac{4}{5} < x < -\frac{3}{4}$$

$$\log(x^2 - 4, 2) > 3 \text{ solve } \rightarrow x < -2\cdot\sqrt{3} \vee 2\cdot\sqrt{3} < x$$

$$x^2 \cdot 5^x - 5^{x+2} \le 0 \text{ solve } \rightarrow -5 \le x \le 5$$

$$\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}} \text{ solve } \rightarrow 1 < x \vee 0 < x < \log\left(\frac{4}{3}, 2\right)$$

$$x^2 - 10x + 25 > 0 \text{ solve } \rightarrow 5 < x \vee x < 5$$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 1} > 2 \text{ solve } \rightarrow x < \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} \vee \frac{\sqrt{37}}{2} + \frac{5}{2} < x$$

Для упрощения решения можно использовать ключевое слово **simplify**. Например,

$$2^{(x-5)\cdot(x-1)} > 8 \text{ solve } \rightarrow x < \frac{3\cdot\sqrt{\ln(2)} - \sqrt{7\cdot\ln(2)}}{\sqrt{\ln(2)}} \vee \frac{\sqrt{7\cdot\ln(2)} + 3\cdot\sqrt{\ln(2)}}{\sqrt{\ln(2)}} < x$$

$$2^{(x-5)\cdot(x-1)} > 8 \left|\begin{array}{l} \text{solve}, x \\ \text{simplify}, \max \end{array}\right. \rightarrow \sqrt{7} + 3 < x \vee x < 3 - \sqrt{7}$$

В некоторых случаях MathCAD представляет решение неравенства используя сгенерированные переменные. Например,

$$\sqrt{8 - x}\cdot(x^2 - 4) \ge 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} \_c1 \\ \_c2 \end{pmatrix}$$

Для получения развернутого ответа добавим к ключевому слову **solve** модификатор **fully**:

$$\sqrt{8-x}\cdot\left(x^2-4\right)\ge 0 \text{ solve,fully } \rightarrow \left|\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}\_c1\\ \_c2\end{pmatrix} & \text{if } 2\le \_c1 \wedge \_c2\le -2 \wedge \_c1\le 8\\ \text{undefined} & \text{otherwise}\end{array}\right.$$

Представленный результат соответствует следующему: $x \in (-\infty;-2]\cup[2;8]$.

Генерируемые MathCAD переменные используются и при записи решения системы неравенств. Например,

$$\begin{bmatrix}(x-1)\cdot(x+3)\ge 0\\ (x-2)\cdot(x-3)>0\end{bmatrix} \text{ solve,x,fully } \rightarrow \left|\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}\_c1\\ \_c2\\ \_c3\end{pmatrix} & \text{if } 1\le \_c1 \wedge \_c3\le -3 \wedge \_c1<2 \wedge 3<\_c2\\ \text{undefined} & \text{otherwise}\end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{x^2+10x+25}{4x-5}\ge 0\\ (x-2)\cdot\left(x^2-6x+9\right)\le 0\end{bmatrix} \text{ solve,fully } \rightarrow \left|\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}3\\ -5\\ \_c1\end{pmatrix} & \text{if } \frac{5}{4}<\_c1\le 2\\ \text{undefined} & \text{otherwise}\end{array}\right.$$

5. Применение функций пользователя

При проведении символьных вычислений <u>с оператором символьного вывода</u> могут быть использованы функции, определенные пользователем. Очевидно, это позволяет избежать громоздких записей и неоднократно использовать введенные функции. Например,

$$f(x) := \frac{6\cdot\sin(x)-7\cdot\cos(x)+1}{8\cdot\sin(x)+9\cdot\cos(x)-1}$$

$$f(\alpha)\left|\begin{array}{l}\text{rewrite, tan}\\ \text{simplify}\\ \text{substitute, }\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=4\end{array}\right. \rightarrow -\frac{85}{44}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \frac{3\cdot\sqrt{3}-\frac{5}{2}}{4\cdot\sqrt{3}+\frac{7}{2}} \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ simplify, max } \rightarrow \frac{6\cdot\sqrt{3}-5}{8\cdot\sqrt{3}+7}$$

$$F(x) := x+3 \qquad G(x) := x^2-4 \qquad \frac{F(x)}{G(x)} \text{ parfrac } \rightarrow \frac{5}{4\cdot(x-2)}-\frac{1}{4\cdot(x+2)}$$

$$f(x) := 2\cdot x^5 + 7\cdot x^4 + x^3 + 17\cdot x^2 - 15\cdot x - 12$$

$$f(x)\ \text{solve}, \text{assume}, x = \text{real}\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f(x) = 0\ \text{solve}, \text{assume}, x = \text{RealRange}(-5,-3)\ \rightarrow -4$$

Заметим, что результаты символьных вычислений могут быть присвоены переменным (скалярным, векторным) и использоваться для определения новых функций пользователя. Например,

$$f(x) := 2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21$$

$$R := f(x)\ \text{solve}, \text{assume}, x = \text{real}\ \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\max(R) \rightarrow \frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$a := 2 \qquad b := \sqrt{3} \qquad c := -\sqrt{3} \qquad d := -1$$

$$P(x) := (x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot(x-d)\ \text{expand}\ \rightarrow x^4 - x^3 - 5\cdot x^2 + 3\cdot x + 6$$

$$P(x)\ \text{coeffs}\ \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Использованная и рекомендуемая литература и Internet-источники

1. Дьяконов В. MATHCAD 8/2000: специальный справочник. – СПб.: Изд-во «Питер», 2000.
2. Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCAD 2001. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
3. https://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad
4. https://studfiles.net/preview/5725700/page:11/ (Дата обращения: 2.09.2017).
5. http://itmu.vsuet.ru/Posobija/MathCAD/gl05/index.htm (Дата обращения: 2.09.2017).
6. http://samoychiteli.ru/document20841.html (Дата обращения: 2.09.2017).
7. http://bourabai.ru/einf/mathcad/ch05.htm (Дата обращения: 2.09.2017).