

## Лекция № 1

### Общие сведения о системах компьютерной алгебры

За время, прошедшее от начала нынешнего века, мир компьютерной математики<sup>1</sup> сильно преобразился по сравнению со многими другими областями программного обеспечения. Многократно выросла производительность существующих систем, значительно обогатился набор их функциональных возможностей, вобрав в себя результаты новейших научных исследований. Появились новые оригинальные программные продукты для решения математических задач, в большинстве своем свободно распространяемые и открытые.

По преобладающему типу вычислений системы компьютерной математики (СКМ) принято делить на два класса<sup>2</sup>: *инженерные пакеты* и *системы компьютерной алгебры*. Инженерные пакеты созданы для эффективного выполнения громоздких численных расчетов, а системы компьютерной алгебры ориентированы прежде всего на символьные преобразования математических объектов и аналитическое решение связанных с ними задач. Заметим, что в научных исследованиях и технических расчетах специалистам приходится гораздо больше заниматься преобразованиями формул, чем собственно численным счетом, однако, когда появились ЭВМ основное внимание уделялось автоматизации последнего.

**Компьютерная алгебра** возникла в середине XX века на стыке математики и информатики. Это наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов. Синонимами термина «компьютерная алгебра» являются «символьные вычисления», «аналитические вычисления», «аналитические преобразования», «формальные вычисления».

**Система компьютерной алгебры (СКА, англ. *computer algebra system, CAS*)** — это прикладная программа для символьных вычислений, то есть выполнения преобразований и работы с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме.

В системах компьютерной алгебры используются следующие разделы математики: символьное интегрирование, гипергеометрическое суммирование, пределы, факторизация полиномов, наибольший общий делитель, метод Гаусса, диофантовы уравнения, производные от элементарных и специальных функций и др.).

Активная разработка систем компьютерной алгебры началась в конце 60-х годов. С тех пор создано значительное количество различных систем, получивших различную степень распространения; некоторые системы продолжают развиваться, другие отмирают, постоянно появляются новые.

Обширный список систем компьютерной алгебры представлен в Википедии [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_computer\\_algebra\\_systems](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems)

<sup>1</sup> **Компьютерная математика** – это совокупность методов и средств, обеспечивающих максимально комфортную и быструю подготовку алгоритмов и программ для решения **математических задач** любой сложности, при этом в подавляющем большинстве случаев с высокой степенью визуализации всех этапов решения. Компьютерные математические системы как класс специализированных программных средств, рассчитанных на индивидуальную работу, возникли лишь в начале 80-х годов XX века. Этому способствовало зарождение в это же время индустрии персональных компьютеров (ПК), что открыло дорогу таким системам к массовому пользователю. <http://neudoff.net/info/matematika/klassifikaciya-sredstv-kompyuternoj-matematiki/> - (Дата обращения: 29.08.2017).

<sup>2</sup> В ряде изданий к системам компьютерной математики (СКМ) обычно относят: табличные процессоры (например, Microsoft Excel); системы для статистических расчетов (например, STATISTICA); системы для моделирования, анализа и принятия решений (например, GPSS); системы компьютерной алгебры; универсальные математические системы.

## 1. Назначение, как работают системы компьютерной алгебры

Основное назначение **систем компьютерной алгебры (СКА)** – работа с математическими выражениями в символьной форме. К базовым типам данных СКА относятся числа и математические выражения. СКА работают следующим образом:

- математические объекты (алгебраические выражения, ряды, уравнения, векторы, матрицы и др.) и указания, что с ними делать, задаются пользователем на входном языке системы в виде символьных выражений;
- интерпретатор анализирует и переводит символьные выражения во внутреннее представление;
- символьный процессор системы выполняет требуемые преобразования или вычисления и выдает ответ в математической нотации (рис. 1, 2).

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{l} x^2 - y = 0 \\ x^2 - (y - 2)^2 = 0 \end{array} \right] \text{solve, x, y} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ & \int \frac{x+3}{x^2-4x+4} dx \rightarrow \ln(x-2) - \frac{5}{x-2} \\ & (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)^2 \text{expand} \rightarrow x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 \end{aligned}$$

Рис. 1. Примеры символьных преобразований в MathCAD

```
solve([x^2-y=0, x^2-(y-2)^2=0], [x, y]);
[[x=-2, y=4], [x=1, y=1], [x=-1, y=1], [x=2, y=4]]

integrate((x+3)/(x^2-4*x+4), x);
log(x-2) - 5/(x-2)

expand((x-1)*(x+2)*(x-3)^2);
x^4 - 5 x^3 + x^2 + 21 x - 18
```

Рис. 2. Примеры символьных преобразований в Maxima

Алгоритмы внутренних преобразований имеют алгебраическую природу, что и отражено в названии систем.

Далеко не каждая математическая задача имеет определяемое существующими математическими формализмами аналитическое решение. Специалисты в областях прикладной и компьютерной математики единодушны во мнении, что много практически важных задач и не могут быть формализованы настолько, чтобы решаться аналитически, в лучшем случае они могут решаться только численными методами [1].

Достаточно полный список систем компьютерной алгебры с указанием их функциональности и платформ, на которых они эксплуатируются, представлен в Википедии [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_computer\\_algebra\\_systems](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems)

Что касается классификации систем компьютерной алгебры, то по критерию **функционального назначения** часто выделяют СКА *общего назначения (универсальные)* и *специализированные*. Наиболее известные системы первой группы: Derive, Mathematica, Maple, Macsyma и ее потомок Maxima, Scratchpad и ее потомок Axiom, Reduce, MuPAD, MathCAD, MATHLAB, Sage, Yacas, Scientific WorkPlace, Kalamaris. Эти системы позволяют работать в широком диапазоне предметных областей. Системы для решения задач одного или нескольких смежных разделов символьной математики – это специализированные СКА. Примерами таких систем являются: GAP (алгебра групп), Cadabra (тензорная алгебра), KANT (алгебра и теория чисел) и др.

Классификация СКА по **типу архитектуры** является скорее следствием истории становления, потому что у большинства на современном этапе структуры одинаковые. Отличительным признаком является – используется собственное ядро или заимствовано от других. Более того, у некоторых изначально было ядро одного производителя, потом перешли на другое. Например, у MathCAD символьные вычисления выполнялись на базе ядра системы Maple, а начиная с 14 версии, используется символьное ядро MuPAD.

## 2. Типовая структура СКА

Внутреннюю структуру СКА составляют:

- ядро системы,
- интерфейсная оболочка,
- библиотеки специализированных программных модулей и функций,
- пакеты расширения,
- справочная система.

Функции ядра, как правило, реализуются на машинно-ориентированном языке, т.к. требуется высокая производительность их выполнения. У некоторых СКА оптимизация машинного кода обеспечивается, в том числе, с помощью частичной реализации функциональности на языке ассемблера или аппаратно.

**Ядро** содержит реализации операторов и встроенных функций, обеспечивающих выполнение аналитических преобразований математических выражений на основе системы определенных правил.

Объем ядра обычно ограничивают, но к нему добавляют библиотеки дополнительных процедур и функций. Распределение состава поддерживаемых системой алгоритмов символьных вычислений между ядром и библиотеками осуществляется по принципу баланса производительности и функциональности с учетом текущего состояния наиболее распространенного аппаратного обеспечения. У большинства коммерческих СКА алгоритмы вычислений и программные модули ядра являются ноу-хау разработчиков и относятся к разряду тщательно скрываемых данных.

**Библиотеки специализированных программных модулей и функций, пакеты расширения** содержат систематизированные по назначению реализации алгоритмов обработки абстрактных объектов, решения типовых математических задач.

Библиотеки и пакеты функционально расширяют ядро, а также обеспечивают возможности программирования алгоритмов не только на языке самой системы, но и на языке ее реализации, а у многих СКА и на основных языках программирования высокого уровня.

**Интерфейсные оболочки** обеспечивают поддержку всех функций, необходимых для информационных и управляющих взаимодействий между системой и пользователями, в том числе: ввод, редактирование, сохранение, обмен программами, использование разных аппаратных средств.

У большинства СКА интерфейсные оболочки разные для разных ОС, при этом ведущие системы компьютерной алгебры работают без перекомпилирования исходного кода, как на различных аппаратных платформах, так и под управлением разных операционных систем; пользовательские интерфейсы обеспечивают похожие визуальные сценарии работы в СКА на разных компьютерах, в разных ОС.

**Справочная система** всех СКА содержит и обеспечивает пользователей описаниями функциональных возможностей и демонстрационными примерами работы, информационными сообщениями о текущем состоянии системы, а также сведениями о математических основах алгоритмов.

Справедливо утверждение, что многие СКА, по сути, являются не только инструментами для получения и анализа решений, но и математическими энциклопедиями. Для СКА типичны организация и обеспечение диалога получения справок пошагово с вложенными уровнями абстракции и/или конкретизации информации. Обычно пользователю доступны: краткая контекстная справка о функциональном назначении выбранного элемента информации о синтаксисе и семантике операторов и функций языка с поясняющими примерами, описание реализованных вариантов решения. Информативность справочной системы обеспечивается обязательным описанием всех функций ядра, инструментами поиска сведений об объекте СКА по имени, тематическому разделу, ключевым словам. У многих в системе помощи содержатся обучающие материалы с разделением по категориям пользователей, интерактивные учебные курсы решения математических задач в среде системы, некоторые даже имеют консультанта-репетитора, выполняющего пошаговое решение примеров с поясняющими комментариями.

### 3. Основные функциональные возможности СКА

Системы компьютерной алгебры позволяют реализовывать с использованием компьютера аналитические и численные методы решения задач, представляя результаты в математической нотации, обеспечивают графическую визуализацию, оформление результатов и подготовку к изданию. Используя СКА, можно выполнять в аналитической форме:

- упрощение выражений до меньшего размера или приведение к стандартному виду,
- подстановки символьных и численных значений в выражения,
- изменение вида выражений: раскрытие произведений и степеней, частичная и полная факторизация (разложение на множители),
- разложение на простые дроби, удовлетворение ограничений, запись тригонометрических функций через экспоненты, преобразование логических выражений,
- нахождение пределов функций и последовательностей,
- операции с рядами (суммирование, умножение, суперпозиция),
- дифференцирование в частных и полных производных,
- нахождение неопределённых и определённых интегралов (символьное интегрирование),

- анализ функций на непрерывность,
- поиск экстремумов функций и асимптот,
- символьное решение задач оптимизации: нахождение глобальных экстремумов, условных экстремумов и т. д.,
- решение линейных и нелинейных уравнений,
- алгебраическое (нечисленное) решение дифференциальных и конечно-разностных уравнений,
- интегральные преобразования,
- прямое и обратное быстрое преобразование Фурье,
- интерполяция, экстраполяция и аппроксимация,
- операции с векторами,
- матричные операции: обращение, факторизация, решение спектральных задач,
- статистические вычисления,
- машинное доказательство теорем.

Если задача имеет точное аналитическое решение, пользователь СКА может получить это решение в явном виде (разумеется, речь идет о задачах, для которых известен алгоритм построения решения).

Большинство СКА обеспечивают также:

- числовые операции произвольной точности,
- целочисленную арифметику для больших чисел,
- вычисление фундаментальных констант с произвольной точностью,
- Поддержку функций теории чисел,
- Редактирование математических выражений в двумерной форме (с индексами, обычными дробями и т. д.)
- Построение графиков аналитически заданных функций,
- Построение графиков функций по табличным значениям,
- построение графиков функций в двух или трёх измерениях,
- анимацию формируемых графиков разных типов,
- использование пакетов расширения специального назначения,
- программирование на встроенном языке.

Некоторые СКА также обеспечивают:

- создание и редактирование графики (создание компьютерных изображений, а также обработку сигналов и анализ изображений),
- синтез звука.

В СКА можно производить вычисления в арифметике с плавающей точностью и указывать точность, реализована точная рациональная арифметика, т.е. можно производить численные расчеты без потери точности.

К особенностям СКА относят преимущественно *интерактивный характер работы* – пользователь не знает заранее ни размера, ни формы результатов и поэтому должен иметь возможность корректировать ход вычислений на всех этапах, задавать режим пошагового выполнения с выводом промежуточных результатов.

Большинство СКА в современной реализации не только применимы для исследования различных математических и научно-технических задач с использованием встроенных и дополнительных функций, но и содержат все составляющие языков программирования – де

факто являются проблемно ориентированными языками программирования высокого уровня.

#### 4. Обзор систем компьютерной алгебры

К сожалению, на российском рынке массовые системы компьютерной алгебры представлены только зарубежными программами. Это связано с тем, что современные программы этого класса относятся к числу наиболее сложных программных продуктов, требующих для своей разработки больших интеллектуальных, трудовых и финансовых затрат. Пик разработки таких программ пришелся на начало 90-х годов, что совпало с распадом СССР и возникновением в России глубокого экономического и финансового кризиса. В таких условиях, создание программ, способных конкурировать с многочисленными зарубежными программами компьютерной математики, стало практически невозможным. Однако благодаря известным достоинствам операционных систем класса Windows нет никаких принципиальных ограничений на применение зарубежных программ компьютерной математики русскоязычными пользователями, хотя есть и определенные неудобства (например, англоязычные справочные системы)<sup>3</sup>.

Наиболее мощными и качественными среди универсальных систем компьютерной алгебры являются коммерческие пакеты **Maple** и **Mathematica**, разработка которых осуществляется на постоянной основе уже более четверти века. Эти системы имеют собственные ядра, оснащены развитым пользовательским интерфейсом и обладают разнообразными графическими и редакторскими возможностями.

#### Maple

Является продуктом компании Waterloo Maple Software, Inc. (<http://www.maplesoft.com/>), которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Maple позволяет выполнять как численные, так и аналитические расчеты с возможностью редактирования текста и формул на рабочем листе. Благодаря представлению формул в полиграфическом формате, великолепной двух- и трехмерной графике и анимации Maple является одновременно и мощным научным графическим редактором. Простой и эффективный язык-интерпретатор, открытая архитектура, возможность преобразования кодов Maple в коды C делает его очень эффективным средством создания новых алгоритмов. Обладает интуитивно понятным интерфейсом, простыми правилами работы и широким функционалом.



<b>Разработчик</b>	Waterloo Maple, Inc.
<b>Написана на</b>	C, язык Maple
<b>Операционная система</b>	Windows (7, 8 и 10), macOS, Linux
<b>Первый выпуск</b>	1982
<b>Лицензия</b>	Проприетарная

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Maple\\_\(software\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Maple_(software)), <https://ru.wikipedia.org/wiki/Maple>

<sup>3</sup> <http://neudoff.net/info/matematika/klassifikaciya-sredstv-kompyuternoj-matematiki/> - (Дата обращения: 29.08.2017).



## Mathematica

Система Mathematica — компании Wolfram Research, Inc. (<http://www.wolfram.com/>) имеет чрезвычайно широкий набор средств, переводящих сложные математические алгоритмы в



программы. По сути дела, все алгоритмы, содержащиеся в курсе высшей математики технического вуза, заложены в память компьютерной системы Mathematica. В некоторых странах (например, в США) система высшего образования тесно связана с этим продуктом. Огромное преимущество системы Mathematica состоит в том, что ее операторы и способы записи алгоритмов просты и естественны. Mathematica имеет мощный графический пакет, с помощью которого можно строить графики очень сложных функций одной и двух переменных. Главное преимущество Mathematica, делающее ее бесспорным лидером среди других систем высокого уровня, состоит в том, что эта система получила сегодня очень широкое распространение во всем мире, охватив огромные области применения в научных и инженерных исследованиях, а также в сфере образования.

<b>Разработчик</b>	Wolfram Research
<b>Написана на</b>	C
<b>Операционная система</b>	Microsoft Windows, OS X, Linux
<b>Первый выпуск</b>	23 июня 1988
<b>Лицензия</b>	Проприетарная

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfram\\_Mathematica](https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Mathematica), <https://ru.wikipedia.org/wiki/Mathematica>

Одной из самых популярных и массовых систем компьютерной математики, ориентированных на высшее образование, является система **MathCAD**<sup>4</sup>.

## MathCAD

Mathcad — система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличается лёгкостью использования и применения для коллективной работы.

Mathcad был задуман и первоначально написан Алленом Раздовом из Массачусетского технологического института (MIT), соучредителем компании Mathsoft,



которая с 2006 года является частью корпорации PTC (Parametric Technology Corporation). Mathcad имеет интуитивный и простой для использования интерфейс пользователя. Для ввода формул и данных можно использовать как клавиатуру, так и специальные панели инструментов. Некоторые из математических возможностей Mathcad (версии до 13.1 включительно) основаны на подмножестве системы компьютерной алгебры Maple (МКМ, Maple Kernel Mathsoft). Начиная с 14 версии — использует символьное ядро MuPAD (<https://en.wikipedia.org/wiki/MuPAD>).

Работа осуществляется в пределах рабочего листа, на котором уравнения и выражения отображаются графически, в противовес текстовой записи в языках программирования. При создании документов-приложений используется принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get — «что видишь, то и получаешь»).

Несмотря на то, что эта программа, в основном, ориентирована на пользователей, не являющихся программистами, Mathcad также используется в сложных проектах, чтобы визуализировать результаты математического моделирования путём использования распределённых вычислений и

<sup>4</sup> Название системы происходит от двух слов – MATHematica (математика) и CAD (Computer Aided Design – системы автоматизированного проектирования, или САПР).

традиционных языков программирования. Также Mathcad часто используется в крупных инженерных проектах, где большое значение имеет трассируемость и соответствие стандартам.

Mathcad достаточно удобно использовать для обучения, вычислений и инженерных расчетов. Есть возможность создания электронных книг (e-Book).

<b>Разработчик</b>	Mathsoft, PTC
<b>Операционная система</b>	Microsoft Windows
<b>Первый выпуск</b>	1986
<b>Лицензия</b>	Проприетарная
<b>Сайт</b>	<a href="https://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad">https://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad</a>

См. <https://en.wikipedia.org/wiki/Mathcad>, <https://ru.wikipedia.org/wiki/Mathcad>

Отличительной чертой современного состояния ИТ является то, что коммерческие программные продукты во многих случаях полностью или частично можно заменить некоммерческим программным обеспечением, аналогами с открытым исходным кодом – свободными программами. Видное место среди некоммерческих проектов занимают системы **Axiom**, **Maxima** и **Reduce**. Несмотря на то что их основы были заложены еще до появления Maple и Mathematica, в перечисленных системах пока не достигнута «энциклопедичность», присущая Maple и Mathematica. Однако технически, благодаря открытости сходного кода, системы Axiom, Maxima и Reduce более гибки в использовании.



## Maxima

Написана на языке Common Lisp. Произошла от системы Macsyma, разрабатывавшейся в MIT с 1968 по 1982 годы в рамках проекта Project MAC, финансируемого Министерством энергетики США (DOE) и другими государственными организациями. Профессор Уильям Шелтер (англ. Bill Schelter) из Техасского университета в Остине поддерживал один из вариантов системы, известный как DOE Macsyma, с 1982 года до самой своей смерти в 2001 году. В 1998 году Шелтер получил от Министерства энергетики разрешение опубликовать исходный код DOE Macsyma под лицензией GPL, и в 2000 году он создал проект на SourceForge.net (<http://maxima.sourceforge.net/>) для поддержания и дальнейшего развития DOE Macsyma под именем Maxima. Имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам, как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высочайшей степенью переносимости: может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных, и вплоть до самых мощных. Для системы построено несколько графических интерфейсов пользователя и надстроек: XMaxima (включен в поставку во многих ОС), wxMaxima (основан на wxWidgets; включается в поставку для ОС Windows) и других, а также может работать в режиме командной строки (используя псевдографику). Для редактирования научных текстов в Maxima может использоваться программа texmacs, которая позволяет экспортировать документы в ряд популярных форматов, включая TeX/LaTeX и HTML/MathML. Благодаря открытому коду системы появились производные решения, например, на основе Maxima сделана программа Stack, предназначенная для автоматизированной проверки] правильности математических выражений, применимая, в частности, для компьютерной проверки ответов обучающихся математике.



<b>Автор</b>	Проект MAC Массачусетского технологического института
<b>Разработчик</b>	Уильям Шелтер, сообщество добровольцев
<b>Написана на</b>	Common Lisp
<b>Операционная система</b>	Linux, Microsoft Windows, Mac OS X, FreeBSD, Android
<b>Первый выпуск</b>	1982
<b>Лицензия</b>	GNU GPL
<b>Сайт</b>	<a href="http://maxima.sourceforge.net/">http://maxima.sourceforge.net/</a>

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Maxima\\_\(software\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_(software)), <https://ru.wikipedia.org/wiki/Maxima>

## Axiom

Свободная система компьютерной алгебры. Она состоит из среды интерпретатора, компилятора и библиотеки, описывающей строгую, математически правильную иерархию типов. Разработка системы была начата в 1971 году группой исследователей IBM под руководством Ричарда Дженкса (Richard Dimick Jenks). Изначально система называлась Scratchpad. Первоначально проект рассматривался как исследовательская платформа для разработки новых идей в вычислительной математике. В 90-х система была продана компании Numerical Algorithms Group (NAG), получила название Аxiom и стала коммерческим продуктом. Но по ряду причин система не получила коммерческого успеха и была отозвана с рынка в октябре 2001. NAG решила сделать Аxiom свободным программным обеспечением и открыла исходные коды под модифицированной лицензией BSD. В 2007 у Аxiom появились две ветки (два форка) с открытым исходным кодом: OpenAxiom и FriCAS. Разработка системы продолжается, выходят ее новые версии.

<b>Разработчик</b>	Независимая группа людей
<b>Написана на</b>	Лисп
<b>Операционная система</b>	Кроссплатформенное ПО
<b>Первый выпуск</b>	1986
<b>Лицензия</b>	Модифицированная лицензия BSD
<b>Сайт</b>	<a href="http://axiom-developer.org">http://axiom-developer.org</a>

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom\\_\(computer\\_algebra\\_system\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_(computer_algebra_system)), <https://ru.wikipedia.org/wiki/Axiom>

## Reduce

Reduce — бесплатная система компьютерной алгебры общего назначения, имеющая расширенные возможности для применения в физике.

Разработку начал в 1960-е годы Энтони Хёрн (Anthony C. Hearn), позднее к созданию системы присоединились и другие учёные. Система написана целиком на специально созданном для неё языке Portable Standard Lisp — диалекте Лиспа, включающим, в дополнении к языку со стандартным скобочным лисп-синтаксисом, специальный язык RSL с алголоподобным синтаксисом. RSL используется как основа для пользовательского языка системы.

С декабря 2008 года Reduce стал доступен бесплатно как открытое программное обеспечение под видоизменённой лицензией BSD license на сайте SourceForge, до этого пакет стоил 695 долларов.

Reduce имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высокой степенью переносимости: она может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных компьютеров, вплоть до самых мощных. Для редактирования научных текстов в Reduce может использоваться программа *texmacs*, что позволяет экспортировать документы в ряд популярных форматов, включая TeX (LaTeX) и HTML (MathML).

Доступна на различных платформах Unix, Linux, Microsoft Windows, Apple Macintosh, iOS и Android. Почти все эти реализации основаны на Portable Standard Lisp или Codemist Standard Lisp.

Разработка системы продолжается, выходят ее новые версии.

Разработчик	Anthony C. Hearn et al.
Написана на	Лисп
Операционная система	Кроссплатформенное ПО
Лицензия	лицензия BSD
Сайт	<a href="http://reduce-algebra.com">http://reduce-algebra.com</a>

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Reduce\\_\(computer\\_algebra\\_system\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Reduce_(computer_algebra_system)),  
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Reduce>

Без серьезного реального опыта работы в каждой системе крайне затруднительно объективно сравнивать возможности различных универсальных систем компьютерной алгебры и рекомендовать какую-либо определенную из них. Несомненно, выбор зависит от предметной области научных, образовательных и технических исследований.

## Использованная литература и Internet-источники

1. *Таранчук В. Б.* Основные функции систем компьютерной алгебры. — Минск: БГУ, 2013. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/46210>
2. Современные системы компьютерной математики <http://compress.ru/article.aspx?id=12530> – (Дата обращения: 29.08.2017).
3. <https://en.wikipedia.org/wiki/>
4. <https://ru.wikipedia.org/wiki/>

## Дополнительные источники информации

Курс «Компьютерная алгебра» <http://kspt.icc.spbstu.ru/course/comp-algebra> (кафедра компьютерных систем и программных технологий ФТК СПбГПУ).