

## Лабораторная работа № 4

### Типовые задачи математического анализа

#### Вариант 1

1. Вычислите пределы числовых последовательностей

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} \right)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right]$$

2. Вычислите пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + 5\pi/2) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$$

3. Вычислите производные функций:

$$1) y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}, \quad 2) y = \sin\sqrt{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$$

4. Задавая  $n$ , найдите производную функции  $y = \frac{4x+7}{2x+3}$ .

5. Вычислите интегралы:

$$1) \int (4-16x) \sin 4x dx, \quad 2) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

6. Вычислите интегралы:

$$1) \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^2} dx,$$

$$2) \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$3) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$4) \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}).$$

7. Найдите суммы рядов:

$$1) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$$

8. Найдите сумму двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{3^{2n}} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right]$$

9. Найдите значения следующих произведений:

$$1) \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$$

$$2) \prod_{n=2}^{\infty} \left[ 1 - \frac{2}{n \cdot (n+1)} \right]$$

10. Постройте разложения по целым неотрицательным степеням переменной  $x$  до членов указанного порядка включительно следующих функций:

$$1) \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \quad \text{до члена с } x^4, \quad 2) \sqrt[3]{\sin x^3} \quad \text{до члена с } x^{13},$$

$$3) \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{до члена с } x^7.$$

11. Найдите градиент функции  $f(x, t) = e^{\frac{x^2-y}{\pi}} \sin(xy)$  в точке

$$M\left(2, \frac{\pi}{3}\right).$$

12. Покажите, что функция  $u(x, y) = x \cdot f\left(\frac{y - x^2}{x}\right)$ , где  $f(t)$  – произвольная дифференцируемая функция, является решением уравнения:  $x \frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = u$ .
13. Выполните исследование функции и постройте ее график:

1)  $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2},$

2)  $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}.$