

Лабораторная работа № 3

Типовые задачи линейной алгебры

Вариант 1

1. Вычислите определители:

$$1) \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}, \text{ где } \varepsilon = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi,$$

$$4) \begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y + b^{-y})^2 & (b^y - b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z + c^{-z})^2 & (c^z - c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} \alpha^2 + 1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 + 1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 + 1 \end{vmatrix};$$

$$6) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

2. Разложите на множители определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

3. Раскройте определитель

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}.$$

Определите коэффициенты при степенях x^4 и x^3 .

4. Вычислите произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Постройте решение системы с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2 = 0, \\ -\frac{2y}{b} + \frac{3z}{c} - 1 = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0. \end{cases}$$

7. Найдите решение уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

8. Постройте характеристический многочлен для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы A .

9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$(1, 1, 1), \quad (2, 3, -1), \quad (3, -1, -1).$$

10. Найти центр и радиус сферы, проходящей через точки:

$$(1, 1, 1), \quad (1, 1, -1), \quad (1, -1, 1), \quad (-1, 0, 0).$$

Составьте уравнение сферы, проходящей через указанные точки.

11. Найти все значения λ , при которых вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 :

$$a_1 = (2, 3, 5), \quad a_2 = (3, 7, 8), \quad a_3 = (1, -6, 1), \quad b = (7, -2, \lambda).$$