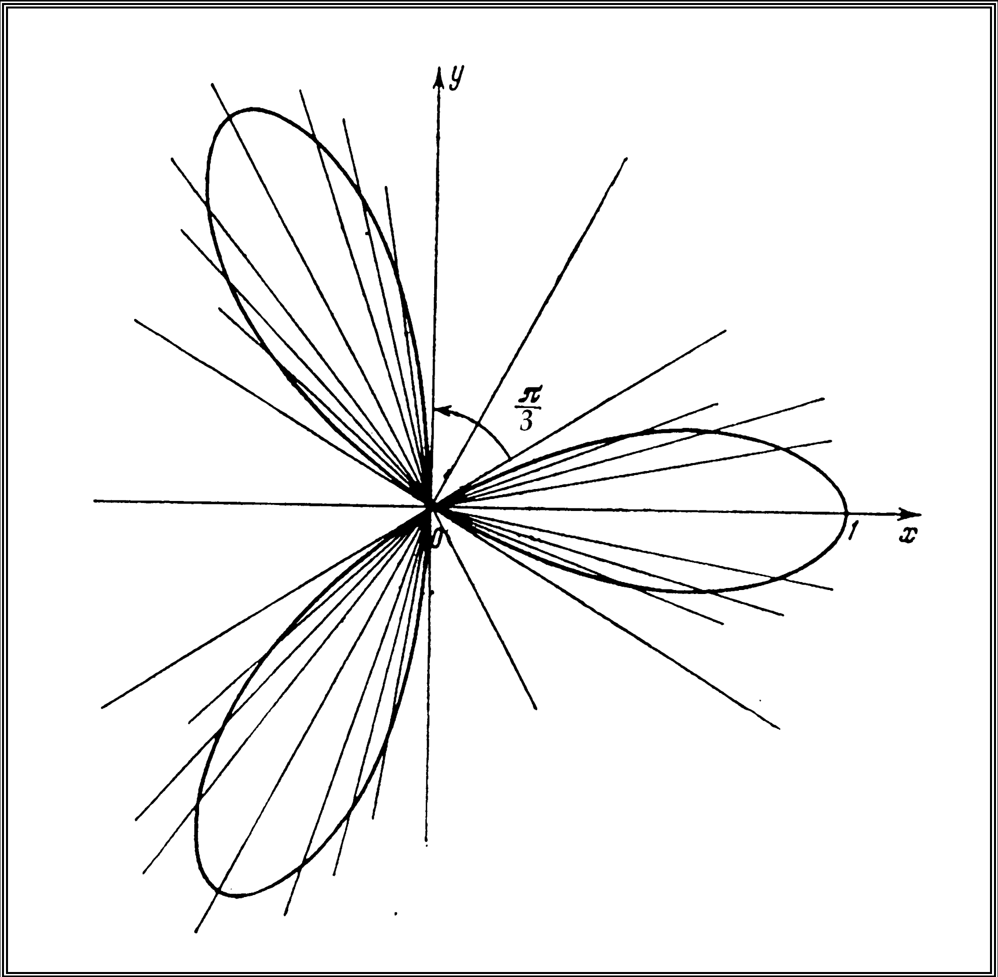
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач



Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2011

УДК 514.7 (075.8)
ББК 22.151.54я73
А64

Рассмотрен и рекомендован к печати на заседании
кафедры геометрии и топологии 23 октября 2009 года

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Петрозаводского государственного университета

Составители:
*Иванов А. В., Платонов С. С., Вересова А. Т.,
Матюшичев К. В., Степанова Е. Н.*

А64 Аналитическая геометрия: Сб. задач / Сост. А. В. Иванов, С. С. Платонов, А. Т. Вересова, К. В. Матюшичев, Е. Н. Степанова. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2011. — 90, [2] с.

Сборник задач составлен в соответствии с требованиями образовательного стандарта РФ для математических специальностей. Большая часть предлагаемых заданий имеет вычислительный характер, в то же время в издании достаточно широко представлены задачи на доказательство.

УДК 514.7 (075.8)
ББК 22.151.54я73

© Петрозаводский государственный университет, 2011

Предисловие

Предлагаемый сборник задач составлен в соответствии с требованиями образовательного стандарта Российской Федерации для математических специальностей, а также с учетом сложившихся традиций преподавания аналитической геометрии на математическом факультете Петрозаводского государственного университета для специальностей «математика», «информационные системы» и «прикладная математика». Количество часов, отведенных на практические занятия по этой дисциплине, на разных специальностях различно, но в любом случае, по нашему мнению, в сборнике найдется достаточное количество задач по всем разделам курса для содержательного обеспечения учебного процесса.

Большая часть предлагаемых заданий имеет вычислительный характер, но в то же время достаточно широко представлены и задачи на доказательство. В тексте они специально не выделяются, их характер ясен из постановки. Ответ (т. е. текст доказательства) в задачах подобного рода не приводится.

Необходимый теоретический материал для решения предлагаемых заданий содержится в книгах:

Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968;

Федорчук В. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990.

При этом можно использовать и другие учебники по аналитической геометрии для математических специальностей университетов. Если в задачах встречаются достаточно специальные понятия и термины, то, как правило, прямо в формулировке приводятся необходимые определения.

При составлении сборника была использована следующая литература:

Моденов П. С. Сборник задач по аналитической геометрии / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. М.: Наука, 1976;

Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1972;

Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М.: Физматгиз, 1962.

§ 1. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении

Во всех задачах этого параграфа система координат прямоугольная.

1. Дана точка $A(3;7)$. Найти точку B, симметричную точке A относительно:

1) оси Ox,

2) оси Oy,

3) начала координат,

4) биссектрисы первой и третьей координатных четвертей,

5) биссектрисы второй и четвертой координатных четвертей.

2. Дана точка $A(1;-2;4)$. Найти точку B, симметричную A относительно:

1) оси Ox,

2) оси Oz,

3) плоскости Oxy,

4) начала координат,

5) биссектрисы двугранного угла, образованного плоскостями Oxy и Oxz, пересекающей положительный октант.

3. Точки A, B, C лежат на плоскости. Известно, что точка B симметрична точке A относительно оси Ox, а точка C симметрична A относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей. Найти координаты точки A, если:

1) абсцисса B равна 2, абсцисса C равна (-1),

2) абсциссы B и C совпадают, а длина отрезка $|AB|$ равна 4,

3) точки B и C симметричны относительно начала координат.

4. Даны три точки A, B, C в пространстве. При этом A симметрична B относительно плоскости Oxy, C симметрична A относительно оси Oz, а точки B и C симметричны относительно оси Oy. Доказать, что все три точки лежат в плоскости Oxz.

5. Дана точка $A(1;2)$. Найти на оси Ox точку B, для которой $|AB| = \sqrt{5}$.

6. Дана точка $A(4;1)$. Известно, что точка B равноудалена от координатных осей и $|AB| = 3$. Найти B.

7. Дана точка $A(-1;3)$. Известно, что расстояние от A до B равно 5, а длина проекции отрезка AB на ось Ox равна 3. Найти B.

8. Точка A лежит на плоскости, A_1 и A_2 — проекции A на оси Ox и Oy. Известно, что $|A_1B| = \sqrt{10}$, $|A_2B| = \sqrt{13}$, где $B(-2;3)$. Найти координаты A.

9. Дана точка $A(-1;0;5)$. На оси Oz найти точку B, для которой $|AB| = \sqrt{10}$.

10. Даны точки $A(1;1;2)$ и $B(1;4;1)$. В плоскости Oxz найти точку C, для которой $|AC| = \sqrt{5}$, $|BC| = \sqrt{17}$.

11. Даны вершины треугольника: $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(-1;4)$. Найти:

1) угол при вершине A,

2) площадь треугольника.

12. Найти площадь S параллелограмма $ABCD$, если известны три его вершины: $A(1;-1)$, $B(2;5)$, $C(-1;3)$.

13. Даны вершины треугольника: $A(1;2;-1)$, $B(1;1;3)$, $C(0;2;1)$. Определить тип треугольника (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный).

14. В пространстве расположен квадрат $ABCD$. Известны две его противоположные вершины: $A(1;3;1)$, $C(-1;0;6)$. Найти площадь квадрата.

15. В равнобедренном треугольнике ABC известны две вершины основания $A(1;2)$, $C(3;8)$ и длина боковой стороны $|AB| = 10$. Найти B.

16. Даны точки $A(3;4)$ и $B(2;-1)$. На оси Oy найти точку C так, чтобы угол ACB был прямым.

17. Даны точки $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(6;1)$, $D(5;-1)$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником.

18. Даны вершины треугольника: $A(-1;-1)$, $B(1;3)$, $C(2;4)$. Найти центр и радиус описанного круга.

19. Найти центр и радиус окружности, которая касается координатных осей и проходит через точку $A(2;1)$.

20. Найти центр шара, который касается координатных плоскостей, если известно, что его радиус равен 4 и точка $A(3;-3;4)$ лежит внутри шара.

21. Даны вершины треугольника $A(1;3)$, $B(3;-5)$, $C(-3;1)$. Найти:

1) середины его сторон,

2) точку пересечения медиан.

22. Найти длину медиан треугольника ABC, у которого $A(1;-1;0)$, $B(1;3;4)$, $C(1;1;6)$.

23. Выразить координаты точки пересечения медиан треугольника через координаты его вершин $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$.

24. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-5;3)$, $B(1;1)$ и точка пересечения его диагоналей $E(2;0)$. Найти оставшиеся две вершины.

25. Даны координаты середин сторон треугольника: $(2;4)$, $(-3;0)$, $(2;1)$. Найти его вершины.

26. Найти две точки A и B, зная, что точка $C(-5;4)$ делит отрезок AB в отношении $3:4$, а точка $D(6;-5)$ — в отношении $2:3$.

27. Дан треугольник с вершинами $A(4;1)$, $B(7;5)$, $C(-4;7)$. Вычислить длину биссектрисы AD угла BAC.

28. Даны три последовательные вершины трапеции $A(-1;-2)$, $B(1;3)$, $C(9;9)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку S пересечения боковых сторон, зная, что длина ее основания AD равна 15.

§ 2. Уравнение линии. Геометрическое место точек. Полярная система координат

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной. Если в условии задачи одновременно упоминаются полярная и декартова системы координат, то эти системы предполагаются естественно связанными друг с другом: начало декартовой системы совпадает с полюсом, ось Ox — с полярной осью и обе системы имеют положительную ориентацию.

29. Даны точки M_1, M_2, M_3 и уравнение линии L. Установить, какие из этих точек лежат на L, а какие не лежат.

1) $M_1(0;0)$, $M_2(0;-1)$, $M_3(-1;-1)$, $L\colon 2x+4y+6=0$;

2) $M_1(1;0)$, $M_2(-1;3)$, $M_3(-\frac{3}{2};\frac{\pi}{3})$, $L\colon 2x+\sin 3y+3=0$;

3) $M_1(0;1)$, $M_2(-1;6)$, $M_3(\sqrt{17-\sqrt{29}};\frac{\pi}{7})$, $L\colon\ x^2+y^2-2x-4y+6=0$.

30. Дано уравнение линии L. Найти точки пересечения L с осями координат.

1) $3x-y+4=0$;

2) $4(x-1)^2+9(y+1)^2=36$;

3) $|x+1| = |y-2|$;
4) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$.

31. На эллипсе $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ найти точки, абсцисса которых равна:

1) 1;
2) $\sqrt{3}$;
3) -2;
4) $-\dfrac{7}{3}$.

32. Доказать, что абсцисса всех точек линии $L\colon 2x+y^2-3y+1=0$ не превосходит $\dfrac{5}{8}$.

33. Даны уравнения линий L_1 и L_2. Найти точки их пересечения.
1) $L_1\colon x + 2y + 2 = 0$, $L_2\colon -x + y + 4 = 0$;
2) $L_1\colon x^2 - y = 0$, $L_2\colon x - y + 2 = 0$;
3) $L_1\colon 2x^2 + 4y^2 = 1$, $L_2\colon x^2 - 2y^2 = 1$;
4) $L_1\colon x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$, $L_2\colon x + y + 1 = 0$.

34. Построить линии, заданные уравнениями:
1) $x - 2y + 4 = 0$;
2) $x^2 + y = 0$;
3) $x^2 + 2x - y = 0$;
4) $y^2 + 2y + x = 0$;
5) $x^2 + y^2 + 2y = 3$;
6) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$;
7) $x^2 + y^2 + 2y + 2 = 0$;
8) $x^2 + xy = 0$;
9) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$;
10) $|x+1| = |y|$;
11) $|x| + |y+1| = 1$.

35. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек A и B:
1) $A(0;0)$, $B(2;0)$;
2) $A(1;3)$, $B(-1;4)$.

36. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от координатных осей.

37. Найти уравнение множества точек, которые удалены от оси Oy на расстояние 2.

38. Найти уравнение множества точек, которые удалены от прямой, заданной уравнением $y = x$, на расстояние $\sqrt{2}$.

39. Дана точка $P(2;4)$. Найти уравнение множества точек, делящих отрезок PN в отношении $1:1$, где N — произвольная точка оси Ox.

40. Дана точка $P(3;0)$ и прямая l, заданная уравнением $y = x$. Найти уравнение множества точек, делящих отрезок PN в отношении $1:2$, где N — произвольная точка прямой l.

41. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от оси Oy и точки $F(2;0)$.

42. Найти уравнение множества точек M, для которых $|MA|^2 + |MB|^2 = 3$, где $A(1;0)$, $B(-1;1)$.

43. Найти множество точек, для которых суммы квадратов расстояний до противоположных вершин прямоугольника равны.

44. Найти множество точек, для которых суммы квадратов расстояний до противоположных вершин ромба равны.

45. Дан прямоугольный треугольник ABC (AC — гипотенуза). Найти множество точек M, для которых $|MC|^2 + |MA|^2 = |MB|^2$.

46. В окружности $(x-1)^2 + y^2 = 25$ проведены всевозможные хорды длины 6. Найти уравнение множества точек, которые являются серединами этих хорд.

47. Даны прямая $l\colon\ x = -2$ и точка $F(2;0)$. Через $|Ml|$ обозначим расстояние от точки M до l. Требуется найти уравнение множества точек M, для которых отношение $\dfrac{|MF|}{|Ml|}$ равно:

1) 1;
2) 2;
3) $\dfrac{1}{2}$.

48. Даны окружность $S\colon\ x^2 + y^2 = 2$ и прямая $l\colon\ x = 4$. Найти уравнение множества точек, которые равноудалены от S и l.

49. Отрезок AB длины 4 расположен так, что точка A лежит на оси Ox, а точка B — на оси Oy. Найти уравнение множества точек, которые:

1) делят отрезок AB пополам;
2) делят отрезок AB в отношении $1:3$.

50. В полярной системе координат даны точки $A(2;\frac{\pi}{6})$, $B(4;\frac{\pi}{3})$. Требуется:

1) построить точки A и B;

2) найти полярные координаты точек, симметричных точкам A и B относительно полярной оси;

3) найти полярные координаты точек, симметричных точкам A и B относительно полюса;

4) найти полярные координаты точек, симметричных точкам A и B относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей;

5) найти полярные координаты точек, симметричных точкам A и B относительно биссектрисы второй и четвертой координатных четвертей;

6) найти декартовы координаты A и B;

7) найти декартовы и полярные координаты середины отрезка AB;

8) найти $|AB|$;

9) найти площадь квадрата, для которого точки A и B являются противоположными вершинами;

10) найти площадь треугольника OAB, где O — полюс системы координат.

51. Даны декартовы координаты точек $A(\sqrt{3};1)$, $B(1;-\sqrt{3})$. Найти:

1) полярные координаты A и B;

2) полярные координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $2:1$;

3) полярные координаты вершин C и D параллелограмма $ABCD$, если известно, что точка пересечения диагоналей этого параллелограмма находится в полюсе.

52. В полярных координатах дана точка $A(2;\dfrac{\pi}{3})$. Найти:

1) уравнение луча OA;

2) уравнение окружности с центром в точке O, проходящей через A.

53. В полярных координатах найти уравнение окружности радиуса 2 с центром в точке $A(2;\dfrac{\pi}{2})$.

54. Составить полярное уравнение прямой, которая перпендикулярна полярной оси и удалена от полюса на расстояние 2.

55. Построить (по точкам) линии, заданные полярными уравнениями:

1) $r=\phi$;

2) $r = \dfrac{1}{1-\cos\phi}$;

3) $r = \dfrac{1}{1-\sin\phi}$.

56. Составить полярное уравнение множества точек, равноудаленных от полюса и прямой, заданной декартовым уравнением $x = 2$.

§ 3. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость и независимость. Базис. Координаты вектора в базисе

57. Даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Построить векторы:

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

2) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

3) $-\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

4) $-\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

5) $\mathbf{a}+\dfrac{1}{2}\mathbf{b}$;

6) $-\dfrac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

58. Дан треугольник ABC. Доказать, что $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD}$, где D — основание медианы, опущенной из вершины A на BC.

59. Дан треугольник ABC, в котором O — точка пересечения медиан. Доказать, что $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AO}$.

60. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, стороны которого равны 1, даны векторы $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{c}$. Построить следующие векторы и найти их длины:

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

2) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$;

3) $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\dfrac{1}{2}\mathbf{c}$.

61. Известно, что векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имеют одинаковую длину и $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Найти угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

62. Известно, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{c}| = 5$ и $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Найти углы между векторами:

1) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

2) $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$;

3) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$.

63. Известно, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 5$. Найти $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

64. Даны длины векторов: $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 7$, $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = 4$. Найти $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$.

65. В трапеции $ABCD$ отношение оснований AD и BC равно 5. Полагая $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD}$.

66. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Представить векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ в виде линейных комбинаций векторов $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.

67. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$.

68. В пространстве даны точки A, B, C, D. Точки E и F — середины отрезков AB и CD. Доказать, что

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}.$$

69. Точки E и F служат серединами диагоналей AB и CD четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}}{2}.$$

70. В плоскости треугольника ABC найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам, была равна $\overrightarrow{0}$.

71. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, а на диагонали AC — отрезок $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны, и найти отношение $\dfrac{|KL|}{|LB|}$.

72. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна $\overrightarrow{0}$.

73. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки пространства в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

74. В треугольнике ABC даны длины сторон: $|AB| = 2$, $|AC| = 3$. Найти вектор, направленный по биссектрисе угла A.

75. При каких условиях вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ направлен по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$?

76. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

77. При каких условиях векторы $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны?

78. Доказать, что не существует векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, для которых $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=8$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=11$.

79. Четыре вектора в пространстве имеют одинаковую длину, и $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$. Доказать, что вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

80. Известно, что векторы $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ линейно независимы. Какие из следующих систем векторов линейно независимы?

1) $\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}$;

2) $\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}+\mathbf{b}$;

3) $\mathbf{a},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$;

4) $\mathbf{a},\mathbf{a}+2\mathbf{b}$;

5) $\mathbf{a},2\mathbf{a},-\mathbf{b}$;

6) $\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

7) $\mathbf{a},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{c},\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

81. В трапеции $ABCD$ отношение основания BC к основанию AD равно 3. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

82. В треугольнике ABC AD, BE и CF — медианы. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, и $\overrightarrow{CF}$.

83. Дан тетраэдр $OABC$. Принимая за базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, найти в этом базисе координаты:

1) векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$;

2) вектора $\overrightarrow{DE}$, соединяющего середину D ребра OA с серединой E ребра BC;

3) вектора, соединяющего середину D ребра OA с точкой F пересечения медиан грани BOC;

4) вектора $\overrightarrow{AE}$, соединяющего вершину A с серединой ребра BC;

5) вектора $\overrightarrow{OM}$, соединяющего вершину O с точкой M пересечения медиан грани ABC.

84. Установить, что четыре точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции. Найти отношение длин оснований этой трапеции. Система координат аффинная.

85. В треугольнике известны вершины $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(-3;0)$. Найти какой-нибудь вектор, направленный по биссектрисе угла A. Система координат прямоугольная.

86. В треугольнике известны вершины $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$, $C(4;6;3)$. Найти векторы медианы $\overrightarrow{AE}$ и биссектрисы $\overrightarrow{AD}$. Система координат прямоугольная.

87. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Доказать, что середины ребер AD, DD', $D'C'$, $C'B'$, $B'B$ и AB лежат в одной плоскости.

88. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют базис на плоскости, и найти координаты вектора $\mathbf{c}$ в этом базисе:

1) $\mathbf{a} = \{2;1\}$, $\mathbf{b} = \{-1;3\}$, $\mathbf{c} = \{0;1\}$;

2) $\mathbf{a} = \{-1;-4\}$, $\mathbf{b} = \{2;-1\}$, $\mathbf{c} = \{4;4\}$.

89. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют базис в пространстве, и найти координаты вектора $\mathbf{d}$ в этом базисе:

1) $\mathbf{a} = \{1;0;0\}$, $\mathbf{b} = \{1;1;0\}$, $\mathbf{c} = \{1;1;1\}$, $\mathbf{d} = \{4;2;1\}$;

2) $\mathbf{a} = \{1;2;3\}$, $\mathbf{b} = \{-1;4;0\}$, $\mathbf{c} = \{-1;1;2\}$, $\mathbf{d} = \{2;2;0\}$.

90. Установить, в каких случаях тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор $\mathbf{c}$ как линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

1) $\mathbf{a} = \{5;2;1\}$, $\mathbf{b} = \{-1;4;2\}$, $\mathbf{c} = \{-1;-1;6\}$;

2) $\mathbf{a} = \{6;4;2\}$, $\mathbf{b} = \{-9;6;3\}$, $\mathbf{c} = \{-3;6;3\}$;

3) $\mathbf{a} = \{6;-18;12\}$, $\mathbf{b} = \{-8;24;-16\}$, $\mathbf{c} = \{8;7;3\}$.

91. Даны два вектора: $\mathbf{a} = \{2;5;14\}$, $\mathbf{b} = \{14;5;2\}$. Найти проекцию вектора $\mathbf{a}$ на плоскость Oxy при направлении проектирования, параллельном вектору $\mathbf{b}$.

92. Даны четыре вектора: $\mathbf{a} = \{1;2;3\}$, $\mathbf{b} = \{2;-2;1\}$, $\mathbf{c}=\{4;0;3\}$, $\mathbf{d} = \{16;10;18\}$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора $\mathbf{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при направлении проектирования, параллельном вектору $\mathbf{c}$.

§ 4. Скалярное произведение

Во всех задачах этого параграфа система координат прямоугольная.

93. Угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, вычислить:

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
2) $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$;
3) $(\mathbf{b}, \mathbf{b})$;
4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$;
5) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b})$.

94. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, вектор $\mathbf{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$, $|\mathbf{c}| = 8$, вычислить:

1) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{b} + 3\mathbf{c})$;
2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$;
3) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c})$.

95. Дан равносторонний треугольник ABC, длины сторон которого равны 1. Вычислить выражение

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}).$$

96. В треугольнике ABC даны длины его сторон $|BC| = 5$, $|CA| = 6$, $|AB| = 7$. Найти $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

97. Даны три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, удовлетворяющие условию $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{0}$. Известно, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$. Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})$.

98. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ попарно образуют углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Известно, что $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 6$. Найти длину вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

99. В треугольнике ABC известны длины сторон $|AB| = 2$ и $|AC| = 3$ и скалярное произведение $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5$. Найти длину стороны BC.

100. В пространстве даны три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, причем известны их длины $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 3$ и попарные скалярные произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 4$, $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 5$, $(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 3$. Найти длины векторов:

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$;
2) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

101. Даны прямоугольник $ABCD$ и точка M (которая может лежать как в плоскости прямоугольника, так и вне ее). Показать, что:

1) $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$;

2) $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$.

102. Доказать, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости или в пространстве имеет место равенство

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0.$$

103. Доказать, что если в тетраэдре два ребра перпендикулярны противоположным им ребрам, то перпендикулярны и противоположные ребра третьей пары.

104. Доказать, что вектор $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}$.

105. Доказать, что вектор $\mathbf{p} = \mathbf{b} - \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}$.

106. Найти углы треугольника с вершинами $A(2; 1)$, $B(3; 4)$, $C(-2; -5)$.

107. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$ и показать, что этот треугольник является равнобедренным.

108. Даны две соседние вершины квадрата $A(-3; 2)$, $B(2; 4)$. Найти две другие вершины.

109. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-3; 2)$, $(5; -4)$. Найти две другие вершины.

110. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ известны вершины $A(1; 2; 3)$, $B(9; 6; 4)$, $D(3; 0; 4)$, $A'(5; 2; 6)$. Найти длину диагонали AC' этого параллелепипеда и угол, образуемый ребром AC' с ребром AB.

111. Вычислить углы, образованные противоположными ребрами тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(3; -1; 0)$, $B(0; -7; 3)$, $C(-2; 1; -1)$, $D(3; 2; 6)$.

112. Найти угол между непересекающимися диагоналями соседних граней куба.

113. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 2. Найти высоту этой призмы, если известно, что непересекающиеся диагонали соседних боковых граней взаимно перпендикулярны.

114. Найти вектор $\mathbf{u}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = \{2; 1; -1\}$ и удовлетворяющий условию $(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = 3$.

115. Вектор $\mathbf{u}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{a} = \{3; 2; 2\}$ и $\mathbf{b} = \{18; -22; -5\}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если $|\mathbf{u}| = 7$.

116. Найти вектор $\mathbf{u}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\mathbf{a} = \{2; 3; -1\}$ и $\mathbf{b} = \{1; -2; 3\}$ и удовлетворяет условию $(\mathbf{u}, \mathbf{c}) = -6$ где $\mathbf{c} = \{2; -1; 1\}$.

117. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{-14; 2; 5\}$ на прямую с направляющим вектором $\{2; -2; 1\}$.

118. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{8; 4; 1\}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\{2; -2; 1\}$.

119. Даны три вектора: $\mathbf{a} = \{8; 4; 1\}$, $\mathbf{b} = \{2; -2; 1\}$, $\mathbf{c} = \{1; 1; 9\}$. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\mathbf{c}$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

120. Даны два вектора: $\mathbf{a} = \{8; 4; 1\}$, $\mathbf{b} = \{2; -2; 1\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\mathbf{b}$ тупой угол.

121. Даны два вектора: $\mathbf{a} = \{1; 3; 2\}$ и $\mathbf{b} = \{-1; 2; 3\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$, который имеет длину 2, лежит в плоскости векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и образует с этими векторами равные углы.

122. Найти вектор $\mathbf{u}$, который перпендикулярен вектору $\mathbf{a} = \{1; 0; 1\}$, образует равные углы с векторами $\mathbf{b} = \{2; 2; -1\}$ и $\mathbf{c} = \{1; 2; 2\}$ и имеет длину 1.

123. Найти вектор $\mathbf{u}$, если известно, что $|\mathbf{u}| = 1$, угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{a} = \{1; 0; 1\}$ равен $\frac{\pi}{4}$ и $(\mathbf{u}, \mathbf{b}) = 3$, где $\mathbf{b} = \{3; 2; 1\}$.

§ 5. Ориентация. Векторное и смешанное произведения

Система координат во всех координатных задачах этого параграфа является прямоугольной и положительно ориентированной.

124. Известно, что тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в пространстве ориентирована положительно. Определить ориентацию троек:

1) $\mathbf{a}, \ \mathbf{c}, \ \mathbf{b}$;

2) $-\mathbf{a}, \ -\mathbf{b}, \ \mathbf{c}$;

3) $\mathbf{a}, \ \mathbf{b} - \mathbf{c}, \ \mathbf{b} + \mathbf{c}$;

4) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c}$;

5) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{a}, \mathbf{a} - \mathbf{2c}$;

6) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{c}-\mathbf{b}$.

125. Известно, что тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в пространстве ориентирована отрицательно. Определить ориентацию троек:

1) $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$;

2) $-\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$;

3) $\mathbf{b}-\mathbf{c}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}$;

4) $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}, \mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{a}$;

5) $\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{2a}-\mathbf{c}$;

6) $\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{2a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{c}$.

126. Дан вектор $\mathbf{a}=\{x, y\}$. Найти вектор $\mathbf{a}'$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и направленный так, чтобы упорядоченная пара векторов $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ имела положительную ориентацию.

127. Даны два вектора: $\mathbf{a}=\{3;5\}, \mathbf{b}=\{1;4\}$. Найти вектор $\mathbf{b}'$, перпендикулярный вектору $\mathbf{b}$, равный ему по длине и направленный так, чтобы упорядоченные пары векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}'$ имели противоположную ориентацию.

128. Даны два вектора: $\mathbf{a}=\{0;1;1\}$ и $\mathbf{b}=\{1;1;0\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$ длины 1, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, образующий с вектором $\mathbf{b}$ угол $\dfrac{\pi}{4}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имела положительную ориентацию.

129. Даны два вектора: $\mathbf{a}=\{1;1;1\}$ и $\mathbf{b}=\{1;0;0\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$ длины 1, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, образующий с вектором $\mathbf{b}$ угол $\dfrac{\pi}{3}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имела положительную ориентацию.

130. Даны три вектора: $\mathbf{a}=\{8;4;1\}$, $\mathbf{b}=\{2;2;1\}$ и $\mathbf{c}=\{1;1;1\}$. Найти вектор $\mathbf{d}$ длины 1, перпендикулярный вектору $\mathbf{c}$, образующий с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равные углы и направленный так, чтобы упорядоченные тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ имели одинаковую ориентацию.

131. Даны три вектора: $\mathbf{a}=\{8;4;1\}$, $\mathbf{b}=\{2;-2;1\}$ и $\mathbf{c}=\{1;1;1\}$. Найти вектор $\mathbf{d}$ длины 1 перпендикулярный вектору $\mathbf{c}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}$ имели противоположную ориентацию.

132. Даны два вектора: $\mathbf{a}=\{11;10;2\}$ и $\mathbf{b}=\{4;0;3\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$ длины 1, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имела положительную ориентацию.

133. Даны: $|\mathbf{a}|=10$, $|\mathbf{b}|=2$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=12$. Вычислить $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$.

134. Даны: $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 26$, $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = 72$. Вычислить $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

135. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, вычислить:

1) $|[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]|$;
2) $|[3\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - 2\mathbf{b}]|$.

136. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\dfrac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, вычислить:

1) $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2$;
2) $|[2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b}]|^2$;
3) $|[\mathbf{a} + 3\mathbf{b}, 3\mathbf{a} - \mathbf{b}]|^2$.

137. Даны векторы $\mathbf{a} = \{3; -1; -2\}$ и $\mathbf{b} = \{1; 2; -1\}$. Найти координаты векторных произведений:

1) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$;
2) $[2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}]$;
3) $[2\mathbf{a} - \mathbf{b}, 2\mathbf{a} + \mathbf{b}]$.

138. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 2; 1)$. Найти координаты векторных произведений:

1) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$;
2) $[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$.

139. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-1; 0; -1)$, $B(0; 2; -3)$, $C(4; 4; 1)$.

140. Вектор $\mathbf{u}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{a} = \{4; -2; -3\}$ и $\mathbf{b} = \{0; 1; 3\}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти координаты $\mathbf{u}$, если $|\mathbf{u}| = 13$.

141. Найти площадь параллелограмма $ABCD$ с вершинами $A(2; 1)$, $B(3; 4)$, $C(-1; 3)$.

142. В треугольной пирамиде известны вершины $A(1; -1; 0)$, $B(2; 1; 1)$, $C(-1; 0; 3)$, $D(2; -1; 5)$. Найти угол между ребром AB и плоскостью грани ACD.

143. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ известны вершины $A(1; 2; 3)$, $B(9; 6; 4)$, $D(3; 0; 4)$, $A'(5; 2; 6)$. Найти угол φ между диагональю AC' и плоскостью грани $ABCD$ этого параллелепипеда.

144. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найти угол между диагональю AB' и плоскостью, проходящей через вершины $ABC'D'$.

145. Три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ связаны соотношениями $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

146. Доказать, что если три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ не коллинеарны, то из равенств $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ вытекает соотношение $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ и обратно.

147. Доказать, что если векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

148. От одной точки отложены три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

149. Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ связаны соотношениями $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{c}, \mathbf{d}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{d}]$. Доказать коллинеарность векторов $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ и $\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

150. 1) Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнение $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} \neq 0$, имело решение.

2) Найти общее решение этого уравнения.

151. Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют положительно ориентированную тройку и взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 3$, вычислить $< \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} >$.

152. Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют положительно ориентированный базис, вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 3$, вычислить $< \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} >$.

153. Доказать тождество $< \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a} >= 2 < \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} >$.

154. Доказать, что если $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$, то векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны.

155. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = \{1; -1; 3\}$, $\mathbf{b} = \{2; 2; 5\}$, $\mathbf{c} = \{-1; 6; 1\}$.

156. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.

157. Даны вершины тетраэдра: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

158. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

159. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром длины 2. Точка F — середина ребра $B'C'$, E — середина DC. Найти объем пирамиды $AFED$.

160. Найти вектор $\mathbf{u}$, если известно, что $(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = 2$, $(\mathbf{u}, \mathbf{b}) = 3$, $\mathbf{a} = \{1; 2; 1\}$, $\mathbf{b} = \{1; 0; -1\}$ и объем пирамиды, построенной на векторах $\mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$, равен 4.

§ 6. Прямая на плоскости

6.1. Составление уравнений прямых

161. Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси ординат прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнением:

а) $4x - 3y + 1 = 0$,

б) $7x - y = 0$.

162. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:

а) $M_1(3; -1)$, $M_2(-4; 5)$,

б) $M_1(2; 7)$, $M_2(1; -3)$.

Система координат прямоугольная.

163. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $(-4; 5)$ и

а) начало координат,

б) параллельна оси Ox,

в) параллельна оси Oy,

г) параллельна прямой $y = 3x - 1$,

д) параллельна прямой $2x - 5y + 7 = 0$,

е) параллельна вектору $\{-2; 3\}$.

164. Прямая задана уравнением:

а) $y = 2x + 1$, б) $y = x - 6$, в) $y = -3x$,

г) $y = \frac{1}{4}x - 2$, д) $y = 3$.

Составить общее уравнение этой прямой, параметрические уравнения и каноническое уравнение.

165. Для прямой $3x + 2y + 4 = 0$ составить:

а) уравнение с угловым коэффициентом (в прямоугольной системе координат),

б) параметрические уравнения,

в) каноническое уравнение.

166. Диагонали квадрата совпадают с осями прямоугольной системы координат. Составить уравнения его сторон, если длина стороны квадрата равна a.

167. Две смежные стороны ромба приняты за оси координат, весь ромб расположен во втором координатном угле. Составить уравнения диагоналей ромба, если сторона ромба равна c.

168. В треугольнике ABC: $A(-1;2)$, $B(2;4)$, $C(5;-2)$. Составить уравнение биссектрисы угла A данного треугольника. Система координат прямоугольная.

169. Даны прямые:
а) $x-3y+4=0$, б) $3x-y-1=0$, в) $2x+5y+4=0$.
Составить для них уравнения «в отрезках» и построить эти прямые.

170. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $(4;2)$ и образует вместе с координатными осями треугольник площадью 2 кв. ед. Система координат прямоугольная.

171. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $(4;2)$ и образует вместе с координатными осями треугольник наименьшей площади. Система координат прямоугольная.

172. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $Q(1;1)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-5;-2)$ и $B(-1;7)$.

173. Через точку $(3;-2)$ провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между осями координат Ox и Oy соответственно, делился в отношении 2:5.

174. В треугольнике ABC даны стороны $AB\colon\ 3x-4y+9=0$, $AC\colon\ 2x+7y-23=0$ и медиана $CK\colon\ 7x+10y-66=0$. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

175. В треугольнике известны две вершины $(2;1)$ и $(6;5)$ и точка пересечения медиан $(2;5)$. Составить уравнения сторон треугольника.

176. Найти центр окружности, вписанной в треугольник со сторонами: $x+1=0$, $4x+3y-35=0$, $3x-4y-45=0$.

6.2. Взаимное расположение прямых. Положительная и отрицательная полуплоскости

177. Для каждой пары прямых определить, пересекаются ли они, параллельны или совпадают:

а) $2x - y + 11 = 0, \qquad 4x + y - 5 = 0;$

б) $12x - 4y + 1 = 0, \qquad 6x - 2y + 1 = 0;$

в) $x - 2y + 7 = 0, \qquad x + 2y - 4 = 0;$

г) $5x + 3y - 7 = 0, \qquad 20x + 12y - 28 = 0;$

д) $x - y - 1 = 0, \qquad x - y + 5 = 0;$

е) $2x + 3y - 1 = 0, \qquad 4x + 6y - 2 = 0.$

178. Даны прямые $Ax+By+C = 0$ и $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$. Установить необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти прямые:

1) пересекались,

2) были параллельны,

3) совпадали,

4) были параллельны, но не совпадали.

179. При каких значениях параметра a уравнения

$$a^2x + (a - 1)y + a^2 + 5a + 4 = 0 \quad \text{и}$$
$$ax + (a + 3)y + a^2 - 6a - 7 = 0$$

задают прямые: а) параллельные, б) совпадающие, в) пересекающиеся, г) параллельные, но не совпадающие?

180. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ параллельно прямой $Ax + By + C = 0$.

181. Найти уравнение прямой, точки которой равноудалены от прямых $x - 3y + 6 = 0$ и $6y - 2x + 5 = 0$.

182. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $4x+y+1=0$ и образующей вместе с осями координат треугольник площадью 3. Система координат аффинная, базисные векторы имеют единичную длину, угол между ними равен $\frac{\pi}{3}$.

183. Уравнения двух сторон параллелограмма: $4x - y - 3 = 0$ и $2x + y - 3 = 0$, диагонали пересекаются в точке $(4;2)$. Найти уравнения двух других сторон.

184. Дан $\triangle ABC$: $A(-2;2)$, $B(1;3)$, $C(4;-1)$. Составить уравнение средней линии треугольника, параллельной стороне AC.

185. В трапеции $ABCD$ известны уравнения стороны AB: $y = x + 1$, основания BC: $y = -\frac{x}{3} + 11$ и одна из вершин $(0;1)$. Найти уравнение средней линии трапеции.

186. Даны уравнения боковой стороны трапеции $x - 2y + 2 = 0$ и ее меньшего основания $x + y - 10 = 0$. Точка $M(4;2)$ является точкой пересечения диагоналей трапеции и делит их в отношении $1:3$. Составить уравнения двух других сторон трапеции.

187. Даны уравнения средних линий треугольника: $2x+y-5=0$, $x - y = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$. Найти координаты его вершин.

188. Определить, какие из точек $A(-4;2)$, $B(3;-7)$, $C(3;4)$, $D(7;-1)$, $E(3;0)$ лежат в одной полуплоскости с точкой $P(-3;-3)$ относительно прямой $3x - 7y + 5 = 0$.

189. Определить, лежат ли точки $A(1;3)$ и $B(7;-1)$ в одном, в смежных или в вертикальных углах, образованных при пересечении прямых $x - y - 1 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$.

190. Лежит ли точка $M(1;1)$ внутри треугольника со сторонами $x - 2y + 8 = 0$, $x + 4y - 8 = 0$, $x + y - 12 = 0$?

191. При каких значениях a точка $(5;a)$ лежит внутри треугольника со сторонами $2x + y - 10 = 0$, $x - 10y + 40 = 0$, $x - y - 2 = 0$?

192. Найти биссектрису того угла между прямыми $x + 4y - 5 = 0$ и $4x - y - 3 = 0$, в котором лежит начало координат. Система координат прямоугольная.

6.3. Угол между прямыми. Условие перпендикулярности

Во всех задачах этого раздела система координат предполагается прямоугольной.

193. Определить угол, образованный двумя прямыми:

а) $5x - 2y + 1 = 0, \quad x + 3y - 2 = 0;$
б) $x - y + 7 = 0, \quad x + y - 3 = 0;$
в) $3x - 2y + 1 = 0, \quad 6x - 4y + 2 = 0;$
г) $2x + y - 3 = 0, \quad x + 2y + 2 = 0.$

194. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$ под углом $45°$ к данной прямой.

195. Из точки $(1; 7)$ направлен луч под углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой $2x + y - 4 = 0$. Найти уравнение луча, отраженного от этой прямой.

196. Луч света проходит через точку $(4; 2)$, отражается от прямой $2x + y = 0$ и попадает в точку $(9; -3)$. Найти уравнения луча падающего и луча отраженного.

197. Известны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника: $x - 3y + 3 = 0$, $3x - y - 20 = 0$ и точка $(2; -1)$ на основании. Найти уравнение основания.

198. Точки $(-2; 0)$ и $(7; 7)$ — вершины треугольника, прямая $y + 5x - 3 = 0$ — биссектриса его внутреннего угла. Найти третью вершину.

199. Прямая $2x - y - 16 = 0$ — основание равнобедренного треугольника, $x - 4y + 11 = 0$ — его боковая сторона. Составить уравнение другой боковой стороны, если она проходит через точку $(2; \frac{5}{8})$.

200. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; -7)$, а также уравнения высоты $2x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из разных вершин.

201. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(4; -1)$ и уравнения двух биссектрис $x - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.

202. Дан $\triangle ABC$: $A(-2; 4)$, $B(5; 7)$, $C(3; -2)$. Найти уравнения его высот.

203. Для прямых

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{c} = \frac{y - y_2}{d}$$

выразить условие их перпендикулярности.

204. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, если $x + 4y - 12 = 0$ — его гипотенуза, а $(2; -3)$ — вершина прямого угла.

205. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на оси Ox, $(5; 3)$ — вершина прямого угла. Составить уравнения катетов, если площадь треугольника равна 9.

206. Составить уравнения сторон квадрата, если $(8; -1)$ — одна из его вершин, $(2; 1)$ — точка пересечения его диагоналей.

207. Найти проекцию точки $(-1; 5)$ на прямую $2x - 3y - 9 = 0$.

208. Найти точку N, симметричную точке $M(1; 6)$ относительно прямой $2x + 7y + 9 = 0$.

209. В $\triangle ABC$ даны вершина $A(-3; 1)$ и уравнения двух высот: $11x - 2y - 32 = 0$ и $5x - 6y - 46 = 0$. Составить уравнение стороны BC.

210. Найти стороны треугольника, если известны одна из его вершин $(-2; -2)$ и уравнения биссектрисы $x + y - 6 = 0$ и высоты $5x + 4y - 26 = 0$, проведенных из одной вершины.

211. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из вершин $(6; -1)$ и уравнения высоты $7x - 4y - 31 = 0$ и биссектрисы $2x + y - 1 = 0$, проведенных из разных вершин.

6.4. Расстояние от точки до прямой

Во всех задачах этого раздела система координат предполагается прямоугольной.

212. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $P(4; -3)$ на прямую $2x - 6y + 11 = 0$.

213. Через точку $A(-1; 9)$ провести касательные к окружности $x^2 + y^2 = 41$.

214. Из всех прямых, параллельных прямой $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 1$, найти те, которые проходят на расстоянии 2 от точки $Q(-2; 1)$.

215. На оси ординат найти точку, равноудаленную от начала координат и от прямой $3x + 4y + 6 = 0$.

216. Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$\text{а) } 7x - y + 11 = 0, \qquad 7x - y - 5 = 0;$$
$$\text{б) } 2x + 5y + 1 = 0, \qquad 4x + 10y - 7 = 0.$$

217. Через точку $A(12; -\frac{3}{4})$ провести прямые, расстояние до которых от точки $B(2; -2)$ равно 5 единицам.

218. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $Q(1; 1)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-5; -2)$ и $B(-1; 7)$.

219. Окружность радиуса $r = 8$ касается прямых: $5x - 12y + 1 = 0$ и $5x + 12y - 11 = 0$. Найти центр этой окружности.

220. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $8x - y + 7 = 0$ и $8x + 14y - 11 = 0$.

221. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x + 7y - 4 = 0$ и $3x - 3y + 4 = 0$, внутри которого лежит точка $(-1; 4)$.

222. Даны уравнения двух сторон квадрата: $5x - 7y + 12 = 0$ и $5x - 7y - 2 = 0$ и точка $M(-6; -3)$ на одной из сторон квадрата. Составить уравнения двух других сторон.

223. Прямые $x + 8y + 2 = 0$ и $4x - 7y + 5 = 0$ — диагонали прямоугольника, а $P(-2; -1)$ — внутренняя точка на одной из его сторон. Составить уравнения сторон прямоугольника.

224. Восстановить границы квадратного участка земли по трем сохранившимся столбам: одному в центре $M(-1; 1)$ и двум на смежных сторонах $P(1; 2)$ и $Q(\frac{7}{2}; 0)$. Имеет ли задача однозначный ответ?

225. Восстановить границы квадратного земельного участка по трем сохранившимся столбам: одному в центре участка $M(2; 5)$ и по одному на противоположных сторонах $K(2; 7)$ и $F(-1; 1)$.

226. Найти уравнения сторон квадрата, вписанного в окружность с центром в точке $(2; 7)$ и радиуса 4, если известно, что точка $(-1; 6)$ принадлежит одной из сторон квадрата.

227. Прямые $7x + y + 11 = 0$ и $x + y - 1 = 0$ являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника. Составить уравнение основания, если площадь треугольника равна 12, а $P(-2; 0)$ — внутренняя точка данного треугольника.

§ 7. Прямая и плоскость в пространстве

7.1. Составление уравнений прямых и плоскостей

228. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 5; -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{2; -3; 7\}$. Система координат прямоугольная.

229. Точка $C(3; -1; 2)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости. Система координат прямоугольная.

230. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(7; 6; -2)$ параллельно двум векторам $\vec{u} = \{2; 2; 5\}$ и $\vec{v} = \{-1; 0; 4\}$.

231. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(5; 4; 1)$ и $M_2(-3; 2; 1)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$.

232. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(3; 0; 2)$, $M_3(-4; 5; 2)$.

233. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 3; -5)$ параллельно плоскости $x + y - z - 7 = 0$.

234. Плоскость α проходит через точку $Q(2; 2; 1)$ перпендикулярно плоскостям $x + y - 2 = 0$ и $7x + 4y + z - 3 = 0$. Составить уравнение плоскости α. Система координат прямоугольная.

235. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(11; 0; 7)$ и $B(2; 1; 1)$ перпендикулярно плоскости $4x - 3y + z = 0$. Система координат прямоугольная.

236. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; 2; 3)$:

а) параллельно плоскости Oyz,

б) перпендикулярно оси Oy (в прямоугольной системе координат),

в) и через ось Ox,

г) и через прямую $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{7}$.

237. Плоскость проходит через точку $K(-4; 2; -1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a = -3$, на оси аппликат — отрезок $c = 1$. Составить уравнение плоскости.

238. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $x+7y-2z+12=0$ и координатными плоскостями. Система координат прямоугольная.

239. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;-4;1)$:

а) параллельно вектору $\vec{a}=\{4;5;2\}$,

б) параллельно оси Oz,

в) параллельно прямой $\begin{cases} x=2t-4, \\ y=t+2, \\ z=4t+1 \end{cases}$

г) и составляющей с координатными осями углы, соответственно равные 45^o, 60^o, 120^o (в прямоугольной системе координат).

240. В прямоугольной системе координат составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;2;1)$ перпендикулярно:

а) плоскости $x-y-z+2=0$,

б) плоскости Oyz.

241. Дана прямая $\begin{cases} 3x+2y+4z+1=0, \\ x-y-z=0. \end{cases}$
Составить ее канонические уравнения.

242. Составить параметрические уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $7x-y+3z+1=0$ с координатной плоскостью Oxy.

243. Составить параметрические уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $2x+3y+z+5=0$ и плоскости, проходящей через точку $A(2;0;-1)$ и прямую $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

244. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

а) $(3;1;5)$ и $(0;4;-1)$,

б) $(1;2;-11)$ и $(4;2;-5)$.

245. Дан $\triangle ABC$: $A(5;1;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(7;8;1)$. Составить параметрические уравнения его сторон и медианы CD.

246. Даны вершины треугольника: $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$, $C(-7;11;6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине A. Система координат прямоугольная.

247. Составить уравнения прямой, которая параллельна вектору $\{2;-4;-3\}$ и пересекает прямые $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ и $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-7}{-1} = \dfrac{z-9}{3}$.

248. Прямая l проходит через точку A и пересекает прямые l_1 и l_2. Составить уравнение прямой l, если:

а) $A(1;-2;-3)$, $l_1\colon \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+1}{-3}$ и $l_2\colon \begin{cases} x = 2t+3, \\ y = t-1, \\ z = 5t; \end{cases}$

б) $A(5;1;1)$, $l_1\colon \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-11}{7} = \dfrac{z-3}{1}$, $l_2\colon \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$.

249. Через прямую $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z-3}{6}$ провести плоскость, параллельную плоскости $7x+4y-7z+1=0$.

250. Можно ли через прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+1}{-3}$ провести плоскость параллельно плоскости $5x+4y+3z+2=0$?

7.2. Взаимное расположение двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости

Система координат в задачах этого раздела аффинная, если не указано особо.

251. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

а) $7x-4y+5z-11=0$, $\quad -7x+4y-5z-3=0$;

б) $5x-3y+z+1=0$, $\quad 5x-3y-z+4=0$;

в) $6x+4y+2z-1=0$, $\quad 3x+2y+z=0$.

252. Определить, при каких значениях p и q следующие пары уравнений определяют параллельные плоскости:

а) $px + 3y + 5z + 11 = 0, \qquad 12x + qy + 15z - 2 = 0;$

б) $2x - 14y + pz + 5 = 0, \qquad qx + 7y - 8z + 2 = 0;$

в) $px + 5y + z - 1 = 0, \qquad 6x + 10y + qz - 2 = 0.$

253. Определить, какие из следующих пар плоскостей определяют перпендикулярные плоскости:

а) $x + 2y + 3z - 11 = 0, \qquad 2x + 5y - 4z + 7 = 0;$

б) $5x + 4y - z + 25 = 0, \qquad 2x + y - 14z + 1 = 0;$

в) $6x + y + 3 = 0, \qquad 7y - z - 2 = 0.$

Система координат прямоугольная.

254. При каком значении k следующие пары уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

а) $4x + y + z + 7 = 0, \qquad 2x + ky - z + 1 = 0;$

б) $kx + 3y + 7 = 0, \qquad 3x - 2y + 7z + 1 = 0;$

в) $kx + 3 = 0, \qquad 7y + 4z + 3 = 0.$

Система координат прямоугольная.

255. Установить, лежит ли данная прямая l в данной плоскости α, параллельна плоскости или пересекает ее (в последнем случае найти точку пересечения):

а) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{7} = \dfrac{z+5}{4}, \qquad x - y + z + 11 = 0;$

б) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z}{5}, \qquad 2x + 4y + z - 4 = 0;$

в) $x = y = z, \qquad 3x - 4y + z = 0;$

г) $\begin{cases} x + 4y + 3z - 1 = 0, \\ 7x + y - z + 3 = 0, \end{cases} \qquad 8x + 5y + 2z + 7 = 0;$

д) $\begin{cases} x-y+3z-1=0, \\ 2x+y-3z+4=0, \end{cases}$ $\qquad x+y-4z+1=0.$

256. Какие из следующих пар прямых скрещиваются, пересекаются, параллельны или совпадают (если прямые параллельны или пересекаются, составить уравнение содержащей их плоскости):

а) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}, \qquad \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1};$

б) $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-4t-1, \\ z=6t+1, \end{cases} \qquad \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+5}{3};$

в) $\begin{cases} x-y-z-7=0, \\ 2x+y+z+1=0, \end{cases} \qquad \dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1};$

г) $\begin{cases} 4x+y-2z+1=0, \\ x-y+z-3=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+3z-3=0, \\ 4x+2y-2z+1=0. \end{cases}$

257. Доказать перпендикулярность прямых:

$$\begin{cases} 2x+4y-7z+2=0, \\ 3x-5y+6z+1=0, \end{cases} \qquad \frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{3}.$$

Система координат прямоугольная.

258. При каких значениях параметров a и b прямые

$$\begin{cases} x=4t+3, \\ y=t+1, \\ z=at+1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+5y+bz+11=0, \\ 7x-16y+4z-1=0 \end{cases}$$

параллельны?

259. При каком значении m прямые

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{m}$$

пересекаются?

260. При каком значении q прямая $\begin{cases} 4x+7y-3z+4=0, \\ x-y-z+5=0 \end{cases}$ и плоскость $10x+qy+11z+1=0$:

а) параллельны,

б) перпендикулярны (в прямоугольной системе координат)?

261. В плоскости $2x - y + z + 5 = 0$ найти прямую, пересекающую прямую $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = t - 1, \\ z = 3t + 2 \end{cases}$ под прямым углом. Система координат прямоугольная.

262. Найти пересечение трех плоскостей:

а) $4x - 8y - 5z + 7 = 0,$
$4x - 7y + z + 11 = 0,$
$3x - 5y - z + 6 = 0;$

б) $2x - 3y + 5z = 0,$
$8x + 2y - z - 21 = 0,$
$2x + 11y - 16z - 21 = 0.$

263. Доказать, что плоскости $x-y-5z+5 = 0$, $4x+y-10z+5 = 0$, $3x - 2y - 13z + 12 = 0$ попарно пересекаются по трем различным параллельным прямым.

264. При каких значениях параметров p и q три плоскости $x + 4y - 4z - 1 = 0$, $x - 2y + pz + 2 = 0$, $2x - 2y - 3z + q = 0$

а) имеют только одну общую точку,

б) проходят через одну прямую,

в) попарно пересекаются по трем различным параллельным прямым?

7.3. Уравнение пучка плоскостей. Положительное и отрицательное полупространства

265. Определить, принадлежит ли плоскость $3x + 4y + 6z - 6 = 0$ пучку плоскостей $\alpha(x + 2y + 4z - 4) + \beta(x - y - 5z + 5) = 0$.

266. Через линию пересечения плоскостей $5x - y + z + 1 = 0$ и $x + y + 3z + 4 = 0$ провести плоскость:

а) проходящую через начало координат,

б) проходящую через точку $(2; 3; -5)$,

в) параллельно оси Oz,

г) перпендикулярно плоскости $2x + 2y - 3z - 1 = 0$.

267. В пучке, определяемом плоскостями $4x - y - z + 5 = 0$ и $3x - y + 2z - 1 = 0$, найти плоскости, перпендикулярные к этим основным плоскостям.

268. В пучке, определяемом плоскостями $x + y + z + 2 = 0$ и $2x - 2y + 3z + 5 = 0$, найти две взаимно перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку $(2; 3; -7)$.

269. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $x - 4y - 5z + 1 = 0$ и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости Oxz.

270. В пучке $\alpha(2x + 3y - z + 7) + \beta(x - y - z + 11) = 0$ найти плоскость, отсекающую равные отрезки на осях Ox и Oz.

271. Какая из координатных плоскостей принадлежит пучку $\alpha(3x + 8y + z - 5) + \beta(6x - y + 2z - 10) = 0$?

272. Установить, что три данные плоскости $2x + y - z - 8 = 0$, $8x + 19y + 5z - 62 = 0$, $10x - 5y - 11z - 20 = 0$ принадлежат одному пучку плоскостей.

273. При каких значениях параметров p и q плоскость $px + qy - 4z + 4 = 0$ принадлежит пучку плоскостей $\alpha(2x + 4y - z - 10) + \beta(6x - y - 3z + 22) = 0$?

274. Составить уравнения биссектрис углов между плоскостями $7x + y - 6 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$.

275. Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между плоскостями $2x - y + 2z - 3 = 0$, $3x + 2y - 6z - 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1; 2; -3)$.

276. Через прямую $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$ провести плоскость, параллельную прямой $x = 2y = 3z$.

277. Плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Доказать,что вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$, приложенный к любой точке данной плоскости, направлен в положительное полупространство относительно данной плоскости.

278. В пучке плоскостей $\alpha(5x + 4y - z - 5) + \beta(x - 2y + 3z + 15) = 0$ найти плоскость, отсекающую от координатного угла Oxz треугольник площадью 10 кв. ед. Система координат прямоугольная.

279. Определить положение точек $A(1;0;3)$, $B(-2;4;-8)$, $C(1;3;-2)$, $D(11;3;-1)$, $E(0;6;1)$ относительно плоскости $x-3y+2z+12=0$.

280. Две плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ делят пространство на три части: первая часть примыкает к плоскости $\mathcal{P}_1$, вторая лежит между $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, третья примыкает к $\mathcal{P}_2$. Определить, в какой из частей лежит каждая из данных точек, если:

а) $\mathcal{P}_1:\ x+y-z=0$, $\mathcal{P}_2:\ 2x+2y-2z+7=0$, $M_1(1;2;1)$, $M_2(-1;2;4)$, $M_3(7;-1;-3)$, $M_4(-11;0;1)$, $M_5(0;1;-4)$, $M_6(2;2;3)$;

б) $\mathcal{P}_1:\ 6x-2y+4z+11=0$, $\mathcal{P}_2:\ -9x+3y-6z+4=0$, $M_1(0;0;0)$, $M_2(1;-3;10)$, $M_3(1;0;-3)$, $M_4(-5;1;-1)$, $M_5(-1;\frac{1}{2};-1)$, $M_6(7;1;3)$.

281. Даны точки $A(1;1;3)$, $B(3;2;-2)$, $C(-7;5;4)$, $D(-5;-6;0)$, $E(1;4;-2)$. Плоскости $x+y-4z+1=0$ и $x-2y-2z-1=0$ делят пространство на четыре двугранных угла. Определить, какие из точек B, C, D, E лежат в одном угле с точкой А, какие — в смежных с ней углах и какие — в вертикальном угле.

282. Даны плоскость $3x+2y-z+11=0$ и точки $A(2;2;-3)$, $B(-1;4;2)$. Установить, пересекает ли плоскость отрезок $\overrightarrow{AB}$, его продолжение за точку A или за точку B?

283. Даны точки $P(4;3;5)$, $Q(1;2;-4)$ и плоскость $4x-y+5z+4=0$. В каком отношении эта плоскость делит отрезок $\overrightarrow{PQ}$?

7.4. Углы между прямыми и плоскостями. Угол между прямой и плоскостью. Условия перпендикулярности

Во всех задачах этого раздела система координат предполагается прямоугольной.

284. Вычислить направляющие косинусы прямой:

а) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-5}{6}$, б) $\begin{cases} 6x - 10y - 13z = 0, \\ 8x - 17y - 21z - 11 = 0. \end{cases}$

285. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(3; 4; -10)$ и образует с осями координат углы $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}$.

286. Вычислить угол, образованный прямыми:

а) $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z+2}{-2}$ и $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+5}{-8} = \dfrac{z-12}{5}$,

б) $\begin{cases} 4x - y + 6z + 1 = 0, \\ 8x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ и $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y-1}{-6} = \dfrac{z}{5}$.

287. В плоскости Oxy найти прямую, проходящую через точку $(2; 5; 0)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-3}$.

288. Найти проекцию точки $P(2; -7; -11)$ на прямую $\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = -3t + 2, \\ z = 5t + 4. \end{cases}$

289. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P(3; -5; 2)$ на прямую $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+5}{7}$.

290. Найти точку, симметричную точке $P(2; 2; -6)$ относительно прямой $\begin{cases} 2x - z = 0, \\ 7x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$

291. Найти точку, симметричную точке $P(4; 3; 1)$ относительно плоскости, проходящей через параллельные прямые

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{-3}, \qquad \frac{x+5}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{-3}.$$

292. Вычислить угол между прямой и плоскостью:

а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z}{14}$ и $4x - 8y + z - 11 = 0$;

б) $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z+1}{7}$ и $2x + 3y - z + 15 = 0$;

в) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{4}$ и $6x - 2y + 8z + 1 = 0$.

293. Найти углы, образованные плоскостью $5x - 4y - 3z - 6 = 0$ с координатными плоскостями.

294. Найти двугранный угол между плоскостями $x - 2y + 2z + 4 = 0$ и $3x - 4y - 12z + 1 = 0$.

295. Найти величину того двугранного угла между плоскостями $2x + 3y - 5z + 11 = 0$ и $2x - y + z + 1 = 0$, в котором лежит точка $A(3; 10; 0)$.

296. В пучке плоскостей $\lambda(x + 2y + 4z + 1) + \mu(x - y - z + 3) = 0$ найти плоскость, образующую с прямой $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z+2}{-1}$ угол $\dfrac{\pi}{6}$.

297. Через линию пересечения плоскостей $x + y + z + 1 = 0$ и $x - 3y + 3z - 2 = 0$ провести плоскость, образующую угол $\dfrac{\pi}{3}$ с плоскостью $x + 2y - z + 5 = 0$.

298. В уравнении $x - 2y + \lambda z = 0$ определить λ так, чтобы через ось Oy можно было провести только одну плоскость, составляющую угол $\dfrac{\pi}{4}$ с плоскостью $x - 2y + \lambda z = 0$.

299. Составить уравнение общего перпендикуляра к двум прямым: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$ и $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-9}{1}$.

7.5. Расстояние от точки до прямой и плоскости. Расстояние между прямыми

Во всех задачах этого раздела система координат предполагается прямоугольной.

300. Найти расстояние от точки $(2; -1; 3)$ до плоскости $4x - 8y + z + 3 = 0$.

301. Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x - y + z + 11 = 0$ и $2x - y + z - 1 = 0$.

302. На оси Oy найти точку, равноудаленную от плоскостей $4x - 3y + z - 6 = 0$, $x + 2y + 2z + 4 = 0$.

303. Найти плоскость, делящую пополам тот двугранный угол между плоскостями $2x - 2y - z + 3 = 0$ и $12x + 4y - 3z - 5 = 0$, в котором лежит точка $(1; 7; 0)$.

304. Найти уравнения и длину перпендикуляра, опущенного из точки $(2;1;1)$ на прямую $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

305. Составить уравнение плоскости, проходящей на расстоянии 12 ед. от начала координат и отсекающей на осях координат отрезки, связанные соотношением $a:b:c=3:4:1$.

306. Найти центр сферы, вписанной в пирамиду, ограниченную координатными плоскостями и плоскостью $12x+4y-3z-48=0$.

307. Вычислить расстояние между плоскостями $4x+5y-3z-2=$ $=0$ и $8x+10y-6z+11=0$.

308. Через линию пересечения плоскостей $5x-4y-6z+4=0$ и $13x-5y-12z+2=0$ провести плоскости, касающиеся сферы $x^2+y^2+z^2=2$.

309. На прямой $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$ найти точку, ближайшую к точке $(8;1;-5)$.

310. На прямой $\begin{cases} 2x+y-3z+11=0, \\ x-4y+z-1=0 \end{cases}$ найти точку, одинаково удаленную от двух данных точек $P(1;-7;4)$ и $Q(-5;1;2)$.

311. Найти расстояние между прямыми:

а) $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$ и $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z+1}{-6}$;

б) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{5}$ и $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-8}{-3}=\dfrac{z-1}{5}$;

в) $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+2y+2z+4=0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ 2x-3y+z-4=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-9=0, \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$

312. Найти плоскости, делящие пополам двугранные углы, образованные двумя пересекающимися плоскостями $x-2y-2z+3=0$ и $8x+12y-9z-5=0$.

313. Составить уравнение плоскости, которая делит пополам острый двугранный угол, образованный плоскостями $5x+3y-z+10=0$ и $3x-5y+z+2=0$.

§ 8. Преобразования координат на плоскости и в пространстве

314. Даны точки $M\,(3;1)$, $N\,(-1;5)$ и $P\,(-3;-1)$. Найти их координаты в новой системе координат с тем же началом, если известно, что угол между осями Ox и Ox' равен $60°$. Системы координат прямоугольные и положительно ориентированы.

315. В прямоугольной системе координат даны точки $A\,(3;-4)$ и $B\,(2;3)$. Известно, что точка A лежит на оси абсцисс новой прямоугольной системы $O'e_1'e_2'$, точка B на новой оси ординат и $e_1' = -e_1$. Найти координаты A и B в новой системе, при условии, что системы ориентированы противоположно.

316. Написать формулы перехода от одной системы координат к другой, если началом первой системы является вершина A параллелограмма $ABCD$, а базисом — векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$; началом второй системы является вершина C, а базисом — векторы $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$.

317. Даны две системы координат: Oxy и $O'x'y'$. Относительно первой системы начало второй системы находится в точке $O' = (1;2)$, ось $O'x'$ пересекает ось Ox в точке $A\,(-3;0)$, ось $O'y'$ пересекает ось OY в точке $B = (0;6)$. Принимая за базисные векторы второй системы векторы $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$, выразить координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

318. Даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$. Координаты $(x;y)$ произвольной точки относительно первой системы выражаются через координаты $(x';y')$ относительно второй системы следующими формулами: $x = 2x' - 5y' + 3$, $y = -x' + 2y' - 2$. Найти координаты начала второй системы и единичных векторов ее осей относительно первой системы.

319. Дан параллелограмм $OACB$. Рассмотрим две системы координат, принимая за начало обеих систем вершину параллелограмма O, за единичные векторы осей Ox и Oy первой системы — соответственно стороны параллелограмма $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, а за единичные векторы осей Ox' и Oy' второй системы — соответственно векторы $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OL}$ (K и L — середины сторон $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$). Найти координаты вершин параллелограмма во второй системе.

320. В треугольнике OAB проведены медианы AD и BE, пересекающиеся в точке O'. Выразить координаты $(x; y)$ произвольной точки относительно системы с началом в точке O и базисными векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и через ее координаты $(x'; y')$ в системе с началом O' и базисными векторами $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$.

321. В трапеции $ABCD$ основание $\overrightarrow{AD}$ вдвое больше основания $\overrightarrow{BC}$; O — точка пересечения ее боковых с торон, O' — точка пересечения диагоналей. Выразить координаты $(x; y)$ произвольной точки относительно системы с началом в точке O и базисом $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ через ее координаты в системе с началом в точке O' и базисом $\overrightarrow{O'B}$, $\overrightarrow{O'C}$.

322. Написать формулы преобразования прямоугольных координат, если начало новой системы находится в точке $O'(-2; 2)$, а направление оси $O'x'$ совпадает с направлением вектора OO'. Системы одинаково ориентированы.

323. Координатные оси прямоугольной системы поворачиваются на угол $30°$, и начало переносится в точку $O'(3; -1)$. Найти новые координаты точки, если старые координаты ее были $(3; 4)$.

324. В прямоугольной системе координат Oxy дан прямоугольный треугольник с вершинами в точках $A(6; 4)$, $B(2; 1)$ и $C(-1; 5)$. За начало новой прямоугольной системы $O'x'y'$ принимается вершина B, а за положительные направления осей $O'x'$ и $O'y'$ соответственно направления векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. В системе Oxy дана точка $M(5; 5)$. Найти ее координаты в новой системе.

325. В прямоугольной системе координат Oxy даны две прямые $l_1\colon x = 3y$ и $l_2\colon 3x + y = 10$. Принимая эти прямые соответственно за оси $O'x'$ и $O'y'$ новой прямоугольной системы, написать формулы преобразования координат, если системы одинаково ориентированы.

326. Написать формулы преобразования координат, принимая за новые оси $O'x'$ и $O'y'$ прямые $2x + y - 3 = 0$ и $x - 2y + 1 = 0$, а за единичную точку — точку $(3; 4)$.

327. Написать формулы преобразования координат, если точка $A(2; -3)$ лежит на новой оси абсцисс, точка $B(2; 3)$ лежит на новой оси ординат, $O' = O$, а за единичную точку новой системы принимается точка $C(-3; 1)$.

328. Написать уравнение прямой $2x + y - 24 = 0$ в системе координат $O'x'y'$, осями которой служат прямые $3x - 4y - 12 = 0 \quad (O'x')$ и $4x + 3y - 41 = 0 \quad (O'y')$. Системы координат Oxy и $O'x'y'$ прямоугольные и одинаково ориентированы.

329. Оси прямоугольной системы координат повернуты на угол $\varphi = arctg\dfrac{5}{12}$ в положительном направлении отсчета углов. Начало координат перенесено в точку $O'(-1;2)$. Прямая имеет уравнение в новой системе $5x - y - 12 = 0$. Найти уравнение этой прямой в старой системе координат.

330. Новая система получается из старой прямоугольной системы путем поворота вокруг оси Oz в направлении от оси Ox к оси Oy, так что новая ось Ox', находясь в плоскости Oxy, составляет угол φ с осью Ox. Найти формулы преобразования координат.

331. Даны системы координат $Oe_1e_2e_3$ и $O'e_1'e_2'e_3'$. Известны координаты $O'(2;1;1)$, $\vec{e_1'} = \{2;2;1\}$, $\vec{e_2'} = \{2;-1;-2\}$ и $\vec{e_3'} = \{-1;2;-2\}$ в первой системе.

1) Выразить координаты точек относительно первой системы через их координаты во второй системе.

2) Выразить координаты точек относительно второй системы через их координаты в первой системе.

3) Найти координаты точки O и базисных векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ первой системы относительно второй системы.

332. Относительно прямоугольной системы координат даны уравнения координатных плоскостей новой системы:

$$\begin{aligned}
&-x + 2y + 4z + 1 = 0 \quad (O'y'z'),\\
&2x + y + 2 = 0 \quad (O'z'x'),\\
&-4x + 8y - 5z - 2 = 0 \quad (O'x'y').
\end{aligned}$$

Установить, что эти плоскости попарно перпендикулярны, и написать выражения новых прямоугольных координат произвольной точки M через ее старые координаты при условии, что старое начало O имеет в новой системе положительные координаты.

333. Относительно прямоугольной системы координат даны координатные плоскости $x+y+z-1 = 0\ (O'y'z')$, $2x-y-z+1 = 0\ (O'z'x')$, $y - z + 2 = 0 \quad (O'x'y')$ новой системы. Установить, что эти плоскости попарно перпендикулярны, и найти координаты точки $M(1;-1;2)$ в новой системе, если точка $A(-1;-1;-1)$ имеет положительные координаты в новой системе.

334. Написать формулы преобразования прямоугольных координат, если $(Ox^\wedge Ox') = \arccos\frac{1}{3}$, $(Ox^\wedge Oy') = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, $(Ox^\wedge Oz') < \frac{\pi}{2}$, $(Oy^\wedge Ox') = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, $(Oy^\wedge Oy') > \frac{\pi}{2}$ и системы имеют противоположную ориентацию.

335. В прямоугольной системе координат даны три плоскости $P_1\colon 2x+2y+z+1=0$, $P_2\colon -2x+4z+2=0$, $P_3\colon 4x-5y+2z-1=0$. Установить, что эти плоскости попарно перпендикулярны. Найти выражения новых координат (x', y', z') произвольной точки пространства через ее старые координаты (x, y, z), принимая эти плоскости за координатные плоскости новой системы координат, а за положительное направление осей — направление нормалей плоскостей $\overrightarrow{n_1}$(ось $O'x'$), $\overrightarrow{n_2}$(ось $O'y'$) и $\overrightarrow{n_3}$(ось $O'z'$).

§ 9. Кривые второго порядка

9.1. Окружность

Во всех задачах этого параграфа система координат прямоугольная (кроме 403).

336. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1) окружность проходит через точку $A(1;5)$, и ее центр совпадает с точкой $C(-2;1)$;
2) точки $A(2;1)$ и $B(-2;5)$ являются концами одного из диаметров окружности;
3) центр окружности совпадает с точкой $C(2;1)$, и прямая $5x-12y+28=0$ является касательной к окружности;
4) окружность проходит через точки $A(4;3)$ и $B(0;5)$, а ее центр лежит на прямой $3x-y-3=0$;
5) окружность проходит через точки $A(2;3)$, $B(2;1)$ и $C(3;2)$;
6) окружность проходит через точки $A(-2;4)$, $B(-3;-3)$ и $C(4;4)$.

337. Точка $C(2;-2)$ является центром окружности, отсекающей на прямой $2x-5y+15=0$ хорду, длина которой равна 6. Составить уравнение этой окружности.

338. Написать уравнения окружностей радиуса $R = \sqrt{5}$, касающихся прямой $x - 2y - 2 = 0$ в точке $A(2; 0)$.

339. Составить уравнение окружности, касающейся прямых $2x + y - 2 = 0$, $2x + y + 18 = 0$, причем одной из них в точке $A(1; 0)$.

340. Составить уравнения окружностей, которые проходят через точку $A(0; 1)$ и касаются прямых $2x + y + 5 = 0$, $2x + y - 15 = 0$.

341. Составить уравнение окружности, которая, имея центр на прямой $2x+y+3 = 0$, касается прямых $4x-3y+11 = 0$, $4x-3y-29 = 0$.

342. Составить уравнения окружностей, касающихся прямых $7x - y + 1 = 0$, $x + y + 15 = 0$, причем одной из них в точке $A(0; 1)$.

343. Составить уравнения окружностей, проходящих через начало координат и касающихся двух пересекающихся прямых: $x + 2y - 9 = 0$, $2x - y + 2 = 0$.

344. Составить уравнения окружностей, которые, имея центры на прямой $4x - 5y - 4 = 0$, касаются прямых $2x - 3y - 11 = 0$ и $3x - 2y + 6 = 0$.

345. Написать уравнения окружностей, касающихся трех прямых: $4x - 3y - 9 = 0$, $3x - 4y - 6 = 0$ $3x - 4y - 16 = 0$.

346. Какие из нижеприведенных уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 14 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;

4) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;

5) $x^2 + y^2 + x = 0$.

347. Вычислить кратчайшее расстояние от точки до окружности в каждом из следующих случаев:

а) $A(5; -9)$, $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$;

б) $B(2; 8)$, $x^2 + y^2 - 24x + 32y + 319 = 0$;

в) $C(-8; 1)$, $x^2 + y^2 - 8x - 12y - 173 = 0$.

348. Определить, как расположена прямая относительно окружности (пересекает ли, касается, или проходит вне ее), если прямая и окружность заданы следующими уравнениями:

1) $y = 2x - 2$ и $x^2 + y^2 - x + 4y - 2 = 0$;

2) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ и $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$;

3) $y = x + 10$ и $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

349. Определить, при каких значениях углового коэффициента k прямая $y = kx$:

1) пересекает окружность $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$;

2) касается этой окружности;

3) проходит вне этой окружности.

350. Из точки $A\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{8}{3}\right)$ проведены касательные к окружности $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$. Составить их уравнения.

351. Из точки $A(0; 5)$ проведены касательные к окружности $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$. Составить их уравнения.

352. Из точки $A(3; 4)$ проведены касательные к окружности $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$. Определить угол, образованный этими касательными.

353. Из точки $P(1; -1)$ проведены касательные к окружности $x^2 + (y+3)^2 = 4$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

9.2. Эллипс

354. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 2 и 5;

2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8;

3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами равно 10;

4) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;

5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;

6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$;

7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между его фокусами равно 4;

8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;

9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;

10) расстояние между его директрисами равно 32, а эксцентриситет равен $\frac{1}{2}$.

355. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 2 и 7;

2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8;

3) расстояние между фокусами равно 24, а эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$;

4) его малая ось рана 16, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;

5) расстояние между его директрисами равно $16\frac{2}{3}$, а расстояние между его фокусами равно 6;

6) расстояние между его директрисами равно $10\frac{2}{3}$, а эксцентриситет равен $\frac{3}{4}$.

356. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

357. Дан эллипс $36x^2 + 20y^2 = 720$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

358. Эксцентриситет эллипса равен $\frac{1}{3}$, центр совпадает с началом координат, один из фокусов $(-1; 0)$. Вычислить расстояние от точки M эллипса с абсциссой, равной 1, до директрисы, односторонней с данным фокусом.

359. Эксцентриситет эллипса равен $\frac{1}{2}$, центр его совпадает с началом координат, одна из директрис задается уравнением $x = 8$. Вычислить расстояние от точки M эллипса с абсциссой, равной (-2), до фокуса, одностороннего с данной директрисой.

360. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, расстояние от которых до левого фокуса равно 14.

361. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$, расстояние от которых до правого фокуса равно 5.

362. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

1) точка $M(-2\sqrt{5}; 2)$ эллипса и его малая полуось $b = 3$;
2) точка $M(2; -2)$ эллипса и его большая полуось $a = 4$;
3) точки $M_1(4; -\sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ эллипса;
4) точка $M(\sqrt{15}; -1)$ и расстояние между его фокусами $2c = 8$;
5) точка $M(2; -\frac{5}{3})$ и его эксцентриситет $e = \frac{2}{3}$;
6) точка $M(8; 12)$ эллипса и расстояние $r_1 = 20$ от нее до левого фокуса;

7) точка $M(-\sqrt{5}; 2)$ эллипса и расстояние между его директрисами равно 10.

363. Определить эксцентриситет эллипса, если:

1) его малая ось видна из фокусов под углом 60°;

2) отрезок между фокусами виден из вершин малой оси под прямым углом;

3) расстояние между директрисами в три раза больше расстояния между фокусами;

4) отрезок перпендикуляра, опущенного из центра эллипса на его директрису, делится вершиной эллипса пополам.

364. Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(6; 0)$ и оси ординат в точке $B(0; -2)$. Составить уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.

365. Точка $C(2; -3)$ является центром эллипса, касающегося обеих координатных осей. Составить уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.

366. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

1) $5x^2 + 9y^2 - 20x + 36y + 11 = 0$;

2) $16x^2 + 25y^2 + 64x - 50y - 311 = 0$;

3) $4x^2 + 3y^2 + 18y - 21 = 0$.

367. Составить уравнение эллипса, зная, что:

1) его большая ось равна 26 и его фокусы $F_1(-9; 0)$ и $F_2(15; 0)$;

2) его малая ось равна 2 и его фокусы $F_1(-1; -1)$ и $F_2(1; 1)$;

3) его фокусы $F_1(-2; \frac{3}{2})$, $F_2(2; -\frac{3}{2})$ и эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

368. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $e = \dfrac{2}{3}$, фокус $F(1;2)$ и уравнение соответствующей директрисы $x - 4 = 0$.

369. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $e = \dfrac{1}{2}$, фокус $F(-5;2)$ и уравнение соответствующей директрисы $y + 2 = 0$.

370. Точка $A(-4;-4)$ лежит на эллипсе, фокус которого $F(-2;-3)$, а соответствующая директриса задана уравнением $x - 1 = 0$. Составить уравнение этого эллипса.

371. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $e = \dfrac{1}{2}$, фокус $F(2;1)$ и уравнение соответствующей директрисы $x + y - 1 = 0$.

372. Точка $M(1;0)$ лежит на эллипсе, фокус которого $F(0;1)$, а соответствующая директриса задается уравнением $2x - y - 7 = 0$. Составить уравнение этого эллипса.

373. Написать уравнение эллипса, пересекающего ось Ox в точках $(2;0)$ и $(18;0)$ и касающегося оси Oy в точке $(0;3)$, зная, что его оси параллельны осям координат.

374. Написать уравнение эллипса с вершинами $(0;3)$ и $(0;-1)$, зная, что на оси Ox этот эллипс высекает хорду длиной 6.

375. Написать уравнение линии второго порядка, для которой ось Ox является осью симметрии, ось Oy — касательной к вершине, зная, что линия проходит через точки $(2;3)$ и $(6;-3)$.

9.3. Гипербола

376. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$;

2) расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $e = \dfrac{3}{2}$;

3) ось $2a = 16$ и эксцентриситет $e = \dfrac{5}{4}$;

4) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$;

5) расстояние между директрисами $22\dfrac{2}{13}$ и расстояние между фокусами $2c = 26$;

6) расстояние между директрисами $\dfrac{32}{5}$ и ось $2b = 6$;

7) расстояние между директрисами $\dfrac{8}{3}$ и эксцентриситет $e = \dfrac{3}{2}$;

8) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $12\dfrac{4}{5}$.

377. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) расстояние между фокусами $2c = 10$ и эксцентриситет $e = \dfrac{5}{3}$;

2) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;

3) расстояние между директрисами равно $7\dfrac{1}{7}$ и эксцентриситет $e = \dfrac{7}{5}$;

4) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно $6\dfrac{2}{5}$.

378. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: 1) фокусы; 2) эксцентриситет; 3) уравнения асимптот; 4) уравнения директрис.

379. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти: 1) фокусы; 2) эксцентриситет; 3) уравнения асимптот; 4) уравнения директрис.

380. Эксцентриситет гиперболы $e = 2$, центр ее лежит в начале координат, один из фокусов $F(12; 0)$. Вычислить расстояние от точки M гиперболы с абсциссой, равной 13, до директрисы, соответствующей заданному фокусу.

381. Эксцентриситет гиперболы $e = \dfrac{3}{2}$, центр ее лежит в начале координат, одна из директрис задается уравнением $x = -8$. Вычислить расстояние от точки M гиперболы, с абсциссой, равной 16, до фокуса, соответствующего данной директрисе.

382. Определить точки гиперболы $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$, расстояние от которых до правого фокуса равно $4,5$.

383. Определить точки гиперболы $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$, расстояние от которых до левого фокуса равно 7.

384. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

1) точки $M_1(3; -1)$ и $M_2(-4; 2\sqrt{2})$ гиперболы;

2) точка $M(-5; 6)$ гиперболы и эксцентриситет $e = \sqrt{5}$;

3) точка $M(9; -1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{1}{3}x$;

4) точка $M(-3; \dfrac{5}{2})$ гиперболы и уравнения директрис $x = \pm\dfrac{4}{3}$;

5) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x = \pm\dfrac{16}{5}$.

385. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу и найти координаты ее центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис:

1) $16x^2 - 9y^2 - 32x - 36y - 164 = 0$;

2) $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 511 = 0$.

386. Составить уравнение гиперболы, зная, что:

1) расстояние между ее вершинами равно 24 и ее фокусы $F_1(-8;1)$, $F_2(14;1)$;

2) ее фокусы $F_1(3;4)$, $F_2(-3;-4)$ и расстояние между директрисами равно $3,6$;

3) угол между асимптотами равен 90° и ее фокусы $F_1(4;-4)$, $F_2(-2;2)$.

387. Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $e = \dfrac{5}{4}$, фокус $F(3;0)$ и уравнение соответствующей директрисы $5x - 6 = 0$.

388. Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $e = \dfrac{13}{12}$, фокус $F(0;11)$ и уравнение соответствующей директрисы $3y - 98 = 0$.

389. Точка $A(-2;-4)$ лежит на гиперболе, фокус которой $F(-1;-2)$, а соответствующая директриса задана уравнением $x = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

390. Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(1;-2)$ и уравнение соответствующей директрисы $3x - y + 7 = 0$.

391. Точка $M(2;-2)$ лежит на гиперболе, фокус которой $F(-1;2)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x - y - 3 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

9.4. Парабола

392. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее параметр $p = 3$;

2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее параметр $p = 0,5$;

3) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр $p = \frac{1}{4}$;

4) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр $p = 3$.

393. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A, величину параметра p и уравнение директрисы:

1) $y^2 = 4x - 8$;

2) $y^2 = 4 - 6x$;

3) $x^2 = 6y + 2$;

4) $x^2 = 2 - y$.

394. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A, величину параметра p, координаты фокуса F и уравнение директрисы:

1) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$;

2) $y = 4x^2 - 8x + 7$;

3) $x = 2y^2 - 12y + 14$;

4) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$.

395. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(5;4)$ и уравнение директрисы $x - 3 = 0$.

396. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(4;3)$ и уравнение директрисы $y + 1 = 0$.

397. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(1;-2)$ и уравнение директрисы $x - y - 1 = 0$.

398. Даны вершина параболы $A(5;-1)$ и уравнение ее директрисы $3x - 5y + 14 = 0$. Найти фокус F этой параболы.

399. Даны вершина параболы $A(-3;1)$ и уравнение ее директрисы $x + 2y - 2 = 0$. Составить уравнение этой параболы.

400. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(2; 6)$, а ось параллельна оси Oy, зная, что на оси Ox эта парабола высекает хорду длиной 6.

401. Написать уравнение линии второго порядка, фокус которой находится в точке $(2; 0)$, соответствующая ему директриса имеет уравнение $x = 6$, зная, что линия проходит через точку $(-4; 8)$.

9.5. Определение типа и расположения кривой второго порядка

402. С помощью переноса осей координат установить, какая линия определяется каждым из следующих уравнений, и найти ее расположение относительно данной системы координат:

1) $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$;

2) $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$;

3) $3y^2 - 12x - 6y + 11 = 0$;

4) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$;

5) $4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 23 = 0$;

6) $3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0$;

7) $9x^2 - 4y^2 + 36x - 16y + 20 = 0$;

8) $x^2 + x - 6 = 0$.

403. А) Определить тип линии, которая в аффинной системе координат задана уравнением.

Б) Предположив дополнительно, что система координат прямоугольная, найти каноническое уравнение линии и ее каноническую систему координат.

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;

2) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;

3) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;

4) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$;

5) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$;

6) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;

7) $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$;

8) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

9) $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$;

10) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$;

11) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;

12) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$;

13) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$;

14) $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0$;

15) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 16 = 0$;

16) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$;

17) $12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 = 0$;

18) $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + y - 7 = 0$;

19) $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0$;

20) $4x^2 + 4xy + y^2 + 16x + 8y + 15 = 0$.

§ 10. Поверхности второго порядка

Во всех задачах этого параграфа система координат прямоугольная (кроме задач 420 и 431).

404. Доказать, что эллипсоид $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ имеет одну общую точку с плоскостью $4x - 3y + 12z - 54 = 0$, и найти ее координаты.

405. Определить, при каком значении параметра m плоскость $x - 2y - 2z + m = 0$ касается эллипсоида $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

406. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, $z = 0$ вокруг оси Ox.

407. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oz.

408. Убедившись, что точка $M(1; 3; -1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $4x^2 - z^2 = y$, составить уравнения его прямолинейных образующих, проходящих через точку M.

409. Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1$, параллельных плоскости $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

410. Убедившись, что точка $A(-2; 0; 1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = z$, определить острый угол, образованный его прямолинейными образующими, проходящими через A.

411. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, направляющая дана уравнениями:

1) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} & = & 1, \\ z & = & c; \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} & = & 1, \\ y & = & b; \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} & = & 1, \\ x & = & a. \end{array}\right.$

412. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $x^2 - 2z + 1 = 0$, $y - z + 1 = 0$.

413. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(3; -1; -2)$, а направляющая дана уравнениями $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x - y + z = 0$.

414. Ось Oy является осью круглого конуса с вершиной в начале координат; его образующие наклонены под углом в 60° к оси Oy. Составить уравнение этого конуса.

415. Составить уравнение круглого конуса, для которого оси координат являются образующими.

416. Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\mathbf{m} = \{2; -3; 4\}$, а направляющая дана уравнениями $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$.

417. Составить уравнение цилиндра, направляющая которого дана уравнениями $x^2 - y^2 = z$, $x + y + z = 0$, а образующие перпендикулярны к плоскости направляющей.

418. Цилиндр, образующие которого перпендикулярны к плоскости $x + y - 2z - 5 = 0$, описан около сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Составить уравнение этого цилиндра.

419. Цилиндр, образующие которого параллельны прямой $x = 2t - 3$, $y = -t + 7$, $z = -2t + 5$, описан около сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Составить уравнение этого цилиндра.

420. По какой линии плоскость $x + y - z + 3 = 0$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = -4$?

421. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz и пересекающей однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$$

по гиперболе, действительная полуось которой равна 1.

422. По какой линии пересекаются гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z$$

и плоскость

$$2x + 3y - 6 = 0?$$

423. Написать уравнение эллипсоида с вершинами $(0; 0; 6)$ и $(0; 0; -2)$, зная, что плоскость Oxy пересекает его по окружности радиуса 3.

424. Написать уравнение двуполостного гиперболоида с вершинами $(0; 0; \pm 6)$, зная, что плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии и пересекают его по гиперболам, асимптоты которых образуют с осью Oz углы, соответственно равные $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$.

425. Написать уравнение эллипсоида с полуосями 4, 2, 1, для которого плоскости $x+y+z-1=0$, $x-y-2z=0$, $x-y+1=0$ служат плоскостями симметрии, причем большая ось эллипсоида лежит на линии пересечения первой и второй плоскостей, средняя ось лежит на линии пересечения первой и третьей плоскостей, малая ось лежит на линии пересечения второй и третьей плоскостей.

426. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точки $(0;0;0)$, $(1;1;-1)$, $(0;0;1)$, для которой плоскости

$$x+y+z=0, \quad 2x-y-z=0, \quad y-z+1=0$$

являются плоскостями симметрии. Написать каноническое уравнение этой поверхности.

427. Составить уравнение поверхности второго порядка, для которой плоскости

$$x+y+z=0, \quad 2x-y-z-2=0, \quad y-z+1=0$$

являются плоскостями симметрии и которая проходит через точки $(1;0;0)$, $(0;-1;0)$, $(1;1;-1)$.

428. Определить вид поверхности и ее расположение относительно начальной системы координат, пользуясь преобразованием левой части ее уравнения:

1) $x^2+2xy+y^2-z^2+2z-1=0$;

2) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$;

3) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$;

4) $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$;

5) $4x^2+y^2-4xy-36=0$.

429. Определить вид и расположение поверхности, пользуясь переносом системы координат:

1) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;

2) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+44=0$;

3) $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$;

4) $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0$.

430. Определить вид поверхности, пользуясь приведением левой части ее уравнения к сумме квадратов. Система координат аффинная.

1) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$;

2) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y - 10z = 0$;

3) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$;

4) $x^2 - 2y^2 + x^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;

5) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$;

6) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + x + y - z = 0$;

7) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 4x - 2y = 0$;

8) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$;

9) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$;

10) $4xy + 2x + 4y - 6z - 3 = 0$;

11) $xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z = 0$.

431. Поверхность задана в аффинной системе координат уравнением, содержащим параметр k. Определить тип поверхности при всех значениях k.

1) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xz + 2yz + 2x + 2y + 5z + k = 0$;

2) $2x^2 + ky^2 + 8xy + 4xz - 4x - 8y - 4z = 0$;

3) $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz + 4x + 4y + 4z + k = 0$;

4) $kx^2 + 8y^2 + z^2 + 16xy + 4xz + 4yz - 4x - 4y + 2z = 0$;

5) $3x^2 + z^2 + 6xy + 2xz + 4y + ky + z + 1 = 0$;

6) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4xy - 6xz - 2x + 4y + 6z + k = 0$.

§ 11. k-мерные плоскости в n-мерном пространстве

11.1. k-мерные плоскости в аффинном пространстве

Во всех задачах этого раздела система координат аффинная.

432. Доказать, что если k-мерная плоскость α не имеет общих точек с гиперплоскостью π, то α и π параллельны.

433. Доказать, что если k-мерная плоскость пересекает одну из двух параллельных гиперплоскостей и не содержится в ней, то она пересекает и вторую.

434. Доказать, что прямая, не содержащаяся в k-мерной плоскости, имеет с ней не более одной общей точки.

435. Доказать, что гиперплоскости π_1 и π_2, заданные общими уравнениями $A_1x_1+A_2x_2+\dots+A_nx_n = C$ и $B_1x_1+B_2x_2+\dots+B_nx_n = D$ соответственно, параллельны и не совпадают в том и только в том случае, если векторы $\vec{a} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и $\vec{b} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ коллинеарны и $D\vec{a} \neq C\vec{b}$.

436. Пусть параллельные гиперплоскости π_1 и π_2 заданы общими уравнениями $A_1x_1+A_2x_2+\dots+A_nx_n = C$ и $A_1x_1+A_2x_2+\dots+A_nx_n = D$ соответственно ($C \neq D$). Доказать, что для произвольной точки $x = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, не принадлежащей ни одной из этих гиперплоскостей, следующие условия эквивалентны:

а) число $A_1x_1^0 + A_2x_2^0 + \dots + A_nx_n^0$ принадлежит отрезку числовой прямой с концами C и D;

б) для любой прямой, проходящей через x и пересекающей π_1 и π_2 в точках y и z, x принадлежит отрезку с концами y и z;

в) существует прямая, проходящая через x и пересекающая π_1 и π_2 в точках y и z, для которой x принадлежит отрезку с концами y и z (определение «слоя» между параллельными гиперплоскостями).

437. Доказать, что если плоскости α_1 и α_2 параллельны, то для любой плоскости β плоскости $\alpha_1 \cap \beta$ и $\alpha_2 \cap \beta$ также параллельны.

438. Доказать, что через две непересекающиеся многомерные плоскости α_1 и α_2 можно провести две параллельные непересекающиеся гиперплоскости. Доказать, что если при этом $\dim\alpha_1 + \dim\alpha_2 = n - 1$, где n — размерность всего пространства, и нет отличных от нулевого векторов, параллельных обеим плоскостям, то эти гиперплоскости определяются однозначно.

439. Доказать, что если различные гиперплоскости π_1 и π_2 пересекаются, то $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = n-2$, где n — размерность всего пространства.

440. Гиперплоскость в 4-мерном пространстве задается параметрическими уравнениями. Найти ее общее уравнение.

1) $$\begin{cases} x_1 = 1 + r + 2s - t, \\ x_2 = -r + 3t, \\ x_3 = 1 + s + 2t, \\ x_4 = 1 + r + s + t; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 = -s + 2t, \\ x_2 = 2 + 3r + s + t, \\ x_3 = 2r + s + t, \\ x_4 = 1 + r - s - t. \end{cases}$$

441. В 4-мерном пространстве задана плоскость размерности 2 своими общими уравнениями. Найти параметрические уравнения этой плоскости.

1) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 2; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

442. Выяснить взаимное расположение плоскостей π_1 и π_2.

1) $$\pi_1: \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

$$\pi_2: \ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1;$$

2) $$\pi_1: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$\pi_2: \ x_1 - x_3 + x_4 = 3;$$

3) $$\pi_1\colon \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

$$\pi_2\colon \begin{cases} x_1 = 1 - r, \\ x_2 = 2r + s, \\ x_3 = -2r + s, \\ x_4 = s; \end{cases}$$

4) $$\pi_1\colon \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$\pi_2\colon \begin{cases} x_1 = -1 + r + s, \\ x_2 = -1 + 2r - s, \\ x_3 = -2 + r, \\ x_4 = 3 - 2s; \end{cases}$$

5) $$\pi_1\colon \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$\pi_2\colon \begin{cases} x_1 = 1 - 2r - 2s, \\ x_2 = -3r + 3s, \\ x_3 = -1 + 2r + 2s, \\ x_4 = 1 + 2r - 2s. \end{cases}$$

443. В 4-мерном пространстве найти плоскость минимальной размерности, содержащую две данные плоскости:

$$\pi_1\colon \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \end{cases}$$

$$\pi_2\colon \begin{cases} x_1 = 1 + t, \\ x_2 = -1 - t, \\ x_3 = 1 + 2t, \\ x_4 = 1 - t. \end{cases}$$

444. В 4-мерном пространстве даны 2-плоскость и прямая:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 + t, \\ x_2 = 2 + 2t, \\ x_3 = 1 + t, \\ x_4 = t. \end{cases}$$

Найти пару параллельных гиперплоскостей, одна из которых проходит через данную прямую, а вторая — через данную 2-плоскость.

11.2. k-мерные плоскости в аффинном евклидовом пространстве

В задачах п. 11.2 система координат предполагается прямоугольной.

445. 4-мерный куб задан неравенствами $-1 \le x_i \le 1$, $i = 1, \ldots, 4$. Найти диагонали этого куба, перпендикулярные его диагоналям $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, и определить углы между ними.

446. Найти углы между диагональю 4-мерного куба и его 1-мерной, 2-мерной и 3-мерной гранями.

447. Найти длину диагонали n-мерного куба с ребром a.

448. Пусть $S = S(x_0, R) = \{x : \rho(x, x_0) = R\}$ — сфера радиуса $R > 0$ с центром в x_0 в аффинном евклидовом пространстве, π — гиперплоскость. Доказать, что пересечение $S \cap \pi$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда расстояние от x_0 до π равно R.

449. Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки $M = (5, 1, 0, 8)$ на плоскость, проходящую через точки $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (2, 3, 4, 5)$ и $C = (2, 2, 3, 7)$.

450. Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки $M = (4, 2, -5, 1)$ на плоскость, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$$

451. Плоскость проходит через три точки: $A = (1; 1; 1; 1)$, $B = (2; 2; 0; 0)$, $C = (1; 2; 0; 1)$, а прямая через две точки: $D = (1; 1; 1; 2)$, $E = (1; 1; 2; 1)$. Написать уравнение общего перпендикуляра и найти его длину.

452. Плоскость проходит через три точки: $A = (1; 1; 1; 1)$, $B = (3; 0; 1; 1)$, $C = (1; 1; -1; 2)$, а прямая через две точки: $D = (4; 2; 1; 6)$, $E = (0; 4; 5; 4)$. Определить взаимное расположение прямой и плоскости и найти расстояние между ними.

453. Даны две плоскости: первая проходит через точки $A_1 = (4; 5; 3; 2)$, $B_1 = (5; 7; 5; 4)$, $C_1 = (6; 3; 4; 4)$, а вторая — через точки $A_2 = (1; -2; 1; -3)$, $B_2 = (3; -2; 3; -2)$, $C_2(2; -4; 1; -4)$. Найти расстояние между плоскостями.

454. Найти расстояние между 2-мерной гранью единичного 4-мерного куба и его диагональю, не пересекающей эту грань.

455. Доказать, что вокруг любого n-мерного симплекса в n-мерном пространстве можно описать сферу.

456. Доказать, что в любой n-мерный симплекс в n-мерном пространстве можно вписать сферу.

§ 12. Аффинные преобразования плоскости и пространства

457. Доказать, что при любом аффинном преобразовании плоскости на себя, не являющемся преобразованием подобия, через каждую точку плоскости проходит одна и только одна пара взаимно перпендикулярных прямых, переходящих снова во взаимно перпендикулярные прямые.

458. Доказать, что всякое аффинное преобразование плоскости на себя может быть представлено как произведение некоторого сжатия к прямой и преобразования подобия.

459. Доказать, что всякое аффинное преобразование плоскости на себя может быть представлено как произведение двух сжатий к двум взаимно перпендикулярным прямым и некоторого движения.

460. Доказать, что при любом аффинном преобразовании пространства на себя через каждую точку пространства можно провести три такие попарно перпендикулярные прямые, что их образы также попарно перпендикулярны.

461. Доказать, что всякое аффинное преобразование пространства на себя может быть представлено как произведение трех сжатий к трем взаимно перпендикулярным плоскостям и некоторого движения.

462. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, расположенные на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно так, что $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{CB_1}{B_1A}$. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника ABC совпадает с точкой пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

463. Найти аффинное преобразование плоскости на себя, переводящее точку A в A', а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — в векторы $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$ соответственно.

1) $$\left\{\begin{array}{lcl} A &=& (1;1), \\ \bar{a} &=& \{1;-1\}, \\ \bar{b} &=& \{2;0\}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A' &=& (-1;2), \\ \bar{a}' &=& \{4;1\}, \\ \bar{b}' &=& \{2;4\}; \end{array}\right.$$

2) $$\left\{\begin{array}{lcl} A &=& (2;1), \\ \bar{a} &=& \{1;2\}, \\ \bar{b} &=& \{-1;1\}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A' &=& (3;0), \\ \bar{a}' &=& \{10;1\}, \\ \bar{b}' &=& \{5;2\}. \end{array}\right.$$

464. Найти аффинное преобразование плоскости на себя, переводящее три неколлинеарные точки A, B, C в три неколлинеарные точки A', B', C' (система координат аффинная).

1) $$\left\{\begin{array}{lcl} A &=& (1;1), \\ B &=& (-2;0), \\ C &=& (2;-1), \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A' &=& (0;3), \\ B' &=& (4;-1), \\ C' &=& (-1;-1); \end{array}\right.$$

2) $$\left\{\begin{array}{lcl} A &=& (2;0), \\ B &=& (1;3), \\ C &=& (3;3), \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A' &=& (0;-1), \\ B' &=& (-1;-1), \\ C' &=& (-1;2). \end{array}\right.$$

465. Найти аффинное преобразование, обратное к данному (система координат аффинная):

1) $$\left\{\begin{array}{lcccccc} x' &=& x &+& y &+& 1, \\ y' &=& x &-& y; && \end{array}\right.$$

2) $$\left\{\begin{array}{lcccccc} x' &=& 4x &-& y &+& 2, \\ y' &=& 3x &+& y &+& 1. \end{array}\right.$$

466. Найти аффинные преобразования AB и BA (система координат аффинная):

1) $$A\colon \left\{\begin{array}{l} x' = 2x + y - 1, \\ y' = -x - y; \end{array}\right. \quad B\colon \left\{\begin{array}{l} x' = x - 2y, \\ y' = -x + y + 2; \end{array}\right.$$

2) $$A\colon \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y; \end{cases} \quad B\colon \begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

467. Найти аффинное преобразование плоскости на себя, при котором точка $(0, -3)$ переходит в начало координат, а прямая $x - 3y - 3 = 0$ является точечно инвариантной, т. е. каждая точка этой прямой переходит в себя (система координат аффинная).

468. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y - 12, \\ y' = 4x - 3y + 6. \end{cases}$$

На прямой $7x - 2y - 24 = 0$ найти такую точку, которая при этом преобразовании переходит в точку, лежащую на этой прямой. Система координат аффинная.

469. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 2, \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$$

и точка $A = (1; 1)$. Найти прямую, проходящую через точку A, которая при этом преобразовании переходит в прямую, также проходящую через точку A. Система координат аффинная.

470. Найти преобразование подобия, являющееся произведением поворота на угол $\dfrac{\pi}{2}$ вокруг точки $(1; 1)$ и гомотетии с центром в этой точке и коэффициентом 3. Система координат прямоугольная.

471. Найти преобразование подобия с неподвижной точкой $(2; 1)$, переводящее точку $(2; -9)$ в точку $(-2; -2)$. Система координат прямоугольная.

472. Найти аффинное преобразование, являющееся произведением симметрии относительно прямой $x + 3y - 5 = 0$ и гомотетии с центром в точке $(2; 1)$ на этой прямой и коэффициентом 3. Система координат прямоугольная.

473. Найти аффинное преобразование, являющееся сжатием к прямой $2x + y - 2 = 0$ с коэффициентом сжатия 3. Система координат прямоугольная.

474. Найти аффинное преобразование, являющееся произведением сжатия к прямой $x + y - 2 = 0$ с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$ и сжатия к прямой $x - y = 0$ с коэффициентом 2. Система координат прямоугольная.

475. Найти аффинное преобразование, являющееся произведением сжатия к прямой $x + y - 1 = 0$ с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$ и симметрии относительно этой прямой. Система координат прямоугольная.

476. Дано аффинное преобразование плоскости на себя (система координат аффинная):

$$\begin{cases} x' = x + y + 1, \\ y' = x - 2y - 1. \end{cases}$$

Найти координатную запись этого преобразования в новых координатах, если формулы перехода от старых координат $(x; y)$ к новым $(\tilde{x}; \tilde{y})$ имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 2y, \\ \tilde{y} = 3x + y - 1. \end{cases}$$

477. Дано аффинное преобразование плоскости на себя (система координат аффинная):

$$\begin{cases} x' = y - 1, \\ y' = x + y + 2. \end{cases}$$

Найти координатную запись этого преобразования в новых координатах, если известно, что точки $(0; 0), (1; 0), (0; 1)$ (в старых координатах) имеют новые координаты $(0; 1), (1; 1), (-1; 3)$ соответственно.

478. Дано аффинное преобразование плоскости на себя (система координат прямоугольная). Найти главные направления этого преобразования, т. е. два перпендикулярных вектора, которые переходят снова в перпендикулярные векторы (см. задачу 457):

1) $$\begin{cases} x' = -x + 2y + 1, \\ y' = y + 2; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x' = x + y + 3, \\ y' = x - y; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - 2y + 1. \end{cases}$$

479. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования (система координат аффинная):

1) $$\begin{cases} x' = 2x + 2, \\ y' = -x - 2y; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x' = x - y + 1, \\ y' = x + y - 2; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = x - 2y + 1; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x' = 2x - y + 1, \\ y' = x + 2. \end{cases}$$

480. Доказать, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей любых двух фигур.

481. Учитывая результат задачи 480 и то, что эллипс является аффинным образом окружности, доказать:

а) эллипс является геометрическим местом точек M — таких, что

$$S^2_{ACM} + S^2_{BCM} = S^2_{ABC},$$

где A, B, C — любые три неколлинеарные точки;

б) для любого вписанного в эллипс параллелограмма его диагонали пропорциональны параллельным им диаметрам эллипса;

в) для любого описанного около эллипса параллелограмма его стороны пропорциональны параллельным им диаметрам эллипса.

482. Учитывая результат задачи 480 и то, что произвольная гипербола является аффинным образом равносторонней гиперболы, доказать, что любую гиперболу можно определить как геометрическое место точек M — таких, что

$$S^2_{ACM} - S^2_{BCM} = S^2_{ABC},$$

где A, B, C — любые три неколлинеарные точки.

483. Доказать, что все параболы подобны между собой.

484. Найти инвариантные точки, прямые и плоскости аффинного преобразования пространства на себя (система координат аффинная).

1) $$\begin{cases} x' = x - y + 1, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$$

485. Доказать, что вокруг любого выпуклого четырехугольника можно описать эллипс.

§ 13. Движения плоскости

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной и положительно ориентированной. Под движениями первого рода понимаются движения, сохраняющие ориентацию, а под движениями второго рода — изменяющие ее. Все повороты производятся против часовой стрелки.

486. Доказать, что всякое движение плоскости первого рода представляет собой либо поворот, либо параллельный перенос.

487. Доказать, что всякое движение плоскости второго рода представляет собой скользящее отражение (т. е. симметрию относительно некоторой прямой с последующим параллельным переносом вдоль этой же прямой).

488. Доказать, что произведение двух поворотов R_A^α и R_B^β (A и B — центры поворотов, $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$) представляет собой поворот $R_C^{\alpha+\beta}$, если $\alpha + \beta \neq 2\pi$, и параллельный перенос, если $\alpha + \beta = 2\pi$. Доказать, что любое движение плоскости первого рода представляет собой произведение не более чем двух поворотов.

489. Доказать, что любое движение плоскости первого рода представляется в виде произведения (ровно) двух симметрий относительно некоторых прямых. Доказать, что всякое движение плоскости представимо в виде произведения не более чем трех симметрий.

490. Написать формулы поворота ориентированной плоскости на угол φ вокруг точки $(x_0; y_0)$.

491. Найти движение, при котором каждая точка переходит в точку, симметричную ей относительно прямой $x + y - 5 = 0$.

492. Найти движение, сохраняющее ориентацию и переводящее точку $(1; 0)$ в точку $(0; 0)$, а точку $(0; 0)$ — в точку $(0; 1)$. Найти угол поворота φ и неподвижную точку этого преобразования.

493. Найти движение, меняющее ориентацию и переводящее точку $(1; 0)$ в точку $(0; 0)$, а точку $(0; 0)$ — в точку $(0; 1)$. Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси симметрии.

494. Написать формулы скользящего отражения с осью $x - y + 1 = 0$ и вектором переноса $\{1; 1\}$ (см. задачу 487).

495. Написать формулы скользящего отражения с осью $2x + y - 1 = 0$ и вектором переноса $\{1; -2\}$ (см. задачу 487).

496. Найти центр поворота $R^{\frac{\pi}{4}}_{(0;0)} \circ R^{\frac{\pi}{2}}_{(2;0)}$ (см. задачу 488).

497. Найти центр поворота $R^{\frac{\pi}{2}}_{(1;0)} \circ R^{\pi}_{(1;1)}$ (см. задачу 488).

498. Параллельный перенос на вектор $\{1; 1\}$ представлен в виде произведения двух симметрий $S_{l_2} \circ S_{l_1}$, где l_1 — прямая $x + y - 1 = 0$. Найти прямую l_2.

499. Поворот $R^{\frac{2\pi}{3}}_{(1,0)}$ представлен в виде произведения двух симметрий $S_{l_2} \circ S_{l_1}$, где l_1 — прямая $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$. Найти прямую l_2.

500. Дано скользящее отражение (см. задачу 487):

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2, \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 4. \end{cases}$$

Найти ось симметрии и вектор переноса.

501. Дано скользящее отражение (см. задачу 487):

$$\begin{cases} x' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y, \\ y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y. \end{cases}$$

Найти ось симметрии и вектор переноса.

502. Дан эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a\neq b)$. Найти все движения первого рода, относительно которых он инвариантен.

503. Дан эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a\neq b)$. Найти все движения второго рода, относительно которых он инвариантен.

504. Дана равносторонняя гипербола $x^2-y^2=1$. Найти все движения первого рода, относительно которых она инвариантна.

505. Дана равносторонняя гипербола $x^2-y^2=1$. Найти все движения второго рода, относительно которых она инвариантна.

506. Дана произвольная парабола. Найти все движения, относительно которых она инвариантна.

507. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника вне его построены квадраты. Доказать, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах четырехугольника, равны и перпендикулярны.

§ 14. Проективная плоскость

508. В аффинной системе координат на проективно-аффинной плоскости заданы точки $O_1=(-1;1)$, $O_2=(1;0)$, O_3 — бесконечно удаленная точка оси абсцисс, E — бесконечно удаленная точка оси ординат. Вводится новая проективная система координат $O_1O_2O_3E$ (E — единичная точка).

а) Точка A имеет аффинные координаты $(1;1)$. Найти ее проективные координаты.

б) Прямая задается уравнением $x_1+x_2-1=0$ в аффинной системе. Найти ее уравнение в проективной системе.

в) Точка A имеет проективные координаты $(1:2:1)$. Найти ее однородные координаты в аффинной системе.

г) Точка A имеет проективные координаты $(1:1:3)$. Найти ее аффинные координаты в аффинной системе.

509. На проективной плоскости фиксирована некоторая проективная система координат. Найти уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

а) $(2 : -1 : 2)$, $(1 : 0 : 3)$;

б) $(0 : 1 : -2)$, $(3 : 4 : -2)$.

510. Найти проективные координаты точки пересечения двух прямых:

а) $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$, $x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$;

б) $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$, $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

511. Найти координаты точки пересечения прямой $7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$ с прямой, проходящей через точки $A = (3 : 1 : 5)$ и $B = (-2 : 0 : 7)$.

512. Доказать, что четыре точки A, B, C, D лежат на одной прямой, и найти ангармоническое отношение $(ABCD)$:

а) $A = (1 : 2 : -1)$, $B = (1 : -1 : 0)$, $C = (1 : 5 : -2)$, $D = (4 : -1 : -1)$;

б) $A = (0 : 1 : -1)$, $B = (5 : 2 : -1)$, $C = (10 : 3 : -1)$, $D = (5 : -1 : 2)$.

513. Доказать, что три точки A, B, C лежат на одной прямой, и найти четвертую гармоническую точку:

а) $A = (1 : 2 : 1)$, $B = (0 : 1 : -1)$, $C = (2 : 3 : 3)$;

б) $A = (1 : -1 : 0)$, $B = (2 : 3 : -4)$, $C = (1 : -6 : 4)$.

514. Доказать, что три точки A, B, C лежат на одной прямой, и найти точку D той же прямой, если известно ангармоническое отношение $(ABCD)$:

а) $A = (0 : 1 : 0)$, $B = (2 : 0 : -1)$, $C = (4 : -1 : -2)$, $(ABCD) = -\dfrac{2}{3}$;

б) $A = (3 : 0 : -1)$, $B = (2 : -2 : 1)$, $C = (8 : -2 : -1)$, $(ABCD) = -\dfrac{1}{8}$.

515. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$ на проективной плоскости даны координаты базисных точек

$$A_1' = (4:1:1), A_2' = (4:4:1), A_3' = (0:4:1)$$

и координаты единичной точки $E' = (2:1:1)$ новой проективной системы координат. Найти выражения координат произвольной точки $(x_1:x_2:x_3)$ в первой системе через координаты $(x_1':x_2':x_3')$ той же точки во второй системе.

516. Вершины базисного треугольника и единичная точка проективной системы координат на проективно-аффинной плоскости имеют следующие аффинные координаты:

$$A_1 = (1;1), A_2 = (-1;1), A_3 = (0;0), E = (0;\frac{1}{2}).$$

Найти в этой системе координат уравнения осей координат и уравнение несобственной прямой.

517. На проективно-аффинной плоскости относительно аффинной системы координат даны четыре точки:

$$A_1 = (1;2), A_2 = (-1;2), A_3 = (2;3), E = (-3;4).$$

Найти проективные координаты точки $(-2;0)$ относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$.

518. Доказать, что если проективное преобразование задается формулой $\lambda x' = Ax$, где A — матрица размера 3×3 с ненулевым определителем, то проективные координаты прямых преобразуются по формуле $\lambda\xi' = (A^{-1})^T\xi$.

519. Доказать, что всякое проективное преобразование проективной плоскости имеет по меньшей мере одну инвариантную точку и одну инвариантную прямую.

520. На проективно-аффинной плоскости задано в однородных координатах проективное преобразование:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ \lambda x_2' = 2x_1 + x_2 + 2x_3, \\ \lambda x_3' = 4x_1 - 2x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

Найти несобственные точки, которые при этом преобразовании переходят в несобственные точки.

521. Найти проективное преобразование проективно-аффинной плоскости, переводящее начало аффинной системы координат в точку $(-7; 4)$, несобственную точку оси OX — в точку $(\frac{1}{4}; \frac{3}{8})$, несобственную точку оси OY — в точку $(-\frac{1}{3}; \frac{5}{9})$, а точку $(1; 1)$ — в несобственную точку прямой $x + y = 0$.

522. Найти проективное преобразование, при котором вершины базисного треугольника $A_1 = (1 : 0 : 0), A_2 = (0 : 1 : 0), A_3 = (0 : 0 : 1)$ переходят соответственно в точки $E_1 = (0 : 1 : 1), E_2 = (1 : 0 : 1)$, $E_3 = (1 : 1 : 0)$, а единичная точка E инвариантна.

523. Дано проективное преобразование:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ \lambda x_2' = 2x_1 + x_2 + x_3, \\ \lambda x_3' = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

Найти инвариантные точки и инвариантные прямые этого преобразования.

524. Написать уравнения гармонической гомологии с осью $l\colon\ x_1 + x_2 - x_3 = 0$ и центром $O = (1 : 1 : 1)$ (т. е. такого проективного преобразования f, при котором l точечно инвариантна, O неподвижна, а если A не принадлежит l и не совпадает с O, то точка пересечения прямых l и OA, точка O и точки A, $f(A)$ образуют гармоническую четверку).

525. Найти все проективные преобразования, при которых точка $(1 : 1 : 1)$ и прямая $x_1 = 0$ инвариантны, а прямая $x_2 = 0$ точечно инвариантна.

526. Как запишется уравнение параболы $y^2 = 4x$, лежащей на проективно-аффинной плоскости, в проективной системе координат $A_1A_2A_3E$, если

$$A_1 = (1; 0), A_2 = (-1; 2), A_3 = (-1; -2), E = (0; 0)?$$

527. На проективно-евклидовой плоскости относительно прямоугольной системы координат задана окружность $x^2 + y^2 = 1$. Как запишется уравнение этой окружности в проективной системе координат $A_1A_2A_3E$, если

$$A_1 = (1; 0), A_2 = (0; 1), A_3 = (-1; 0), E = (0; -1)?$$

528. Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через пять точек A, B, C, D, E:

а) $A = (1 : 1 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (1 : 2 : 1)$, $D = (4 : 5 : 2)$, $E = (4 : 5 : -2)$;

б) $A = (0 : 1 : 1)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (1 : 2 : 1)$, $D = (2 : 5 : 1)$, $E = (1 : -2 : -1)$.

529. Доказать, что две кривые второго порядка пересекаются не более чем в четырех точках.

530. Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через точки $A = (1 : 1 : 1)$, $B = (1 : -1 : 1)$, $C = (4 : \sqrt{3} : 2)$, $D = (0 : \sqrt{3} : -2)$ и касающейся прямой $x_2 - x_3 = 0$ в точке A.

531. Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через точки $A = (0 : 1 : 0)$, $B = (2 : 2 : 1)$, $C = (1 : -8 : -1)$ и касающейся прямых $4x_1 - x_2 - 6x_3 = 0$ и $8x_1 + x_2 = 0$ в точках B и C соответственно.

Ответы

1. 1) $(3;-7)$; 2) $(-3;7)$; 3) $(-3;-7)$; 4) $(7;3)$; 5) $(-7;-3)$. **2.** 1) $(1;2;-4)$; 2) $(-1;2;4)$; 3) $(1;-2;-4)$; 4) $(-1;2;-4)$; 5) $(1;4;-2)$. **3.** 1)$(2;-1)$; 2) $(2;2)$, $(-2;-2)$; 3) $(0;0)$. **5.** $(2;0)$, $(0;0)$. **6.** $(4;4)$, $(1;1)$. **7.** $(-4;-1)$, $(-4;7)$, $(2;-1)$, $(2;7)$. **8.** $(-1;0)$, $(-1;6)$, $(-3,0)$, $(-3,6)$. **9.** $(0;0;2)$, $(0;0;8)$. **10.** $(1;0;0)$. **11.** 1) $\arccos\dfrac{4}{\sqrt{65}}$, 2) 7. **12.** 16. **13.** Тупоугольный. **14.** 19. **15.** $(11;2)$, $(-7;8)$. **16.** $(0;2)$, $(0;1)$. **18.** $(8;-3)$, $r=\sqrt{85}$. **19.** $(1;1)$, $r=1$ или $(5;5)$, $r=5$. **20.** $(4;-4;4)$. **21.** 1) $(2;-1)$, $(0;-2)$, $(-1;2)$; 2) $\left(\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{1}{3}\right)$. **22.** $|AE|=\sqrt{34}$, $|BD|=\sqrt{10}$, $|CF|=4$. **23.** $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. **24.** $C(9;-3)$, $D(3;-1)$. **25.** $(-3;3)$, $(7;5)$, $(-3;-3)$. **26.** $A(160;-131)$, $B(-225;184)$. **27.** $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$. **28.** $D(11;7)$, $M(5;\dfrac{23}{5})$, $S(5;13)$. **29.** 1) $M_1,M_2\notin L$; $M_3\in L$; 2) $M_1,M_2\notin L$; $M_3\in L$; 3) $L=\emptyset$. **30.** 1) $(0;4)$, $\left(-\dfrac{4}{3};0\right)$; 2) $\left(0;\dfrac{-3+4\sqrt{2}}{3}\right)$, $\left(0;\dfrac{-3-4\sqrt{2}}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2};0\right)$, $\left(\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2};0\right)$; 3) $(0;1)$, $(0;3)$, $(-3;0)$, $(1;0)$; 4) точек пересечения нет. **31.** 1) $(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $(1;-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$; 2) $(\sqrt{3};\dfrac{1}{2})$, $(\sqrt{3};-\dfrac{1}{2})$; 3) $(-2;0)$; 4) таких точек нет. **33.** 1) $(2;-2)$; 2) $(-1;1)$, $(2;4)$; 3) точек пересечения нет; 4) $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **35.** 1) $x=1$; 2) $4x-2y+7=0$. **36.** $|x|=|y|$. **37.** $|x|=2$. **38.** $|y-x|=2$. **39.** $y=2$. **40.** $y=x-2$. **41.** $y^2=4x-4$. **42.** $x^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$. **43.** Вся плоскость. **44.** Вся плоскость, если ромб является квадратом. В остальных случаях — пустое множество. **45.** Искомое множество состоит из единственной точки D, которая является вершиной прямоугольника $ABCD$. **46.** $(x-1)^2+y^2=16$. **47.** 1) $y^2=8x$; 2) $3x^2+20x-y^2+12=0$; 3) $3x^2-20x+4y^2+12=0$. **48.** $\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{2}=$ $=|x-4|$. **49.** 1) $x^2+y^2=4$; 2) $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. **50.** 2) $(2;-\dfrac{\pi}{6})$, $(4;-\dfrac{\pi}{3})$;

3) $(2;\frac{7\pi}{6})$, $(4;\frac{4\pi}{3})$; 4) $(2;\frac{\pi}{3})$, $(4;\frac{\pi}{6})$; 5) $(2;\frac{4\pi}{3})$, $(4;\frac{7\pi}{6})$; 6) $(\sqrt{3};1)$, $(2;2\sqrt{3})$; 7) $(\frac{\sqrt{3}}{2}+1;\frac{1}{2}+\sqrt{3})$, $\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}};\arccos\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\right)\right)$; 8) $\sqrt{20-8\sqrt{3}}$; 9) $10-4\sqrt{3}$; 10) 2. **51.** 1) $A\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{2\sqrt{5}}{3};-\arcsin\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}}\right)$; 3) $C\left(2;\frac{7\pi}{6}\right)$, $D\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$. **52.** 1) $\varphi=\frac{\pi}{3}$; 2) $r=2$. **53.** $r=4\sin\varphi$. **54.** $r=\frac{2}{\cos\varphi}$. **56.** $r=\frac{2}{1+\cos\varphi}$. **60.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\frac{3}{2}$. **61.** $\frac{2\pi}{3}$. **62.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\pi-\arcsin\frac{3}{5}$; 3) $\pi-\arcsin\frac{4}{5}$. **63.** 5. **64.** 10. **65.** $\vec{AC}=\mathbf{a}+\frac{1}{5}\mathbf{b}$, $\vec{CD}=-\mathbf{a}+\frac{4}{5}\mathbf{b}$, $\vec{BD}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$. **66.** $\vec{AD}=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\vec{BE}=-\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\vec{CF}=\frac{1}{2}\mathbf{a}-\mathbf{b}$. **67.** $[\vec{0}]$. **70.** Точка пересечения медиан. **71.** $\frac{1}{5}$. **74.** $\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{AC}$. **75.** При $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$. **76.** $\vec{OM}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. **77.** При $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$. **80.** Линейно независимы системы 1), 2), 3), 4), 5). Линейно зависимы — 6) и 7). **81.** $\vec{AB}=\{0;1\}$, $\vec{BC}=\{3;0\}$, $\vec{CD}=\{-2;-1\}$, $\vec{DA}=\{-1;0\}$, $\vec{AC}=\{3;1\}$, $\vec{BD}=\{1;-1\}$. **82.** $\vec{AB}=\left\{\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right\}$, $\vec{BC}=\left\{\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right\}$, $\vec{AC}=\left\{\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right\}$, $\vec{CF}=\{-1;-1\}$. **83.** 1) $\vec{AB}=\{-1;1;0\}$, $\vec{BC}=\{0;-1;1\}$, $\vec{CA}=\{1;0;-1\}$; 2) $\vec{DA}=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$; 3) $\vec{DF}=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$; 4) $\vec{AE}=\left\{-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$; 5) $\vec{OM}=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$. **84.** $\frac{|CD|}{|AB|}=2$. **85.** $\mathbf{a}=\{-1;1\}$. **86.** $\vec{AE}=\left\{\frac{5}{2};3;\frac{1}{2}\right\}$, $\vec{AD}=\left\{\frac{19}{8};\frac{22}{8};\frac{5}{8}\right\}$. **88.** 1) $\left\{\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right\}$; 2) $\left\{-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right\}$. **89.** 1) $\{2;1;1\}$; 2) $\left\{\frac{20}{21};\frac{8}{21};-\frac{30}{21}\right\}$. **90.** 1) Линейно независимы; 2) линейно зависимы, $\mathbf{c}=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}$; 3) линейно зависимы. Вектор $\mathbf{c}$ нельзя представить в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. **91.** $\{-96;-30;0\}$. **92.** $\{-4;10;3\}$. **93.** 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) -61. **94.** 1) -62; 2) 162; 3) 373. **95.** $-\frac{3}{2}$. **96.** -19. **97.** -13. **98.** 10. **99.** $\sqrt{3}$. **100.** 1) $\sqrt{46}$; 2)

$\sqrt{10}$. **106.** $\arccos\left(-\dfrac{11}{\sqrt{130}}\right)$, $\arccos\left(\dfrac{16}{\sqrt{265}}\right)$, $\arccos\left(\dfrac{37}{\sqrt{13}\sqrt{106}}\right)$. **107.** $\arccos\left(-\dfrac{12}{49}\right)$, $\arccos\left(\dfrac{61}{7\sqrt{122}}\right)$, $\arccos\left(\dfrac{61}{7\sqrt{122}}\right)$. **108.** $C(0;9)$, $D(-5;7)$ или $C(4;-1)$, $D(-1;-3)$. **109.** $C(4;3)$, $D(-2;5)$. **110.** 15, $\arccos\dfrac{25}{27}$. **111.** Все углы равны $\dfrac{\pi}{2}$. **112.** $\dfrac{\pi}{3}$. **113.** $\sqrt{2}$. **114.** $\left\{1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right\}$. **115.** $\{-2;-3;6\}$. **116.** $\{-3;3;3\}$. **117.** $\{-6;6;-3\}$. **118.** $\{6;6;0\}$. **119.** $\{3;-1;1\}$. **120.** $\left\{-\dfrac{5}{\sqrt{2}};\dfrac{11}{\sqrt{2}};-\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right\}$. **121.** $\{0;\sqrt{2};\sqrt{2}\}$, $\{0;-\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$. **122.** $\{0;1;0\}$, $\{0;-1;0\}$. **123.** $\{1;0;0\}$, $\left\{\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right\}$. **124.** Тройки 2), 3), 4), 6) ориентированы положительно; 1), 5) — отрицательно. **125.** Тройки 2), 4) ориентированы положительно; 1), 3), 5) — отрицательно; тройка 6) базисом не является и ориентации не имеет. **126.** $\{-y;x\}$. **127.** $\{4;-1\}$. **128.** $\left\{\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right\}$. **129.** $\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{4};\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}\right\}$. **130.** $\left\{0;-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. **131.** $\left\{-\dfrac{3}{\sqrt{38}};\dfrac{5}{\sqrt{38}};-\dfrac{2}{\sqrt{38}}\right\}$. **132.** $\left\{\dfrac{6}{5\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}};-\dfrac{8}{5\sqrt{5}}\right\}$. **133.** 16. **134.** 30, -30. **135.** 1) 24; 2) 60. **136.** 1) 3; 2) 27; 3) 300. **137.** 1) $\{5;1;7\}$; 2) $\{10;2;14\}$; 3) $\{20;4;28\}$. **138.** 1) $\{6;-4;-6\}$; 2) $\{-12;8;12\}$. **139.** 9. **140.** $\{-3;-12;4\}$. **141.** 11. **142.** $\arcsin\sqrt{\dfrac{10}{13}}$. **143.** $\arcsin\dfrac{4\sqrt{2}}{45}$. **144.** $\dfrac{\pi}{6}$. **145.** $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{0}$ или $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=1$ и $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ попарно ортогональны. **150.** 1) $(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{0}$; 2) $\mathbf{x}=-\dfrac{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},\mathbf{a})}+$ $+t\mathbf{a}$, где $t\in R$. **151.** 24. **152.** 27. **155.** 21. **156.** 3. **157.** 11. **158.** $(0;8;0)$, $(0;-7;0)$. **159.** $\dfrac{2}{3}$. **160.** $\left\{-\dfrac{13}{6};\dfrac{14}{3};-\dfrac{31}{6}\right\}$, $\left\{\dfrac{35}{6};-\dfrac{10}{3};\dfrac{17}{6}\right\}$. **162.** а) $-\dfrac{6}{7}$; б) 10. **163.** а) $y=-\dfrac{5}{4}x$; б) $y=5$; в) $x=-4$; г) $y=3x+17$; д) $2x-5y+33=0$; е) $3x+2y+2=0$. **166.** $y=\pm x\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **167.** $x+y=0$, $x-y+c=0$. **168.** $y=2$. **170.** $x-4y+4=0$, $x-y-2=0$. **171.** $x+2y-8=0$.

172. $3x+8y-11=0$, $9x-4y-5=0$. **173.** $5x-3y-21=0$. **174.** $5x+3y-43=0$. **175.** $x-y-1=0$, $2x+y-5=0$, $x+2y-16=0$. **176.** $(4;-2)$. **178.** 1) $Aa+Bb\neq 0$, $Aa+Bb=0$, $Aa=-Bb=$ $=\dfrac{Cab}{ay_0-bx_0}$, $Aa=-Bb\neq\dfrac{Cab}{ay_0-bx_0}$. **179.** а) $0;-1$; б) -1; в) $a\neq 0;-1$; г) 0. **180.** $A(x-x_0)+B(y-y_))=0$. **181.** $4x-12y+7=0$. **182.** $4x+y\pm 4\sqrt[4]{3}=0$. **183.** $2x+y-17=0$, $4x-y-25=0$. **184.** $2x+4y-9=0$. **185.** $x+3y-18=0$. **186.** $x+y+6=0$, $32x-41y-100=0$. **187.** $\left(\dfrac{13}{6};\dfrac{7}{6}\right)$, $\left(\dfrac{29}{12};\dfrac{17}{12}\right)$, $\left(\dfrac{53}{30};\dfrac{41}{30}\right)$. **188.** B, D, E. **189.** В смежных. **190.** Нет. **191.** $a\in(3;4,5)$. **192.** $3x-5y+2=0$. **194.** $x-5y+3=0$ или $5x+y-11=0$. **195.** $x+3y-12=0$ или $3x-y-14=0$. **196.** $x+13y+30=0$, $11x-7y-30=0$. **197.** $x+y-1=0$. **198.** $(1;-2)$. **199.** $19x+8y-43=0$. **200.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+12=0$. **201.** $2x-y+3=0$, $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$. **202.** $7x+3y-15=0$, $5x-6y+17=0$, $2x+9y-32=0$. **203.** $ac+bd=0$. **204.** $5x+3y-1=0$, $3x-5y-21=0$. **205.** $x-y-2=0$, $x+y-8=0$. **206.** $2x+y-15=0$, $2x+y+15=0$, $x-2y-10=0$, $x-2y+10=0$. **207.** $(3;-1)$. **208.** $(-3;-8)$. **209.** $2x-3y-19=0$. **210.** $3x-2y+2=0$, $2x+3y-20=0$, $4x-5y-2=0$. **211.** $8x-y+11=0$, $4x+7y-17=0$, $4x-3y-27=0$. **212.** $\sqrt{10}$. **213.** $5x-4y+41=0$, $4x+5y-41=0$. **214.** $5x+2y+8\pm 2\sqrt{29}=0$. **215.** $(0;6)$, $(0;-\dfrac{2}{3})$. **216.** а) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$, б) $\dfrac{9\sqrt{29}}{58}$. **217.** $3x-4y-39=0$, $5x+12y-51=0$. **218.** $3x+8y-11=0$, $9x-4y-5=0$. **219.** $(1;7)$, $(1;6)$, $(16,5;0,5)$, $(-14,6;0,5)$. **220.** $2x-10y+25=0$, $30x+6y+7=0$. **221.** $3x+y+3=0$. **222.** $7x+5y+57=0$, $7x+5y+71=0$ или $7x+5y+57=0$, $7x+5y+43=0$. **223.** $x-5y-3=0$, $x-5y+5=0$, $5x+y+1=0$, $5x+y+13=0$. **224.** $2x-7y-7=0$, $2x-7y+25=0$, $7x+2y-11=0$, $7x+2y+21=0$ или $6x=11y-21=0$, $6x+11y+1=0$, $11x-6y+1=0$, $11x-6y+33=0$. **225.** $2x-3y+5=0$, $2x-3y+17=0$, $3x+2y-11=0$, $3x+2y-22=0$. **226.** $x+y-5=0$, $x+y-13=0$, $x-y+9=0$, $x-y+1=0$ или $7x+y+1=0$, $7x+y+41=0$, $x-7y+67=0$, $x-7y+27=0$.

227. $2x+y+1+2\sqrt{5}=0$. **228.** $2x-3y+7z+16=0$. **229.** $3x-y+$ $+2z-14=0$. **230.** $8x-13y+2z-26=0$. **231.** $x-4y-2z+13=0$. **232.** $z=2$. **233.** $x+y-z-10=0$. **234.** $x-y-3z+3=0$. **235.** $17x-15y-23z-26=0$. **236.** а) $x+1=0$; б) $y-2=0$; в) $3y-2z=0$; г) $3x-17y+6z+29=0$. **237.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+z=1$. **238.** $\frac{144}{7}$. **239.** а) $\frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-1}{2}$; б) $\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-1}{1}$; в) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-1}{4}$; г) $\frac{x-3}{\sqrt{2}}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-1}{-1}$. **240.** а) $\frac{x-2}{1}=$ $=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$; б) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{0}$. **241.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{7}=$ $\frac{z+3}{-5}$. **242.** $x=t,\ y=7t+11,\ z=0$. **243.** $x=-23t-1,\ y=11t-1,$ $z=13t$. **244.** а) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{2}$, б) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+11}{2}$.
245. $AB: \begin{cases} x=t+5, \\ y=t+1, \\ z=-t, \end{cases}$ $AC: \begin{cases} x=2t+5, \\ y=7t+1, \\ z=t. \end{cases}$ $BC: \begin{cases} x=4t+3, \\ y=9t-1, \\ z=-t+2, \end{cases}$ $CD: \begin{cases} x=3t+4, \\ y=8t, \\ z=1. \end{cases}$ **246.** $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{7}=\frac{z+3}{-1}$. **247.** $5x+19y-$ $-22z+14=0$, $15x+18y-14z+45=0$. **248.** а) $\begin{cases} x-2y-5=0, \\ 2x-y+4z+8=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-11y+69z-78=0, \\ x+y-z-1=0. \end{cases}$ **249.** $7x+4y-7z+53=0$. **250.** Нет. **252.** а) 4; 9; б) 16; -1; в) 3; 2. **254.** а) -7; б) 2; в) k — любое число, $\neq 0$. **255.** а) $l\|\alpha$; б) $l\cap\alpha=(-7;7;-10)$; в) $l\in\alpha$; г) $l\|\alpha$; д) $l\cap\alpha=(-1;-8;-2)$. **256.** а) Скрещиваются; б) совпадают; в) параллельны, $2x+y+z+1=0$; г) пересекаются в точке $\left(\frac{5}{6}:-\frac{13}{6};0\right)$, $51x+39y-57z+42=0$. **258.** -3; 3. **259.** $m=-1,4$. **260.** а) -1; б) 221. **261.** $\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-3}$. **262.** а) $(1;2;-1)$; б) прямая $\frac{x-2,5}{-1}=\frac{y}{6}=\frac{z+1}{4}$. **264.** а) $p\neq-1$; б) $p=-1,\ q=3$; в) $p=-1,\ q\neq 3$. **265.** Да. **266.** а) $19x-5y+z=0$; б) $11x-y+5z+$ $+6=0$; в) $14x+4y+1=0$; г) $6x+4z+5=0$. **267.** $10x-7y+47z-73=0$, $9x-5y+28z-41=0$. **268.** $x+y+z-2=0$. **269.** $2x+13y-10z+2=0$.

270. $15x+40y-4z=0$, $x+9y+z-19=0$. **271.** Oxz. **273.** $p=8$, $q=5$. **274.** $4x-4y+4z-7=0$, $10x+6y-4z-5=0$. **275.** $23x-y-4z-24=0$. **276.** $7x-26y+18z=0$. **278.** $40x+39y-16z-80=0$, $40x+11y+16z+80=0$. **280.** а) I: M_1, M_3, M_5; II: M_2, M_6; III: M_4; б) I: M_2, M_6; II: M_1, M_3; III: M_4; $M_5 \in \mathcal{P}_1$. **283.** 3. **284.** а) $\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}$; б) $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$; **285.** $\frac{x-3}{\sqrt{2}} = y-4 = z+10$. **286.** а) $\cos\alpha = \frac{18}{25}$; б) $\cos\alpha = \frac{76\sqrt{5}}{325}$. **287.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z}{0}$. **288.** $(-5; 5; -1)$. **289.** $\frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-2}{0}$. **290.** $(-4; 4; 2)$. **291.** $(-1; 7; 1)$. **292.** $\arcsin\frac{2}{15}$. **293.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0. **294.** $\cos\alpha = -\frac{3}{5\sqrt{2}}$, $\cos\beta = -\frac{4}{5\sqrt{2}}$, $\cos\gamma = \frac{\pi}{4}$. **295.** $\cos\phi = \frac{2}{\sqrt{57}}$. **296.** $4x-y+z+10=0$, $4x+11y+21z+2=0$. **297.** $2x-2y+4z-1=0$, $70x+74y+68z+73=0$. **298.** $\lambda = \pm\sqrt{3}$. **299.** $x = y+3 = \frac{z-16}{-5}$. **300.** $\frac{22}{3}$. **301.** $2\sqrt{6}$. **302.** $(0; -2; 0)$. **303.** $31x-7y-11z+12=0$. **304.** $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{2}$, $\rho = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. **305.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+z\pm 13=0$. **306.** $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. **307.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **308.** $x+y-2=0$, $19x+109y+60z-168=0$. **309.** $(2,5; -3; 3,5)$. **310.** $\left(4; \frac{12}{11}; \frac{15}{11}\right)$. **311.** а) 1; б) $\sqrt{78}$; в) 1; г) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **312.** $7x+76y+7z-66=0$, $41x+8y-61z+36=0$. **313.** $4x-y+6=0$. **314.** $M\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(\frac{5\sqrt{3}-1}{2}; \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$, $P\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)$. **315.** $A(-1; 0)$, $B(0; 7)$. **316.** $\begin{cases} x' = -y+1, \\ y' = -x+1. \end{cases}$ **317.** $\begin{cases} x = -4x' - y' + 1, \\ y = -2x' + 4y' + 2. \end{cases}$
318. $O'(3; -2)$, $\vec{e}\,'_1 = \{2; -1\}$, $\vec{e}\,'_2 = \{-5; 2\}$ **319.** $O(0; 0)$, $A\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $C\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. **320.** $\begin{cases} x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}, \\ y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}. \end{cases}$

321. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}x' - \dfrac{2}{3}y' + \dfrac{2}{3}, \\ y = -\dfrac{2}{3}x' + \dfrac{1}{3}y' + \dfrac{2}{3}. \end{cases}$ **322.** $\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' - 2, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' + 2. \end{cases}$

323. $\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$. **324.** $M\left(\dfrac{24}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$. **325.** $\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{10}}y' + 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}x' - \dfrac{3}{\sqrt{10}}y' + 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y' + 3, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y' + 1. \end{cases}$ **326.** $\begin{cases} x' = \dfrac{-x + 2y + 1}{4}, \\ y' = \dfrac{2x + y - 2}{7}. \end{cases}$

327. $\begin{cases} x' = \dfrac{3x + 2y}{11}, \\ y' = \dfrac{3x - 2y}{7}. \end{cases}$ **328.** $x' - 2y' + 8 = 0$. **329.** $5x + y - 9 = 0$.

330. $\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \\ z = z'. \end{cases}$ **331.** 1) $\begin{cases} x = 2x' + 2y' - z' + 2, \\ y = 2x' - y' + 2z' + 1, \\ z = x' + 2y' + 2z' + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = \dfrac{2}{7}x + \dfrac{2}{7}y - \dfrac{1}{7}z - \dfrac{5}{7}, \\ y' = \dfrac{2}{21}x - \dfrac{5}{21}y + \dfrac{2}{7}z - \dfrac{5}{21}, \\ z' = -\dfrac{5}{21}x - \dfrac{2}{21}y + \dfrac{2}{7}z + \dfrac{2}{7}; \end{cases}$ 3) $O\left(-\dfrac{5}{7}; -\dfrac{5}{21}; \dfrac{2}{7}\right)$,

$\overrightarrow{e}'_1 = \left\{\dfrac{2}{7}; \dfrac{2}{21}; -\dfrac{5}{21}\right\}$, $\overrightarrow{e}'_2 = \left\{\dfrac{2}{7}; -\dfrac{5}{21}; -\dfrac{2}{21}\right\}$, $\overrightarrow{e}'_3 = \left\{-\dfrac{1}{7}; \dfrac{2}{7}; \dfrac{2}{7}\right\}$.

332. $\begin{cases} x' = \dfrac{-x + 2y + 4z + 1}{\sqrt{21}}, \\ y' = \dfrac{2x + y + 2}{\sqrt{5}}, \\ z' = \dfrac{4x - 8y + 5z + 2}{\sqrt{105}}. \end{cases}$ **333.** $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{6}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

334. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}x' - \dfrac{2}{3}y' + \dfrac{2}{3}z', \\ y = -\dfrac{2}{3}x' - \dfrac{2}{3}y' - \dfrac{1}{3}z', \\ z = -\dfrac{2}{3}x' + \dfrac{1}{3}y' + \dfrac{2}{3}z'. \end{cases}$ **335.** $\begin{cases} x' = \dfrac{2x+2y+z+1}{3}, \\ y' = \dfrac{-2x+4z+2}{2\sqrt{5}}, \\ z' = \dfrac{4x-5y+2z-1}{3\sqrt{5}}. \end{cases}$

336. 1) $(x+2)^2+(y-1)^2=25$; 2) $x^2+(y-3)^2=8$; 3) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$; 4) $(x-3)^2+(y-6)^2=10$; 5) $(x-2)^2+(y-2)^2=1$; 6) $(x-1)^2+y^2=25$. **337.** $(x-2)^2+(y+2)^2=38$. **338.** $(x-3)^2+(y+2)^2=5$ и $(x-1)^2+(y-2)^2=5$. **339.** $(x+3)^2+(y+2)^2=20$. **340.** $(x-4)^2+(y+3)^2=20$. **341.** $x^2+(y+3)^2=16$. **342.** $(x+7)^2+(y-2)^2=50$ и $(x-28)^2+(y+3)^2=800$. **343.** $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ и $\left(x-\dfrac{22}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{31}{5}\right)^2=\dfrac{289}{5}$. **344.** $(x-1)^2+y^2=\dfrac{81}{13}$ и $(x+9)^2+(y+8)^2=\dfrac{25}{13}$. **345.** $\left(x+\dfrac{17}{7}\right)^2+\left(y+\dfrac{32}{7}\right)^2=1$ и $\left(x-\dfrac{13}{7}\right)^2+\left(y+\dfrac{2}{7}\right)^2=1$. **347.** а) 7; б) 17; в) 2 . **348.** 1) Пересекает окружность; 2) касается окружности; 3) проходит вне окружности. **349.** 1) $|k|<\dfrac{3}{4}$; 2) $k=\pm\dfrac{3}{4}$; 3) $|k|>\dfrac{3}{4}$. **350.** $x-2y-6=0$ и $2x-y-4=0$. **351.** $2x+y-5=0$ и $x-2y+10=0$, **352.** $90°$. **353.** $x+2y+2=0$. **354.** 1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; 5) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$; 6) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$; 7) $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$; 8) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$; 9) $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{9}=1$ или $\dfrac{4x^2}{117}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 10) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$. **355.** 1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{49}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{169}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1$; 5) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$; 6) $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{16}=1$. **356.** 1) 5 и 3; 2) $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$; 3) $e=\dfrac{4}{5}$; 4) $x=\pm\dfrac{25}{4}$. **357.** 1)$2\sqrt{5}$ и 6; 2) $F_1(0;-4)$, $F_2(0;4)$; 3) $e=\dfrac{2}{3}$; 4) $y=\pm\dfrac{9}{2}$. **358.** 10. **359.** 5. **360.** $(5;3\sqrt{3})$; $(5;-3\sqrt{3})$. **361.** $(4;\sqrt{21})$ и $(4;-\sqrt{21})$. **362.** 1) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{3y^2}{16}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; 6) $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{192}=1$; 7) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$. **363.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **364.** $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$. **365.** $\frac{(x-2)^2}{4}+$ $+\frac{(y+3)^2}{9}=1$. **366.** 1) $C(2;-2)$, полуоси 3 и $\sqrt{5}$, $e=\frac{2}{3}$, уравнения директрис $2x-13=0$ и $2x+5=0$; 2) $C(-2;1)$, полуоси 4 и 5, $e=\frac{3}{5}$, уравнения директрис $3x-19=0$ и $3x+31=0$; 3) $C(0;-3)$, полуоси $2\sqrt{3}$ и 4, $e=\frac{1}{2}$, уравнения директрис $y-5=0$ и $y+11=0$. **367.** 1) $\frac{(x-3)^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; 2) $2x^2-2xy+2y^2-3=0$; 3) $68x^2+48xy+82y^2-625=0$. **368.** $5x^2+9y^2+14x-36y-19=0$. **369.** $4x^2+3y^2+40x-20y+112=0$. **370.** $4x^2+5y^2+22x+30y+64=0$. **371.** $7x^2+7y^2-2xy-30x-6y+39=0$. **372.** $17x^2+8xy+23y^2+56x-$ $-78y-73=0$. **373.** $\frac{(x-10)^2}{100}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$. **374.** $\frac{x^2}{12}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$. **375.** $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{Y^2}{12}=1$. **376.** 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 3) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 4) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 5) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$; 6) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 8) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **377.** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 2) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$; 3) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$; 4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$. **378.** 1) $F_1(-5;0), F_2(5;0)$; 2) $e=\frac{5}{3}$; 3) $y=\pm\frac{4}{3}x$; 4) $x=\pm\frac{9}{5}$. **379.** 1) $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$; 2) $e=\frac{5}{4}$; 3) $y=\pm\frac{4}{3}x$; 4) $y=\pm\frac{16}{5}$. **380.** 10. **381.** 36. **382.** $\left(10;\frac{9}{2}\right)$ и $\left(10;-\frac{9}{2}\right)$. **383.** $(-6;4\sqrt{3})$ и $(-6;-4\sqrt{3})$. **384.** 1) $x^2-y^2=8$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$; 3) $\frac{x^2}{72}-\frac{y^2}{8}=-1$; 4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ или $\frac{x^2}{61/9}-\frac{y^2}{305/16}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **385.** 1) $C(1;-2)$, $a=3$, $b=4$, $e=\frac{5}{3}$, $d_1: 5x+4=0$, $d_2: 5x-14=0$; 2) $C(-3;1)$, $a=8$, $b=6$, $e=\frac{4}{5}$, $d_1: 5x+47=0$, $d_2: 5x-17=0$. **386.** 1) $\frac{(x-5)^2}{144}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$; 2) $24xy+7y^2-144=0$; 3) $2xy+$

$+2x-2y+7=0$. **387.** $\dfrac{(x+2)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. **388.** $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{(y+2)^2}{144}=-1$. **389.** $x^2-4y^2-8x-40y-20=0$. **390.** $7x^2-6xy-y^2+46x-22y+39=0$. **391.** $91x^2-100xy+16y^2-318x+186y+180=0$. **393.** 1) $A(2;0), p=2$, $x-1=0$; 2) $A(\frac{2}{3};0)$, $p=3$, $6x-13=0$; 3) $A(0;-\frac{1}{3})$, $p=3$, $6y+11=0$; 4) $A(0;2)$, $p=\frac{1}{2}$, $4y-9=0$. **394.** 1) $A(-2;1)$, $p=2$, $F(-2;2)$, $y=0$; 2) $A(1;3)$, $p=\frac{1}{8}$, $F\left(1;\frac{49}{16}\right)$, $16y-47=0$; 3) $A(-4;3)$, $p=\frac{1}{4}$, $F\left(-\frac{31}{8};3\right)$, $8x+33=0$; 4) $A(1;2)$, $p=2$, $F(0;2)$, $x-2=0$. **395.** $x=\frac{1}{4}y^2-2y+8$. **396.** $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$. **397.** $x^2+2xy+y^2-2x+6y+9=0$. **398.** $F(8;-6)$. **399.** $4x^2-4xy+y^2+48x+26y+69=0$. **400.** $2x^2-8x+3y-10=0$. **401.** $y^2+8x-32=0$. **402.** 1) Эллипс; большая полуось равна 4, малая полуось равна 3, центр $(3;-2)$, направляющий вектор большой оси $\{1;0\}$; 2) гипербола; действительная полуось равна 1, мнимая полуось равна 2, центр $(2;-3)$, направляющий вектор действительной оси $\{1;0\}$; 3) парабола; параметр равен 2, вершина $(\frac{2}{3};1)$, направляющий вектор в сторону вогнутости $\{1;0\}$; 4) эллипс; большая полуось равна 5, малая полуось равна 3, центр $(2;-3)$, направляющий вектор большой оси $\{0;1\}$; 5) гипербола; действительная полуось равна 4, мнимая полуось равна 2, центр $(2;3)$, направляющий вектор действительной оси $\{1;0\}$; 6) парабола; параметр равен $\frac{8}{3}$, вершина $(-2;\frac{2}{3})$, направляющий вектор в сторону вогнутости $\{0;-1\}$; 7) пересекающиеся прямые $3x+2y+10=0$ и $3x-2y+2=0$; 8) параллельные прямые $x=2$ и $x=-3$. **403.** 1) Эллипс $\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$, $O'=(2;3)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$; 2) гипербола $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, $O'=(1;1)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}};-\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$; 3) парабола $y'^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'=(3;2)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$;

4) пересекающиеся прямые $x-y-1=0$, $x-4y+2=0$; 5) параллельные прямые $2x-3y+1=0$, $2x-3y-2=0$; 6) эллипс $\dfrac{x'^2}{2}+\dfrac{y'^2}{1}=1$, $O'=\left(-\dfrac{4}{5};\dfrac{2}{5}\right)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\dfrac{1}{\sqrt5};\dfrac{2}{\sqrt5}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{-\dfrac{2}{\sqrt5};\dfrac{1}{\sqrt5}\right\}$; 7) гипербола $\dfrac{x'^2}{1}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, $O'=(2;-1)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\dfrac{3}{\sqrt{10}};\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{-\dfrac{3}{\sqrt{10}};\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right\}$; 8) парабола $y'^2=4\sqrt2x'$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\dfrac{1}{\sqrt2};\dfrac{1}{\sqrt2}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt2};\dfrac{1}{\sqrt2}\right\}$, $O'=(2;1)$; 9) пересекающиеся прямые $2x+3y-5=0$, $x-4y+2=0$; 10) параллельные прямые $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$; 11) эллипс $\dfrac{x'^2}{35/6}+\dfrac{y'^2}{35/36}=1$, $O'=(\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3})$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\dfrac{2}{\sqrt5};-\dfrac{1}{\sqrt5}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{\dfrac{1}{\sqrt5};\dfrac{2}{\sqrt5}\right\}$; 12) гипербола $\dfrac{x'^2}{9}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, $O'=(0;1)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\dfrac{2}{\sqrt{13}};\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{-\dfrac{3}{\sqrt{13}};\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right\}$; 13) парабола $y'^2=10x'$, $O'=(-1;2)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\dfrac{4}{5};-\dfrac{3}{5}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right\}$; 14) пересекающиеся прямые $x+y-2=0$, $3x-2y+1=0$; 15) параллельные прямые $2x-3y-2=0$, $2x-3y-8=0$; 16) эллипс $\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{1}=1$, $O'=(0;1)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\dfrac{1}{\sqrt2};-\dfrac{1}{\sqrt2}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{\dfrac{1}{\sqrt2};\dfrac{1}{\sqrt2}\right\}$; 17) гипербола $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, $O'=(1;1)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{\dfrac{2}{\sqrt{13}};\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{-\dfrac{3}{\sqrt{13}};\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right\}$; 18) парабола $y'^2=\dfrac{1}{\sqrt5}x'$, $O'=(2;3)$, $\mathbf{e}_1'=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt5};-\dfrac{2}{\sqrt5}\right\}$, $\mathbf{e}_2'=\left\{\dfrac{2}{\sqrt5};-\dfrac{2}{\sqrt5}\right\}$; 19) пересекающиеся прямые $2x+5y+1=0$, $2x+3y-5=0$; 20) параллельные прямые $2x+y+3=0$, $2x+y+5=0$. **404.** $(6;-2;2)$. **405.** $m=\pm18$. **406.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$. **407.** $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. **408.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+9}{12}=\dfrac{z+3}{2}$. **409.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z}{-2}$, $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-4}$. **410.** $\arccos\dfrac{1}{17}$. **411.** 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$; 3) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$. **412.** $x^2+y^2-z^2=0$.

413. $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 - 6xy + 10xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$. **414.** $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$. **415.** $xy \pm xz \pm yz = 0$. **416.** $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0$. **417.** $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$. **418.** $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz - 6 = 0$. **419.** $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy + 8xz - 4yz + 6x + 24y - 6z - 63 = 0$. **420.** По гиперболе. **421.** Четыре плоскости: $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $x = \pm 3\sqrt{2}$. **422.** По прямой. **423.** $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{(z-2)^2}{16} = 1$. **424.** $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{108} - \frac{z^2}{36} = 1$. **425.** $\frac{(x-y+1)^2}{32} + \frac{(x+y-2z)^2}{24} + \frac{(x+y+z-1)^2}{3} = 1$. **426.** Однополостный гиперболоид $4x^2 - y^2 - z^2 - 10xy - 10xz - y + z = 0$. Каноническое уравнение $12x'^2 - 18y'^2 + 2z'^2 = 1$. **427.** Две параллельные плоскости $(x+y+z)^2 - 1 = 0$. **428.** 1) Пара пересекающихся плоскостей $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z + 1 = 0$; 2) сфера $(x-1)^2 + (y+\frac{2}{3})^2 + z^2 = \frac{16}{9}$; 3) круглый цилиндр $(x-1)^2 + (y+\frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$; 4) круглый конус $(x-1)^2 + (y+\frac{2}{3})^2 - (z-\frac{2}{3})^2 = 0$; 5) пара параллельных плоскостей $2x - y \pm 6 = 0$. **429.** 1) Эллипсоид $\frac{x'^2}{49} + \frac{y'^2}{49/9} + \frac{z'^2}{49/9} = 1$; центр $(3; -1; 2)$, большая, средняя и малая оси соответственно параллельны осям Ox, Oy, Oz; 2) однополостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{16} - \frac{z'^2}{16} = -1$; центр $(-4; 0; -6)$, ось вращения параллельна оси Ox; 3) круглый конус $x'^2 - \frac{y'^2}{3} + z'^2 = 0$; вершина $(3; 5; -2)$, ось вращения параллельна оси Oy; 4) параболоид вращения; $p = \frac{5}{12}$, вершина $(10; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$, направляющий вектор оси вращения $\{-1; 0; 0\}$. **430.** 1) Эллипсоид; 2) однополостный гиперболоид; 3) двуполостный гиперболоид; 4) конус; 5) эллиптический параболоид; 6) гиперболический параболоид; 7) эллиптический цилиндр; 8) гиперболический цилиндр; 9) параболический цилиндр; 10) гиперболический параболоид; 11) однополостный гиперболоид. **431.** 1) При $k > \frac{7}{4}$ — двуполостный гиперболоид, при $k = \frac{7}{4}$ — конус, при $k < \frac{7}{4}$ — однополостный гиперболоид; 2) при $k < 0$ — двуполостный гиперболоид, при $k = 0$ — гиперболический цилиндр, при $k > 0$ — однополостный гиперболоид; 3) при $k > 6$ — мнимый эллипсоид, при $k = 6$ — мнимый конус, при $k < 6$ — эллипсоид; 4) при $k > 8$ — эллипсоид, при $k = 8$ — эллиптический цилиндр, при $k < 8$ — однополостный гиперболоид; 5) при $k \neq 3$ — гиперболический параболоид, при $k = 3$ — гиперболический цилиндр; 6) при $k > 1$ — однополостный гиперболоид, при $k = 1$ — конус, при $k < 1$ — двуполостный гиперболоид. **440.** 1) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1$; 2) $3x_2 - 4x_3 - x_4 = 5$. **442.** 1) $\pi_1 \subset \pi_2, \dim \pi_1 = 2, \dim \pi_2 = 3$; 2) прямая с направляющим вектором $\{0;-1;1;1\}$, проходящая через точку $(1;0;-1;1)$; 3) $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$; 4) $\pi_1 \cap \pi_2 = (1;0;-1;1)$; 5) прямая с направляющим вектором $\{5;12;-5;-8\}$, проходящая через точку $(1;0;-1;1)$. **443.** $12x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -2$. **444.** $x_3 - x_4 = 0$ и $x_3 - x_4 = 1$. **445.** $x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4$, $x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4$, $x_1 = -x_2 = -x_3 = x_4$; $\dfrac{\pi}{3}$. **446.** $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{6}$. **447.** $a\sqrt{n}$. **449.** $\sqrt{14}$, $(2;1;2;9)$. **450.** 5, $(2;-2;-3;2)$. **451.** $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = \dfrac{3}{2} + t$, $x_4 = \dfrac{3}{2} + t$; длина равна $\dfrac{1}{2}$. **452.** Прямая параллельна плоскости; расстояние равно 5. **453.** 3. **454.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **463.** 1) $\begin{cases} x' = x - 3y + 1, \\ y' = 2x + y - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = 5y - 2, \\ y' = -x + y + 1. \end{cases}$ **464.** 1) $\begin{cases} x' = -\dfrac{9}{7}x - \dfrac{1}{7}y + \dfrac{10}{7}, \\ y' = \dfrac{4}{7}x + \dfrac{16}{7}y + \dfrac{1}{7}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3}y, \\ y' = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}y - 4. \end{cases}$ **465.** 1) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}, \\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{7}x + \dfrac{1}{7}y - \dfrac{3}{7}, \\ y' = -\dfrac{3}{7}x + \dfrac{4}{7}y + \dfrac{2}{7}. \end{cases}$ **466.** 1) AB : $\begin{cases} x' = x - 3y + 1, \\ y' = y - 2, \end{cases}$ BA: $\begin{cases} x' = 4x + 3y - 1, \\ y' = -3x - 2y + 3; \end{cases}$ 2) $AB = BA$: $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = -2y. \end{cases}$ **467.** $\begin{cases} x' = x, \\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ **468.** $(4,2)$. **469.** $2x + y - 3 = 0$.

470. $\begin{cases} x' = -3y + 4, \\ y' = 3x - 2. \end{cases}$ **471.** $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{2}{5}y + 1, \\ y' = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{10}y + \dfrac{3}{2} \end{cases}$ или

$\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{10}x + \dfrac{2}{5}y + \dfrac{11}{5}, \\ y' = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{10}y - \dfrac{1}{10}. \end{cases}$ **472.** $\begin{cases} x' = \dfrac{12}{5}x - \dfrac{9}{5}y - 1, \\ y' = -\dfrac{9}{5}x - \dfrac{12}{5}y + 7. \end{cases}$

473. $\begin{cases} x' = \dfrac{13}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{8}{5}, \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{7}{5}y - \dfrac{4}{5}. \end{cases}$ **474.** $\begin{cases} x' = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{4}y + \dfrac{1}{2}, \\ y' = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

475. $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}y + \dfrac{3}{4}, \\ y' = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{3}{4}. \end{cases}$ **476.** $\begin{cases} x' = -\dfrac{16}{7}x + \dfrac{3}{7}y + \dfrac{24}{7}, \\ y' = \dfrac{1}{7}x + \dfrac{9}{7}y + \dfrac{16}{7}. \end{cases}$

477. $\begin{cases} x' = -x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{5}{2}, \\ y' = 2x + 2y + 3. \end{cases}$ **478.** 1) $\{1; \sqrt{2} - 1\}, \{1; -\sqrt{2} - 1\}$; 2) любая пара направлений является главной; 3) $\{3 + \sqrt{13}; 2\}, \{3 - \sqrt{13}; 2\}$. **479.** 1) Инвариантная точка $(-2; \dfrac{2}{3})$, инвариантные прямые: $x = -2$, $3x + 12y - 2 = 0$; 2) инвариантная точка $(2; 1)$, инвариантных прямых нет; 3) инвариантных точек нет, инвариантная прямая: $2x - 6y + 3 = 0$; 4) инвариантных точек нет, инвариантных прямых нет. **484.** 1) Инвариантные точки: $(0; 1; t)$, $t \in R$, инвариантная (точечно) прямая: $(0, 1, t), t \in R$, инвариантные плоскости: $y - z + D = 0, D \in R$; 2) инвариантная точка $(0; 0; 0)$, инвариантные прямые: $x = y = z$ и прямые, проходящие через начало координат с направляющим вектором вида $\{-s - t, s, t\}$, инвариантные плоскости: $x + y + z = 0$ и плоскости вида $(-B - C)x + By + Cz = 0$. **490.** $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0(1 - \cos\varphi) + y_0\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi - x_0\sin\varphi + y_0(1 - \cos\varphi). \end{cases}$

491. $\begin{cases} x' = -y + 5, \\ y' = -x + 5. \end{cases}$ **492.** $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + 1; \end{cases}$ $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$; $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

493. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x + 1; \end{cases}$ $y = -x + \dfrac{1}{2}$; $\left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$. **494.** $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x + 2. \end{cases}$

495. $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{9}{5}, \\ y' = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{8}{5}. \end{cases}$ **496.** $(\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$. **497.** $(0; 1)$. **498.** $x + y - 2 = 0$. **499.** $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$. **500.** Ось симметрии: $2x - y + 4 = 0$, вектор переноса: $\left\{\dfrac{6}{5}; \dfrac{12}{5}\right\}$. **501.** Ось симметрии: $y = \dfrac{3}{2}x$, вектор переноса: $\{0; 0\}$. **502.** Тождественное и $R^{\pi}_{(0;0)}$. **503.** Симметрии относительно осей координат. **504.** Тождественное и $R^{\pi}_{(0,0)}$. **505.** Симметрии относительно осей координат. **506.** Отражение относительно оси симметрии данной параболы. **507.** *Указание.* Поворот вокруг середины одной из диагоналей данного четырехугольника на $\dfrac{\pi}{2}$ переводит один отрезок в другой. **508.** а) $(1 : 0 : 1)$; б) $x_1 - 2x_3 = 0$; в) $(1 : -1 : 1)$; г) бесконечно удаленная точка в направлении $\{4; 1\}$. **509.** а) $3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$; б) $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$. **510.** а) $(11 : -5 : -9)$; б) $(1 : 2 : 5)$. **511.** $(120 : 14 : -203)$. **512.** а) $(ABCD) = -\dfrac{1}{6}$; б) $(ABCD) = 6$. **513.** а) $(2 : 5 : 1)$; б) $(5 : 0 : -4)$. **514.** а) $(6 : 1 : -3)$; б) $(5 : -8 : 5)$. **515.** $\begin{cases} \lambda x_1 = 8x_1' - 4x_2', \\ \lambda x_2 = 2x_1' - 4x_2' + 4x_3', \\ \lambda x_3 = 2x_1' - x_2' + x_3'. \end{cases}$ **516.** $x_1 + x_2 = 0$ (ось OX), $x_1 - x_2 = 0$ (ось OY), $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ (несобственная прямая). **517.** $(15 : -4 : 24)$. **518.** $(1 : 2 : 0)$. **519.** $\begin{cases} \lambda x_1' = 2x_1 + 3x_2 - 7x_3, \\ \lambda x_2' = 3x_1 - 5x_2 + 4x_3, \\ \lambda x_3' = 8x_1 - 9x_2 + x_3. \end{cases}$ **520.** $\begin{cases} \lambda x_1' = x_2 + x_3, \\ \lambda x_2' = x_1 + x_3, \\ \lambda x_3' = x_1 + x_2. \end{cases}$ **521.** Инвариантная точка $(1 : -1 : -2)$, инвариантная прямая $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. **522.** $\begin{cases} \lambda x_1' = x_1 + 2x_2 - 2x_3, \\ \lambda x_2' = 2x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \lambda x_3' = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3. \end{cases}$ **523.** Тождественное преобразование. **524.** $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. **525.** $2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0$. **526.** а) $x_1^2 - x_1x_2 + x_3^2 = 0$; б) $x_1^2 - x_2x_3 + x_3^2 = 0$. **527.** $x_1^2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 - 3x_3^2 = 0$. **528.** $2x_1^2 - 4x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 = 0$.

Оглавление

Учебное издание

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач

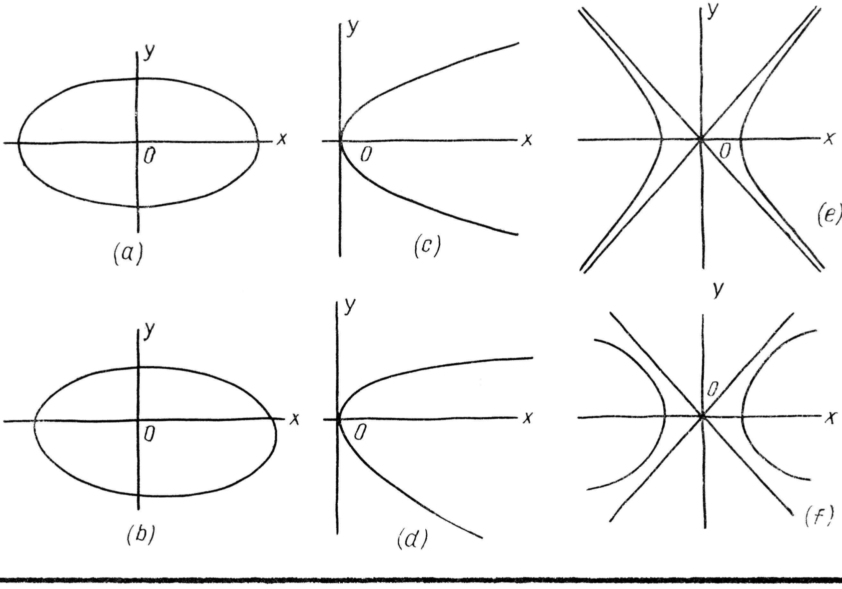
Составители:
Иванов Александр Владимирович,
Платонов Сергей Сергеевич,
Вересова Антонина Тимофеевна,
Матюшичев Константин Викторович,
Степанова Елена Николаевна

Редактор *Т. В. Климюк*

Компьютерная верстка *Е. Н. Степановой*

Подписано в печать 28.04.11.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 2,9. Тираж 120 экз. Изд. № 38.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования



y
x
0
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)