Аналитическая геометрия. Сборник задач
URL: https://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Analytical_geometry/Praktika/Book/Anal_Geom_Sb_Tasks.pdf

---

15.05.2019

Занятие № 14

Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве

Взаимное расположение прямой и плоскости

Дана плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая l: $\begin{cases} x = a_x t + x_0, \\ y = a_y t + y_0, \\ z = a_z t + z_0. \end{cases}$

Подставив в уравнение плоскости вместо переменных x, y, z их выражения из параметрических уравнений прямой, получим уравнение относительно параметра t .

1. Если уравнение относительно t не имеет решений, то прямая параллельна плоскости.

   В этом случае $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, а $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$.

   Т.е. $M \notin \alpha$, $\vec{n} \perp \vec{a}$.

2. Если уравнение относительно t примет вид 0 = 0, то прямая лежит в плоскости.

   В этом случае $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, а $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$.

   Т.е. $M \in \alpha$, $\vec{n} \perp \vec{a}$.

3. Если уравнение относительно t имеет единственное решение t_0, то подставив это значение параметра в уравнения прямой, найдем точку пересечения прямой l и плоскости α.

Взаимное расположение прямых

Даны прямые

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{a_{x1}}=\frac{y-y_1}{a_{y1}}=\frac{z-z_1}{a_{z1}},$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{a_{x2}}=\frac{y-y_2}{a_{y2}}=\frac{z-z_2}{a_{z2}}.$$

1. Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\overrightarrow{a_1}=\{a_{x1},a_{y1},a_{z1}\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{a_{x2},a_{y2},a_{z2}\}$ коллинеарны:

$$l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{x1}}{a_{x2}}=\frac{a_{y1}}{a_{y2}}=\frac{a_{y1}}{a_{y2}}.$$

2. Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ перпендикулярны:

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2})=0.$$

3. Прямые, лежащие в одной плоскости, называются *компланарными*. Прямые l_1 и l_2 компланарны тогда и только тогда, когда смешанное произведение $<\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}>=0$, где $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ - точки на прямых и соответственно.
4. Прямые называются *скрещивающимися*, если они не имеют общих точек и не являются параллельными. Прямые l_1 и l_2 являются скрещивающимися тогда и только тогда, когда смешанное произведение $<\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}>\neq 0$.

Взаимное расположение плоскостей

Даны плоскости

α_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, α_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Нормали плоскостей:

$$\overrightarrow{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\},\ \overrightarrow{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

1. Параллельность плоскостей: $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$,
2. Перпендикулярность плоскостей: $\alpha_1 \perp \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$,

№ 251, 252(а), 253, 254(а), 257, 258, 259, 261.

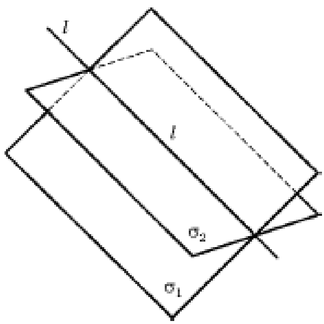
Домашнее задание

№№ 252(в), 254(в), 256, 260.

22.05.2019

Занятие № 15

Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве. Пучок плоскостей



Через одну фиксированную прямую l в пространстве проходит бесконечное множество плоскостей. Это множество называется *пучком плоскостей*, а прямая l – *осью пучка*. Если пара различных плоскостей - σ_1 и σ_2, принадлежащих пучку, задана уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

соответственно, λ_1 и λ_2 – произвольные, одновременное не равные нулю числа, то каждую плоскость пучка можно представить уравнениями вида

$$\lambda_1\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\lambda_2\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0,$$

которое называется *уравнениям пучка плоскостей*.

№ 251(б,г), 264(а,б), 266(а), 267

Домашнее задание

№№ 266(б), 273, 286, 292(б).