**Аналитическая геометрия. Сборник задач**

URL: https://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Analytical_geometry/Praktika/Book/Anal_Geom_Sb_Tasks.pdf

---

**06.03.2019**

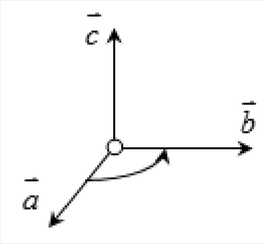
## Занятие № 5

### Скалярное произведение векторов

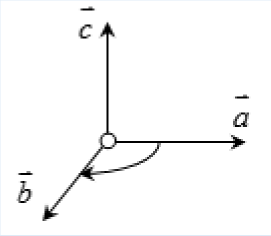
№ 112, 120

### Ориентация векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *ориентирована положительно* (является *правой тройкой*), если наблюдателю, находящемуся в конечной точке вектора $\vec{c}$, поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на наименьший угол виден совершающимся **против часовой стрелки**.




Если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на наименьший угол виден совершающимся **по часовой стрелке**, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *ориентированы отрицательно* (образуют *левую тройку*).




Вид ориентации тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, когда известны их координаты

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, z_z\}, \quad \vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\},$$

можно установить, вычислив определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Для некомпланарных векторов $\Delta \neq 0$. Если $\Delta > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ориентирована положительно. Если $\Delta < 0$, то – отрицательно ориентирована.

№ 126, 128,130.

**Домашнее задание**

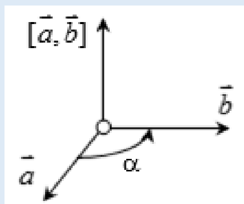
№№ **122, 127, 129, 131.**

**13.03.2019**

**Занятие № 6**

**Векторное произведение**

*Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:




1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$, где $\alpha$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ положительно ориентирована.

Обозначение векторного произведения: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

**Геометрический смысл векторного произведения** $[\vec{a}, \vec{b}]$: модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

**Основные свойства векторного произведения**:

1) $[\vec{a},\vec{a}]=\vec{0}$;
2) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ (кососимметричность);
3) $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$, $\lambda$ – произвольное число;
4) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ (линейность).

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается через их координаты $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x,b_y,z_z\}$ относительно произвольного положительно ориентированного ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ формулой:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

**Условие коллинеарности векторов**. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$.

№ 132, 133, 135 (2), 137 (1,3), 138 (1), 140, 141.

**Домашнее задание**

№№ **134, 136 (2), 138 (2), 139, 142.**

**20.03.2019**

**Занятие № 7**

**Смешанное произведение**

*Смешанным произведением* векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, которое равно скалярному произведению векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ и вектора $\vec{c}$:

$$<\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}> = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

**Основные свойства смешанного произведения**:

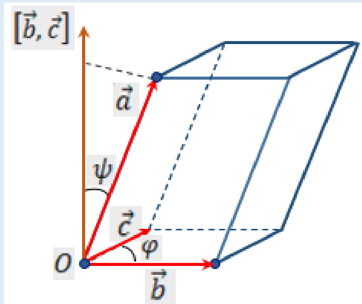
1) Линейность по каждому сомножителю:
$$<\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c}> = \lambda_1 <\vec{a_1}, \vec{b}, \vec{c}> + \lambda_2 <\vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c}>;$$
2) Циклическая симметрия:
$$<\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}> = <\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}> = <\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}> =$$
$$= -<\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}> = -<\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}> = -<\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}>;$$
3) Возможность перестановки векторного произведения под знаком скалярного:
$$<\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}> = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

**Условие компланарности векторов**. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю: $<\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}> = 0$. Это же условие является условием *линейной зависимости векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Зная координаты векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, z_z\}$ и $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ в декартовой системе координат, для вычисления смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можно воспользоваться следующей формулой

$$<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

**Геометрический смысл смешанного произведения**. Модуль смешанного произведения $\left|<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>\right|$ равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.




С помощью смешанного произведения $<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>$ можно определить ориентацию тройки векторов. Если $<\vec{a},\vec{b},\vec{c}> \; > 0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ положительно ориентирована, если $<\vec{a},\vec{b},\vec{c}> \; < 0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ отрицательно ориентирована.

№№ 145, 149, 152, 153, 154, 155, 156.

**Домашнее задание**

№№ **151, 159, 160, 124 (3,4).**

**Подготовка к контрольной работе.** Примерный вариант

Контрольная работа – **27 марта**.

**27.03.2019**

**Занятие № 8**

**Контрольная работ № 1. Векторы и операции над векторами.**

Контрольная работа №1

Тема: **Вектора и операции над векторами**

*Вариант 1*

## № 1.

1) Известны две вершины треугольника $A(2;-1)$ и $B(2;4)$ и точка пересечения его медиан $M(1;2)$. Найдите координаты третьей вершины.

2)* Точки $A(1;-1)$, $B(-2;3)$, $C(-3;-2)$ являются вершинами треугольника. Найдите координаты точки, которая является основанием высоты треугольника, проведенной из вершины $B$.

## № 2.

1) Проверьте, компланарны ли векторы

$$\vec{a}=\{1;2;-9\},\ \vec{b}=\{3;3;-5\},\ \vec{c}=\{-1;3;-4\}.$$

Разложите вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2)* Даны точки

$$A(-5;4;2),\ B(-2;6;8),\ C(-2;4;6),\ D(1;-1;5).$$

Проверьте, лежат ли они в одной плоскости. Разложите вектор $\vec{AB}$ по векторам $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$.

## № 3.

1) Даны векторы $\vec{a}=\{-3;8;4\}$, $\vec{b}=\{1,-7,2\}$. Найдите векторное произведение $[\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}]$.

2)* Даны вершины треугольника $A(-5;4;2)$, $B(-2;6;8)$, $C(-2;4;6)$. Найдите: а) площадь треугольника $ABC$; б) высоту, проведенную из вершины $B$.

## № 4.

Даны вершины треугольной пирамиды $A(-1;0;2)$, $B(3;4;0)$, $C(-1;-2;3)$, $D(6;3;1)$.

1) Найдите объем пирамиды $ABCD$. Установите ориентацию тройки векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

2)* Найдите объем пирамиды $ABCD$ и ее высоту, опущенную из вершины $A$. Приведите пример положительно ориентированной тройки векторов, соединяющих вершины пирамиды.