

Задачи и упражнения по теме:

Динамические системы с дискретным временем

3. (Размножение однолетних растений). Однолетние растения производят семена в конце лета и умирают. Весной из определенной части этих семян прорастают новые растения. Некоторые семена могут оставаться в спячке на протяжении года или больше, другие могут погибать. Предположим, что γ – число семян, произведенных одним растением; σ – часть семян, не погибших в течении зимы; α – часть однолетних семян, которые прорастают весной; β – часть двухлетних семян, которые прорастают весной. Будем считать, что семена старше двух лет не прорастают. Покажите, что если N_t – число растений в t -ом поколении, то динамика численности описывается следующим уравнением

$$N_{t+1} = \alpha\sigma\gamma N_t + \beta\sigma^2(1 - \alpha)\gamma N_{t-1}. \quad (3)$$

Найдите общее решение уравнения. Выясните, при каком условии популяция растений не вымирает.

4. Рассмотрим динамическую систему, которая описывает динамику сообщества «хищник-жертва»:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= a u_t(1 - u_t) - u_t v_t, \\ v_{t+1} &= b u_t v_t. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь u_t – относительная численность жертв в момент времени t (под относительной численностью понимается отношение фактической численности популяции к максимально возможной, которая определяется потенциальной емкостью экосистемы), v_t – относительная численность хищников в момент времени t , $a, b - const$ – параметры модели, a – скорость роста популяции жертв при отсутствии внешних ограничений ($0 < a < 4$), b – параметр, характеризующий «выгоду» хищников ($b > 0$). Предполагается, что в отсутствии хищника динамика численности жертвы описывается логистическим уравнением, в отсутствие жертв хищники вымирают за одно поколение.

Выясните, при каких значениях параметров a и b система (4) имеет положения равновесия и каков характер их устойчивости.