

Качественный анализ НДС на плоскости

№ 1. Рассмотрим математическую модель «хищник–жертва» вида¹

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \alpha_1 N_1 - \gamma_1 N_2), \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1), \end{cases} \quad (1)$$

которая описывает динамику сообщества «хищник–жертва» с саморегуляцией в популяции жертвы, где:

- $N_1(t)$ – численность жертвы;
- $N_2(t)$ – численность хищника;
- ε_1 – коэффициент естественного прироста жертвы при малой ее численности в отсутствие хищника;
- ε_2 – коэффициент смертности хищника в отсутствие жертвы;
- α_1 – коэффициент внутривидовой борьбы в популяции жертвы;
- γ_1, γ_2 – коэффициенты истребления и переработки хищником биомассы жертвы.

Предполагается, что все параметры модели являются постоянными и принимают положительные значения.

С помощью замены

$$N_1 = k_1 x, \quad N_2 = k_2 y, \quad t = k_3 \tau \quad (2)$$

система (1) может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x(E - Ax - y), \\ \frac{dy}{d\tau} = y(-1 + x). \end{cases} \quad (3)$$

Выполните следующие задания:

- 1) Найдите коэффициенты $k_i = \text{const} > 0$, $i = \overline{1,3}$ преобразования (2).
- 2) Установите связь параметров A и E системы (3) с параметрами системы (1).
- 3) Найдите положения равновесия системы (3).

¹ Математические методы в экологии: Сборник задач и упражнений / сост. Е.Е. Семенова, Е.В. Кудрявцева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2005. С.48.

- 4) Исследуйте на устойчивость положения равновесия системы (3).
- 5) Постройте параметрический портрет системы (3) на плоскости параметров (A, E) и соответствующие фазовые портреты.

№ 2. (Модель частной страховой фирмы².) Выполните качественный анализ модели:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha D_0 Q Y - \gamma N, \\ \frac{dY}{dt} = \mu Y N - \beta \left(\frac{s}{p} N - \frac{1}{p} Y \right). \end{cases}$$

Здесь:

- $N(t)$ – число клиентов страховой фирмы;
- $Y(t)$ – прибыль страховой фирмы;
- D_0 – средний доход клиента;
- Q – количество несчастных случаев;
- s – страховой взнос клиента;
- p – размер страховой выплаты клиенту;
- $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ – коэффициенты пропорциональности.

Предполагается, что все параметры модели являются постоянными и принимают положительные значения.

Комментарий к модели:

1. Прирост клиентов пропорционален размеру получаемой прибыли Y , среднему доходу клиента D_0 и среднему количеству несчастных случаев ($\sim Y D_0 Q$).
2. Отрицательная составляющая прироста клиентов обусловлена теми клиентами, которые по каким-либо причинам отказались от услуг фирмы.
3. Прирост прибыли Y пропорционален числу клиентов N , а также той части прибыли которую фирма вкладывает в доходные предприятия ($\sim NY$). Отрицательная составляющая представляет собой часть прироста прибыли, которую фирма не получила из-за выплат клиентам ($\sim Q^*$,

$$Q^* = \frac{s}{p} N - \frac{1}{p} Y).$$

² Шаповалов В.И. Моделирование синергетических систем: Метод пропорций и другие математические методы : монография. – Москва: Проспект, 2015. С.25.