

Качественный анализ одномерных ДС

1. Многие демографы считают, что уравнение Мальтуса

$$N'(t) = \varepsilon N(t), \quad \varepsilon - \text{const} > 0, \quad (\text{a})$$

следует заменить другой моделью, лучше согласующейся с кривой роста народонаселения за последние 100 тысяч лет

$$N'(t) = \varepsilon N^{1+\mu}, \quad \mu = \text{const} > 0. \quad (\text{b})$$

В чем качественное отличие моделей (a) и (b)?

2. Выполните анализ модели динамики численности популяции, которая учитывает два фактора – нижнюю критическую границу численности и самоограничение (самолимитирование) при больших плотностях

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \frac{\beta N^2}{\beta + \tau N} - \gamma N - \delta N^2, \quad \alpha, \beta, \tau, \gamma, \delta - \text{const} > 0. \quad (1)$$

План исследования уравнения (1):

1. Уменьшение размерности области параметров.

Рекомендация: Выясните, с помощью какого преобразования уравнение (1) может быть приведено к виду

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{1+x} - Ax - Bx^2, \quad A, B > 0, \quad (2)$$

где A и B – новые параметры. Установите связь между старыми и новыми параметрами.

2. Поиск положений равновесия уравнения (2).

Рекомендация: найти неотрицательные корни уравнения $f(x) = 0$,

где $f(x) = \frac{x^2}{1+x} - Ax - Bx^2$.

3. Построение областей существования трех положений равновесия, двух положений равновесия и одного положения равновесия в параметрическом пространстве.

4. Анализ на устойчивость положений равновесия уравнения (2).