21.12.2015

Занятие № 23, 24. Дискретные динамические системы на плоскости

Рассмотрим динамическую систему, которая описывает динамику сообщества «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} u_{t+1} = au_t(1-u_t) - u_t v_t, \\ v_{t+1} = bu_t v_t. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь u_t – относительная численность жертв в момент времени t (под относительной численностью понимается отношение фактической численности популяции к максимально возможной, которая определяется потенциальной емкостью среды), v_t – относительная численность хищников в момент времени t; a, b (положительные $const$) – параметры модели, a – скорость роста популяции жертвы при отсутствии внешних ограничений, b – параметр, характеризующий «выгоду» хищников ($b > 0$). Предполагается, что в отсутствии хищника динамика численности жертвы описывается логистическим уравнением, в отсутствии жертв хищники вымирают за одно поколение.

Выясните, при каких значениях параметров a *и* b *система (1) имеет положения равновесия и каков характер их и устойчивости.*

Этапы исследования модели:

1. *Фазовое пространство модели*

   Так как имеют смысл только неотрицательные траектории системы (1), то ее фазовое пространство определяется условиями

$$\begin{cases} u_t \ge 0, \\ v_t \ge 0, \\ au_t(1-u_t) - u_t v_t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le u_t \le 1, \\ 0 \le v_t \le a(1-u_t). \end{cases}$$

   Заметим, что в отсутствии хищника первое условие при любых t будет выполнено, если для любых $u \in [0; 1]$ значения функции $f(u) = au(1-u)$ принадлежат отрезку [0; 1]. Так как функция $f(u)$ при u=1/2 принимает максимальное значение, то

$$\begin{cases} 0 \le f(u) \le 1, \\ 0 \le u \le 1, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 < f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{a}{4} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < a \le 4.$$

Таким образом, область допустимых значений параметров модели (1) определяют условия: $0 < a \le 4$, $b > 0$.

2. <u>Свойства решений уравнения, описывающего динамику численности жертвы в отсутствии хищника:</u>

$$u_{t+1} = au_t(1-u_t),\ 0 < a \le 4. \qquad (2)$$

Уравнение (2) с помощью линейного преобразования

$$u_t = kx_t + c \qquad (3)$$

может быть приведено к виду

$$x_{t+1} = \lambda - x_t^2. \qquad (4)$$

Действительно, подстановка (3) в (2) дает

$$x_{t+1} = \frac{ac(1-c)-c}{k} - ak\cdot x_t^2 + a(1-2c)\cdot x_t.$$

Выбрав коэффициенты k и c преобразования (3) равными:

$$c = \tfrac{1}{2}, \quad k = \tfrac{1}{a},$$

получим уравнение (4), в котором

$$\lambda = \frac{a(a-2)}{4}, \quad -\tfrac{1}{4} \le \lambda \le 2. \qquad (5)$$

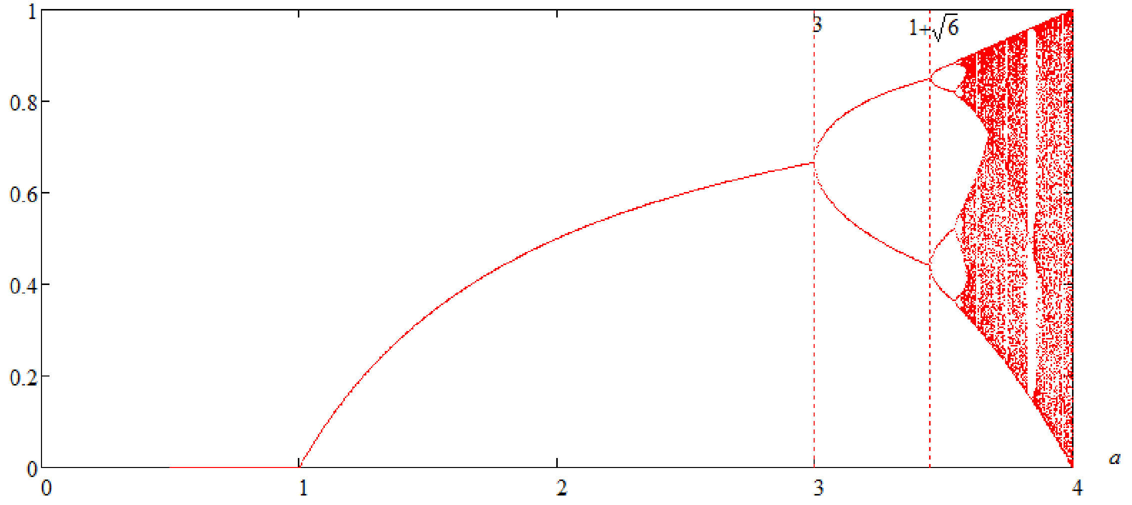
Свойства решений уравнения (4) были рассмотрены при исследовании дискретных моделей на прямой (см. конспект **занятия № 22**):

	$\lambda = -1/4$	$-1/4 < \lambda \le 3/4$	$3/4 < \lambda \le 5/4$	$5/4 < \lambda \le 2$
$x_1^* = \frac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}$	$x_1^* = x_2^*$ устойчиво	не устойчиво (***ме́ньшее*** из x_1^* и x_2^*)		
$x_2^* = \frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}$		устойчиво (***бо́льшее*** из x_1^* и x_2^*)	не устойчиво	
Цикл длины 2	–		устойчив	не устойчив

Возвращаясь к замене (3) и учитывая, что имеют смысл только неотрицательные неподвижные точки, получим следующие результаты:

	$0 < a \le 1$	$1 < a \le 3$	$3 < a \le 1+\sqrt{6}$	$1+\sqrt{6} < a \le 4$
$u_1^* = 0$	устойчиво	не устойчиво		
$u_2^* = \frac{a-1}{a}$	–	устойчиво	не устойчиво	
Цикл длины 2	–		устойчив	не устойчив
Динамика численности жертвы	Вырождение популяции жертвы	Стабилизация численности жертвы на ненулевом равновесном уровне	Периодические колебания численности. Период колебаний T = 2.	

Бифуркационная диаграмма



3. *Поиск положений равновесия*

Найдем положения равновесия системы (1), решая систему уравнений:

$$\begin{cases} u = au(1-u) - uv, \\ v = buv, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u = 0,\ \ v = 0, \\ u = \frac{a-1}{a},\ \ v = 0, \\ u = \frac{1}{b},\ \ v = a\left(1-\frac{1}{b}\right)-1. \end{array}\right. \tag{6}$$

Анализируя полученные решения при допустимых значениях параметров a и b, получим, что система (1) имеет:

1) одно положение равновесия $P_1(0;\,0)$, если $0 < a \le 1$.
2) два положения равновесия P_1 и $P_2\left(\frac{a-1}{a}, 0\right)$, если

$$\begin{cases} a > 1, \\ \left[\begin{array}{l} a\left(1-\frac{1}{b}\right)-1 \le 0, \\ b < 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ b \le \frac{a}{a-1}. \end{cases}$$

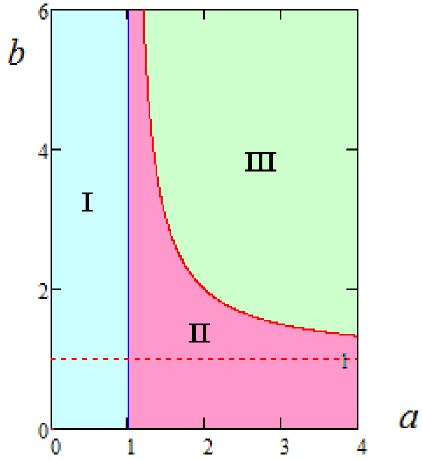
3) три положения равновесия P_1, P_2 и $P_3\left(\frac{1}{b}, a\left(1-\frac{1}{b}\right)-1\right)$, если

$$\begin{cases} a > 1, \\ a\left(1-\frac{1}{b}\right)-1 > 0, \\ b \ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ b > \frac{a}{a-1}. \end{cases}$$

Заметим, что при $a = 1$ **совпадают** положения равновесия P_1 и P_2, а при $b = \frac{a}{a-1}$ – положения равновесия P_2 и P_3.

Области существования одного (**I**), двух (**II**) и трех (**III**) положений равновесия показаны на рисунке.

Прямая $a = 1$ и гипербола $b = \frac{a}{a-1}$ являются **бифуркационными** линиями.



4. *Исследование на устойчивость положений равновесия*

Для системы (1) в окрестности произвольного положения равновесия $P^*(u^*, v^*)$ матрица соответствующей линеаризованной системы (матрица Якоби) имеет вид:

$$A(P^*) = \begin{pmatrix} a(1-2u^*)-v^* & -u^* \\ bv^* & bu^* \end{pmatrix}.$$

Достаточное условие устойчивости. Положение равновесия P^* системы (1) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ_i матрицы $A(P^*)$ удовлетворяют условию $|\lambda_i| < 1$.

Положение равновесия $P_1\,(0;\,0)$

Для точки P_1 матрица Якоби принимает вид:

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = 0$. Достаточное условие устойчивости будет выполнено, если $a < 1$.

Положение равновесия $P_2\left(\frac{a-1}{a}, 0\right)$, $a > 1$.

Для точки P_2 матрица Якоби принимает вид:

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} 2-a & -\frac{a-1}{a} \\ 0 & \frac{b(a-1)}{a} \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = 2 - a, \quad \lambda_2 = \frac{b(a-1)}{a} > 0$. Положение равновесия устойчиво, если выполнены условия:

$$\begin{cases} |2-a| < 1, \\ \frac{b(a-1)}{a} < 1 \end{cases} \overset{a>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 < a < 3, \\ b < \frac{a}{a-1}. \end{cases}$$

Заметим, что последнее условие не будет выполнено, если существует положение равновесия P_3.

Положение равновесия $P_3\left(\frac{1}{b}, a\left(1-\frac{1}{b}\right)-1\right), \quad b > \frac{a}{a-1},\ a > 1.$

Для точки P_3 матрица Якоби принимает вид:

$$A(P_3) = \begin{pmatrix} 1-\frac{a}{b} & -\frac{1}{b} \\ a(b-1)-b & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $A(P_3)$ будут корнями уравнения:

$$\lambda^2 - \left(2-\frac{a}{b}\right)\cdot\lambda + \frac{a(b-2)}{b} = 0.$$

Так как все корни уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ будут по модулю меньше единицы, если коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям:

$$1 + a_1 + a_2 > 0,\ 1 - a_1 + a_2 > 0,\ \ a_2 < 1,$$

то положение равновесия P_3 будет асимптотически устойчиво, если его координаты удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} 1-2+\frac{a}{b}+\frac{a(b-2)}{b} > 0, \\ 1+2-\frac{a}{b}+\frac{a(b-2)}{b} > 0, \\ a(b-2) < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab-a-b > 0, \\ ab-3a+3b > 0, \\ a(b-2) < b. \end{cases}$$

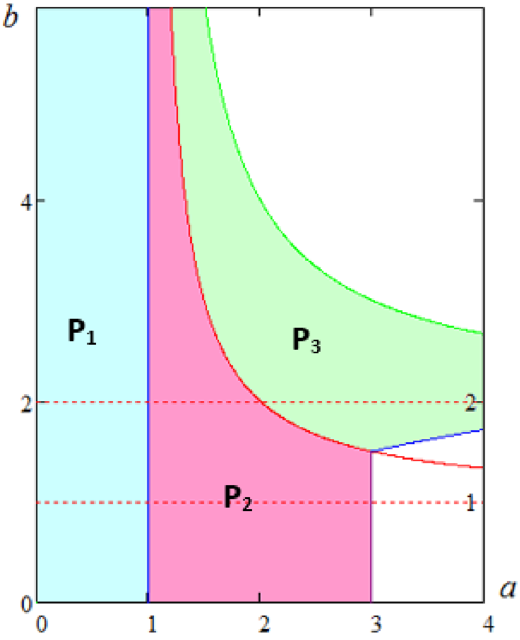
Учитывая условия существования точки P_3, последняя система равносильна следующей:

$$\begin{cases} b > \frac{a}{a-1}, \\ b > \frac{3a}{a+3}, \\ b < \frac{2a}{a-1}. \end{cases}$$

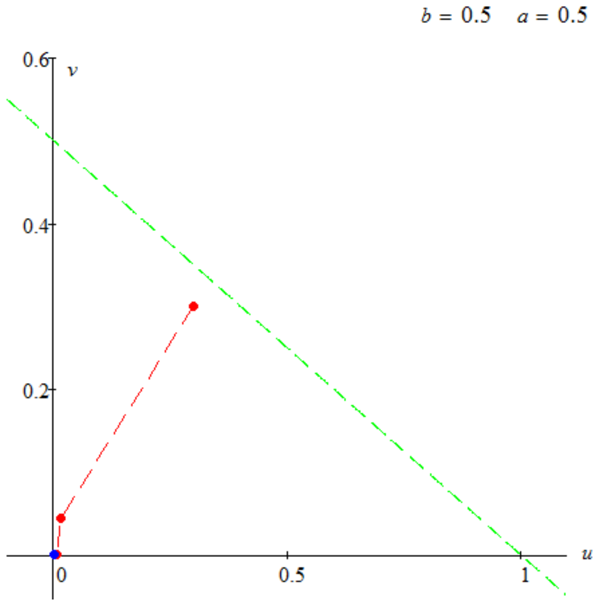
Параметрический портрет системы (1)

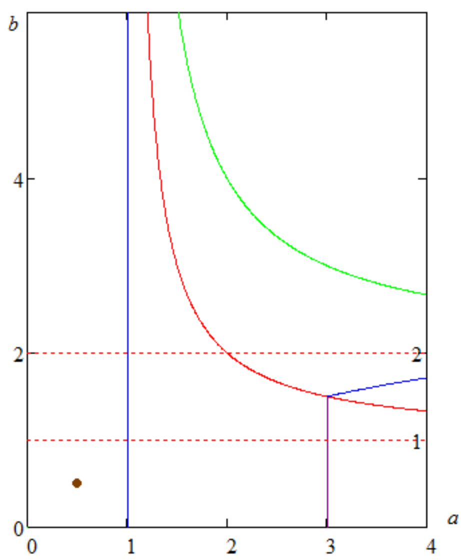
Области устойчивости положений равновесия показаны на **параметрическом портрете**.

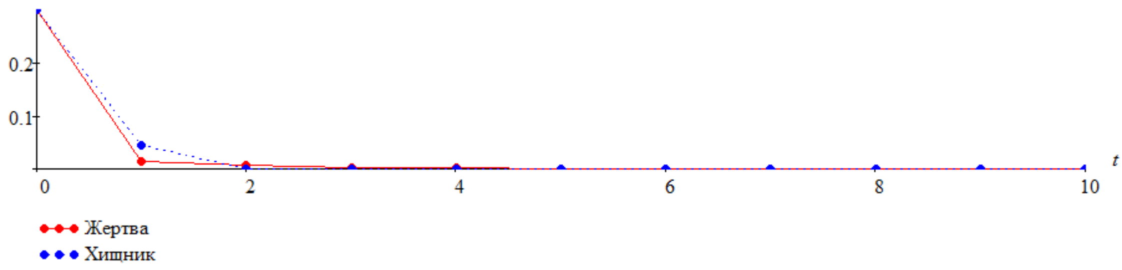
В незакрашенных областях ни одно из положений равновесия не является устойчивым. Здесь следует искать области существования и устойчивости циклов.



5. *<u>Фазовые портреты системы (1) для различных областей параметрического портрета</u>*





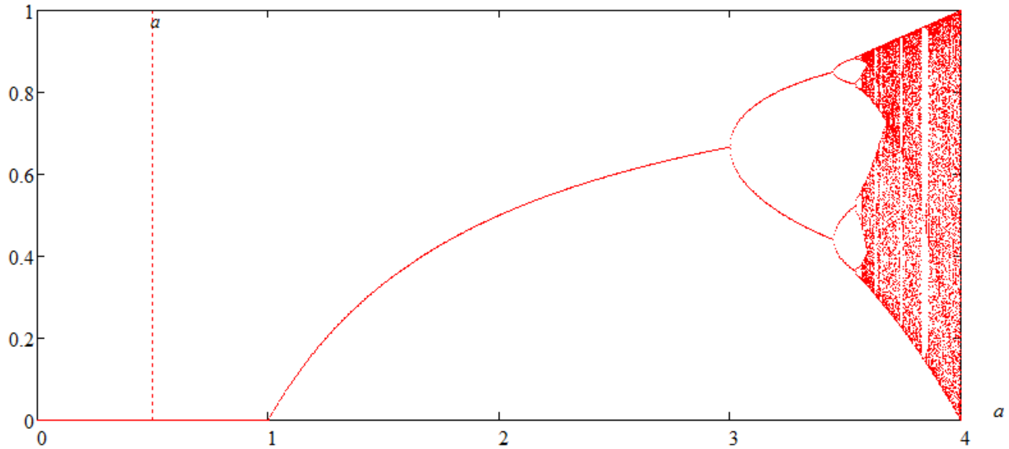


Вырождение популяций жертвы и хищника (монотонное уменьшение численности).

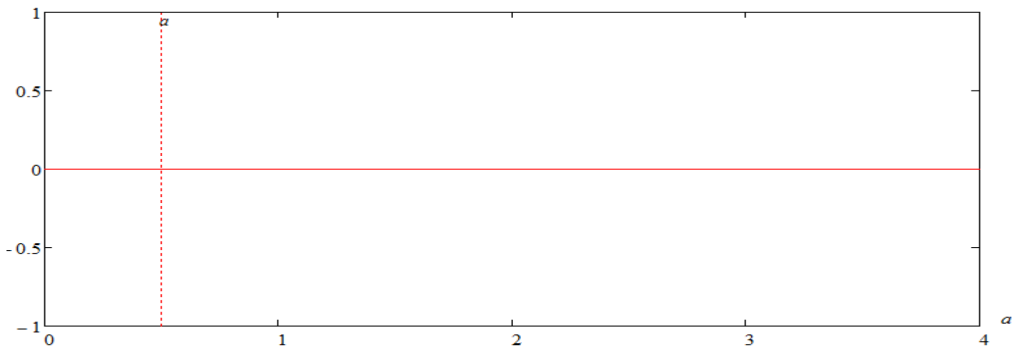
Бифуркационные диаграммы при b = 0.5

При изменении параметра a изменение аттрактора иллюстрируют бифуркационные диаграммы

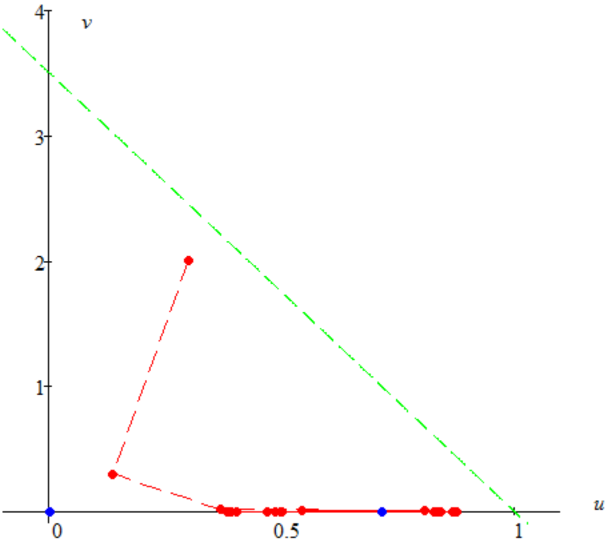
Аттракторы для «жертвы»

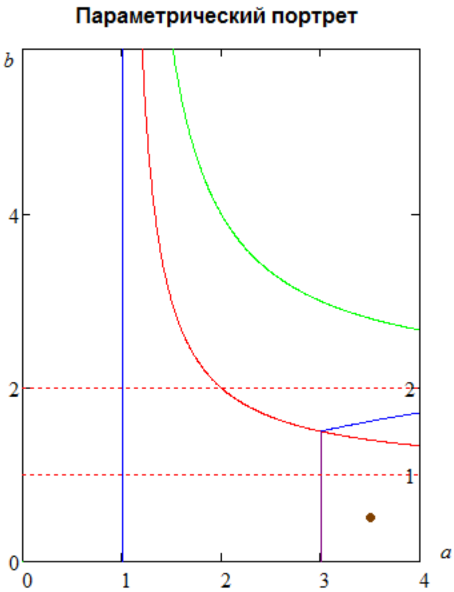


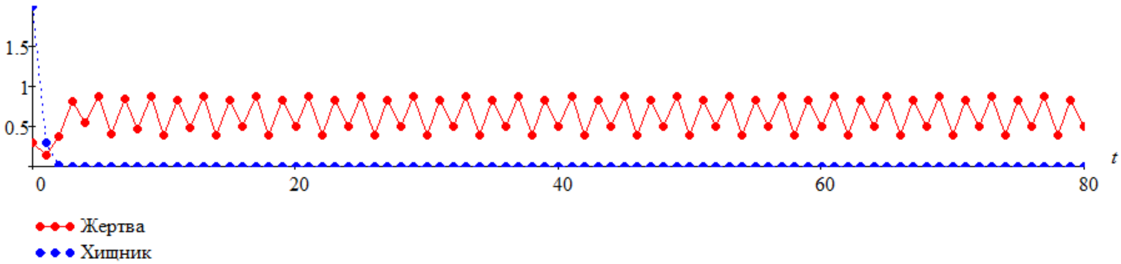
Аттракторы для «хищника» (вырождение)



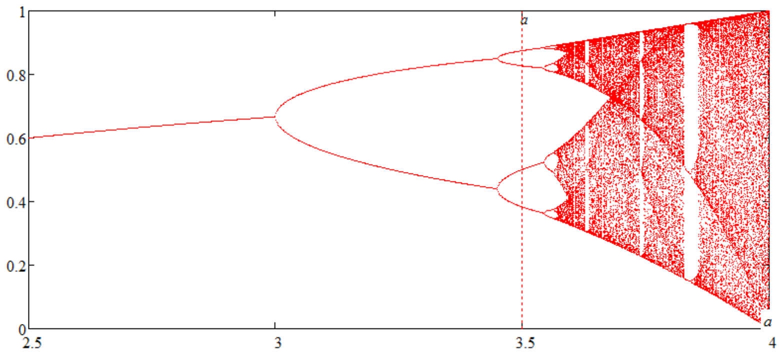
$b = 0.5 \quad a = 3.5$

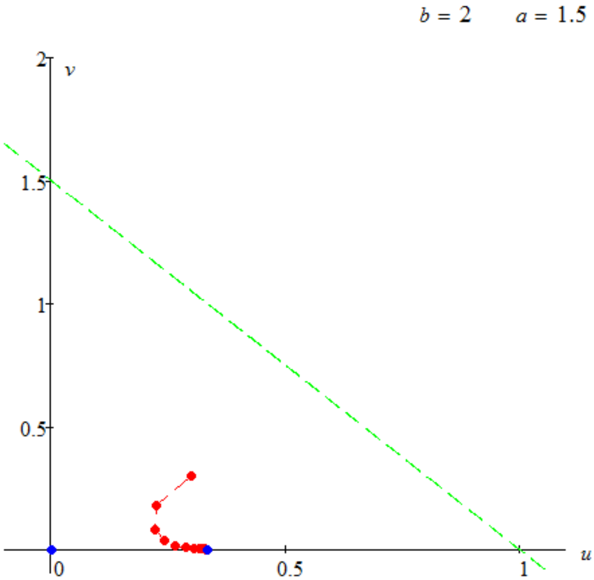


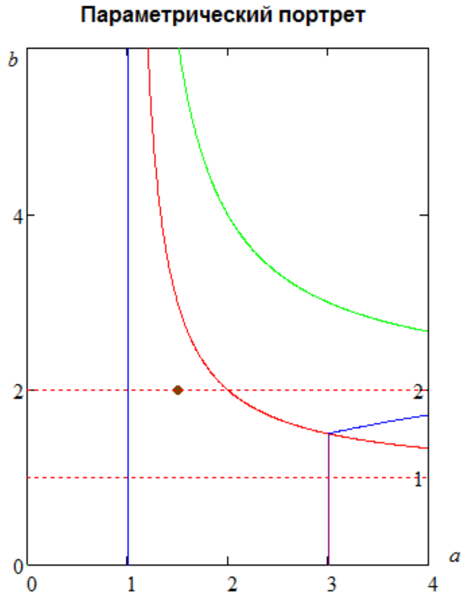


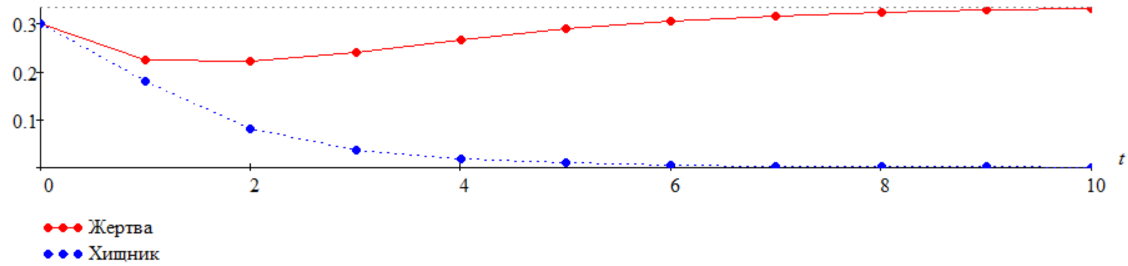


Вырождение популяции хищника. Периодические колебания численности жертвы (период T=4).







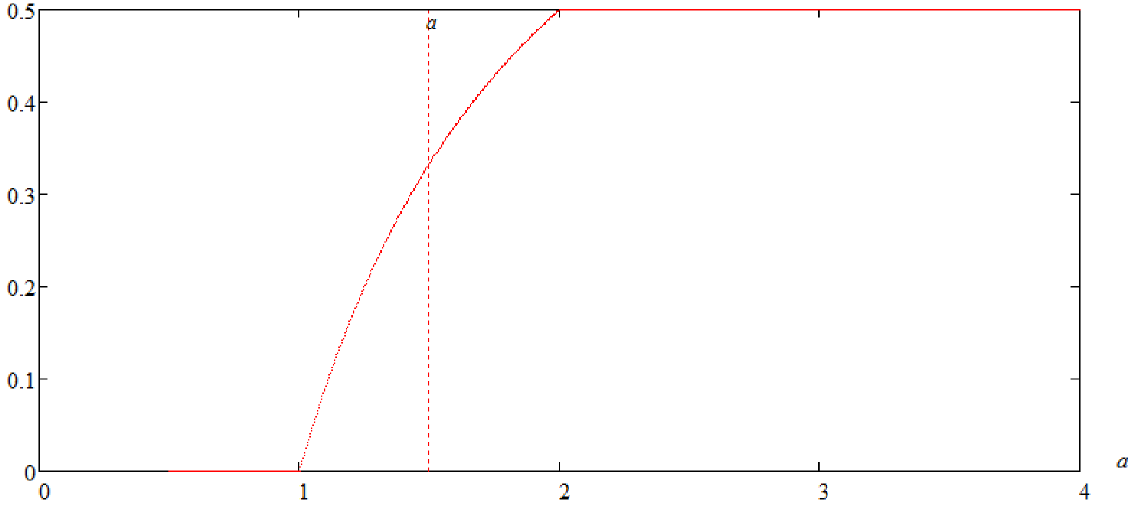


Вырождение популяций хищника (монотонное уменьшение численности). Стабилизация численности жертвы на ненулевом равновесном уровне.

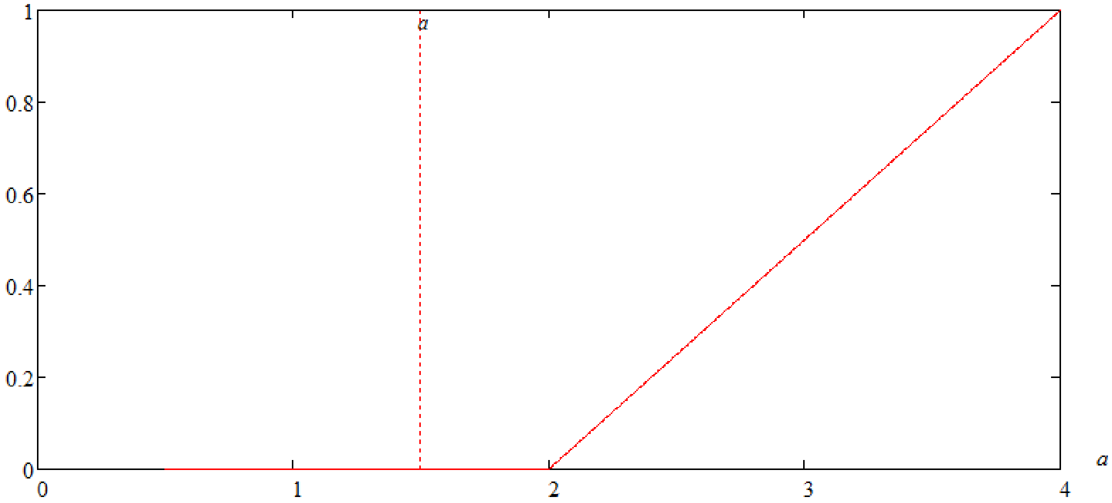
Бифуркационные диаграммы при b = 2

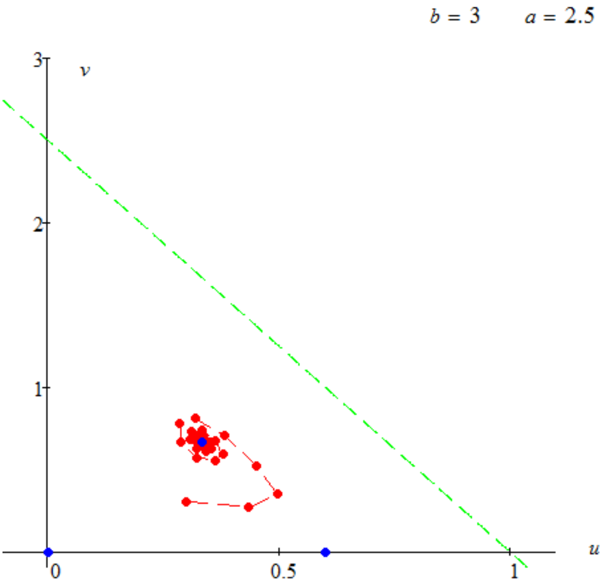
При изменении параметра a изменение аттрактора иллюстрируют бифуркационные диаграммы

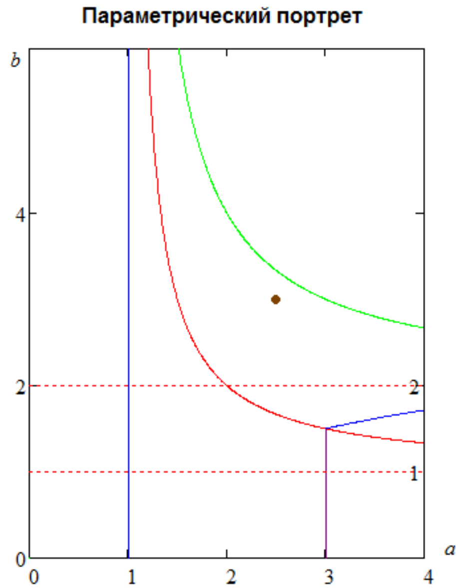
Аттракторы для «жертвы»

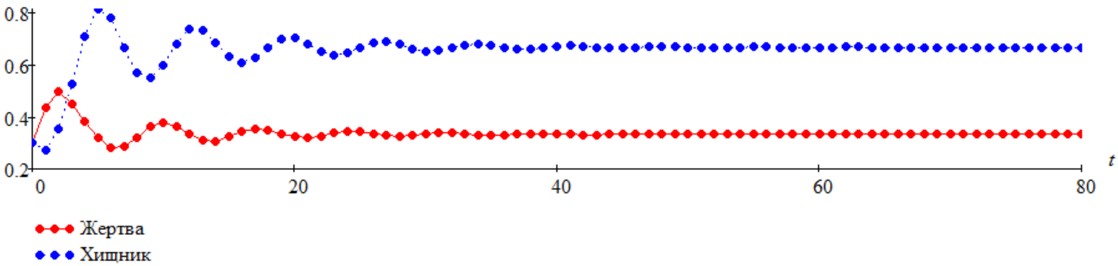


Аттракторы для «хищника»







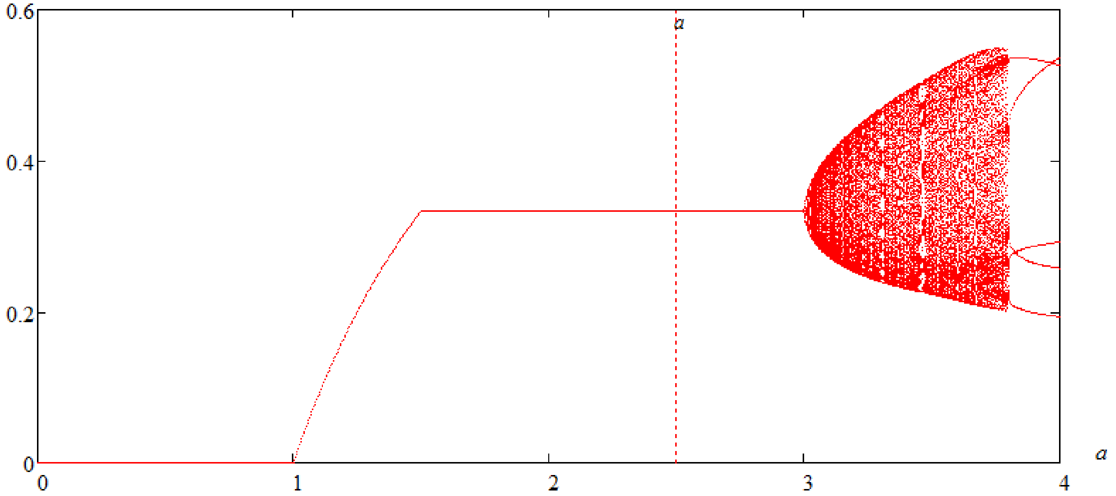


Стабилизация численности жертвы и хищника на ненулевом равновесном уровне (затухающие колебания численности).

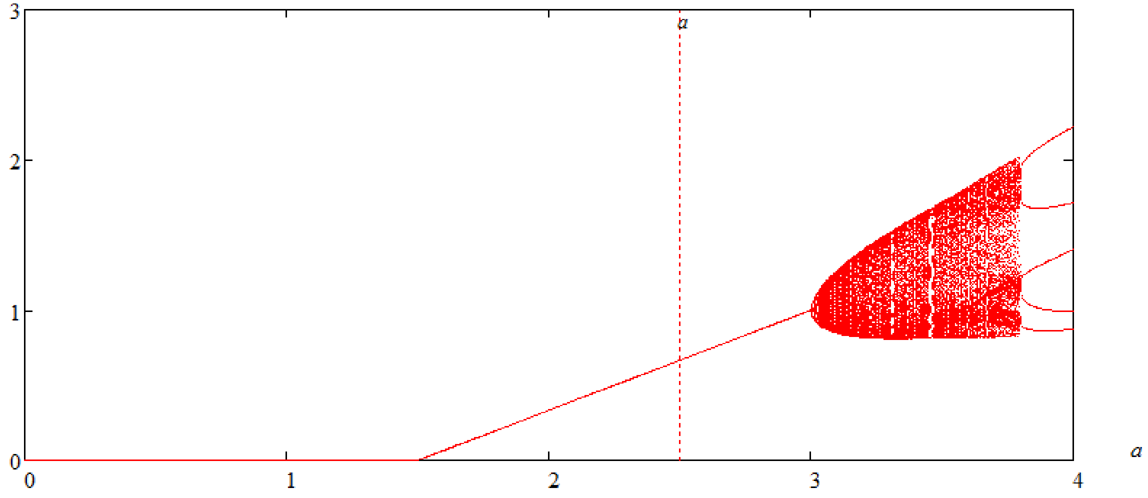
Бифуркационные диаграммы при b = 3

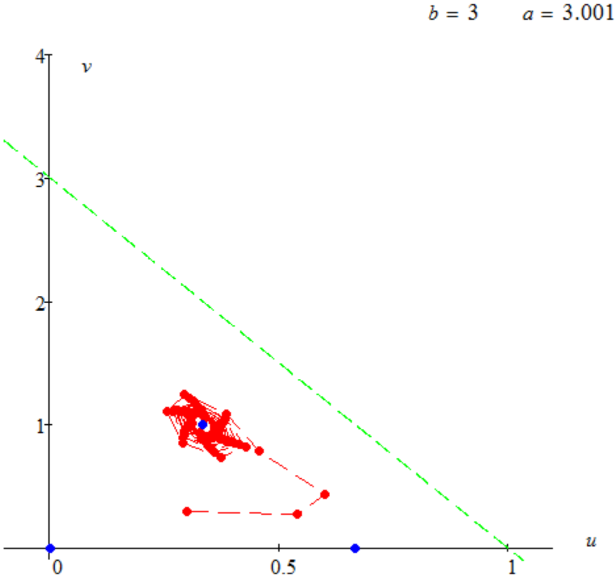
При изменении параметра a изменение аттрактора иллюстрируют бифуркационные диаграммы

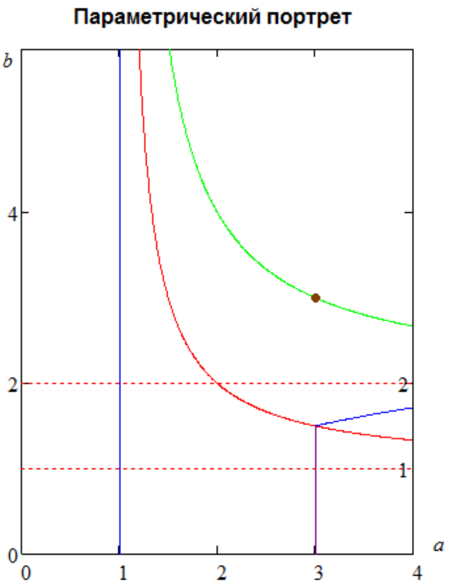
Аттракторы для «жертвы»

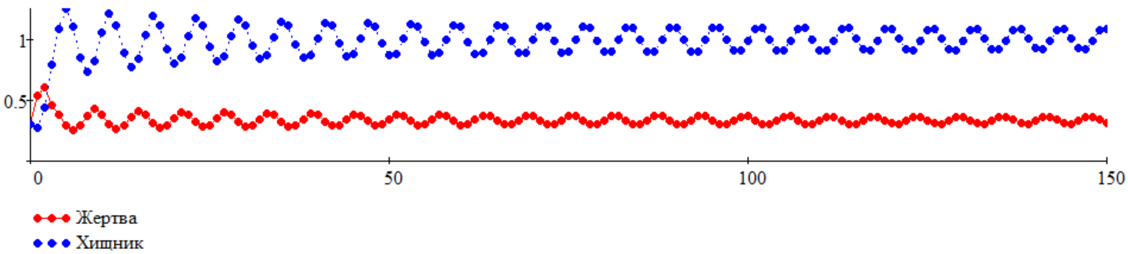


Аттракторы для «хищника»



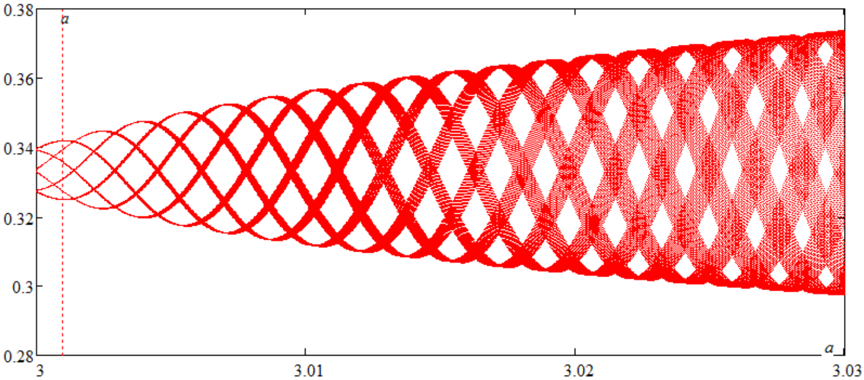


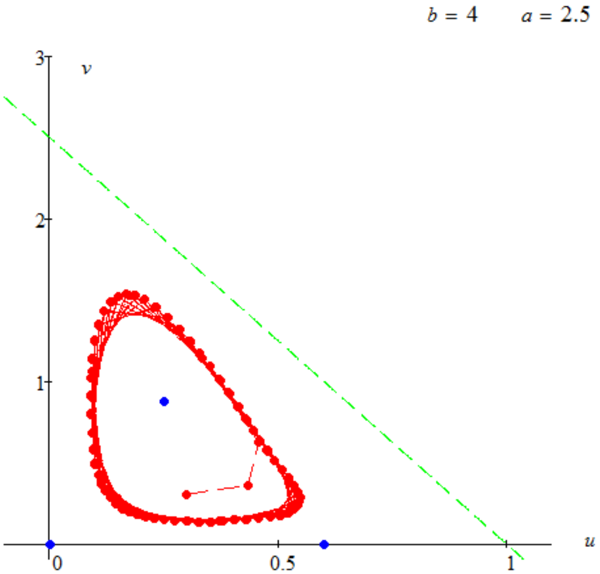


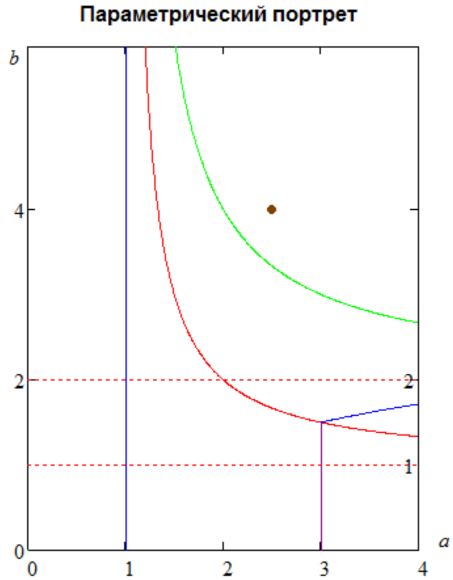


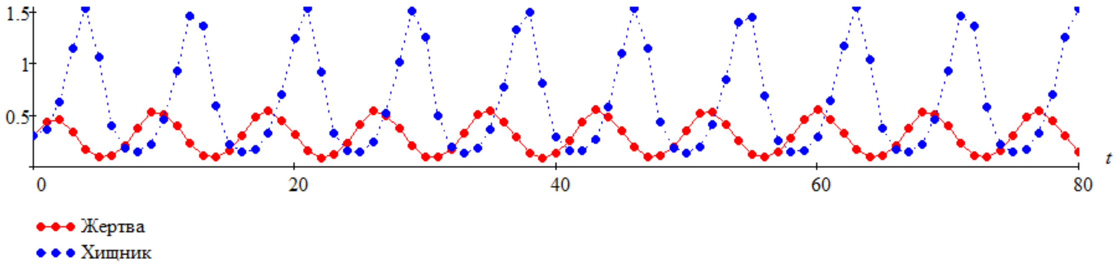
Периодические колебания численности обоих видов.

Аттракторы для «жертвы»







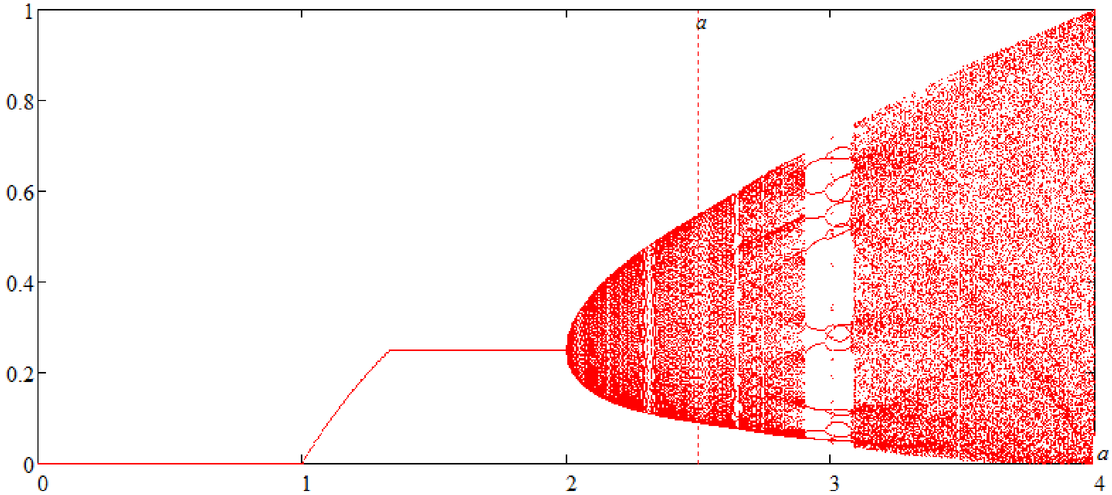


Периодические колебания численности обоих видов.

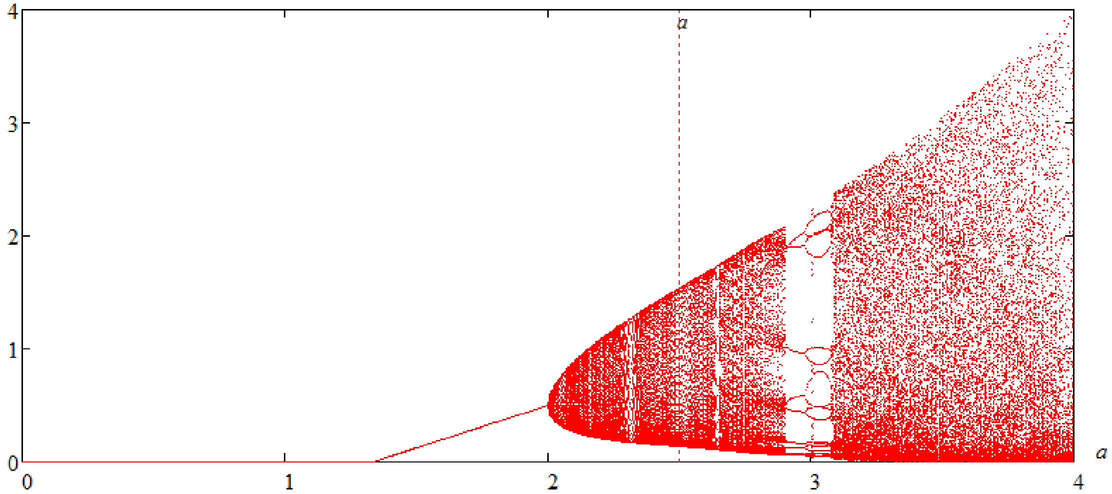
Бифуркационные диаграммы при b = 4

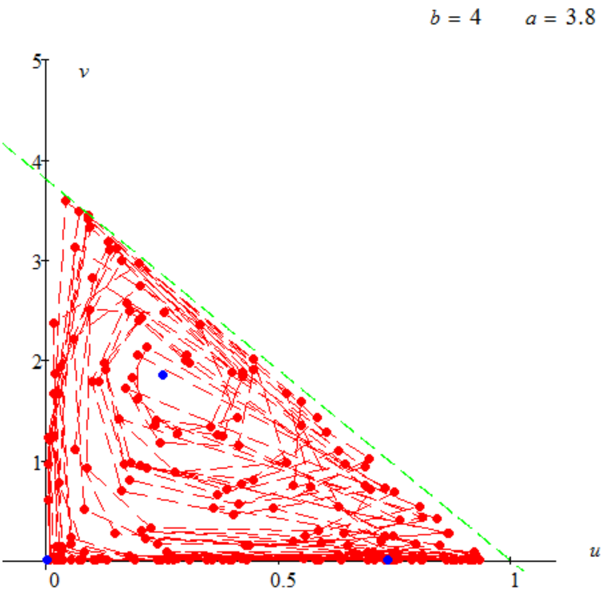
При изменении параметра a изменение аттрактора иллюстрируют бифуркационные диаграммы

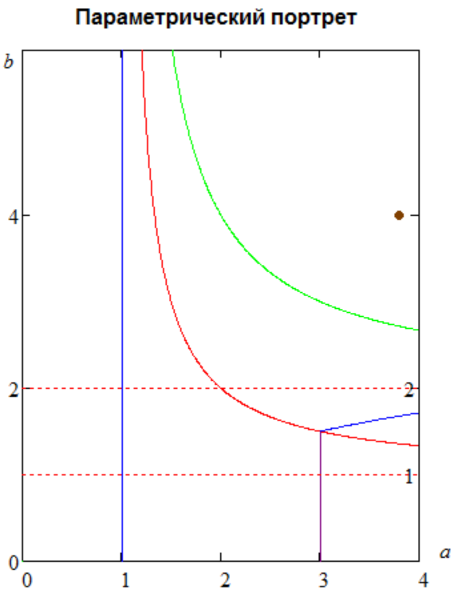
Аттракторы для «жертвы»

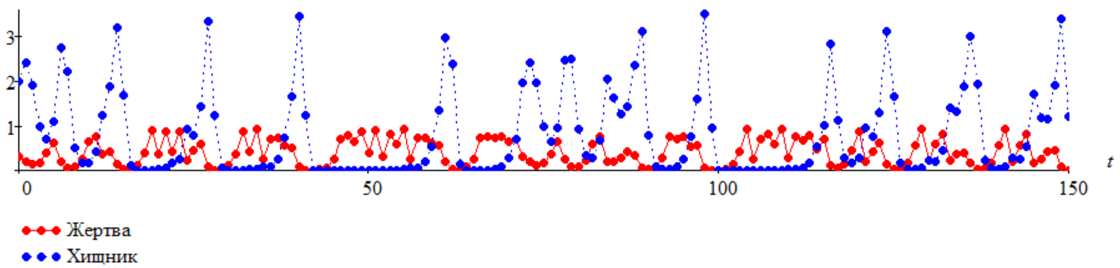


Аттракторы для «хищника»

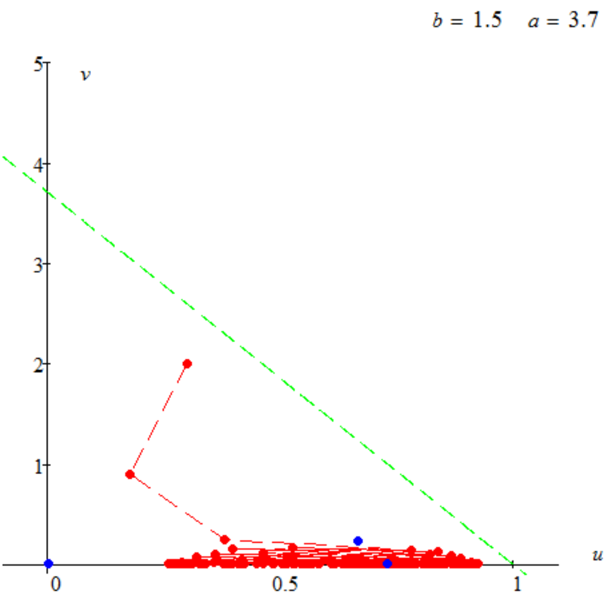


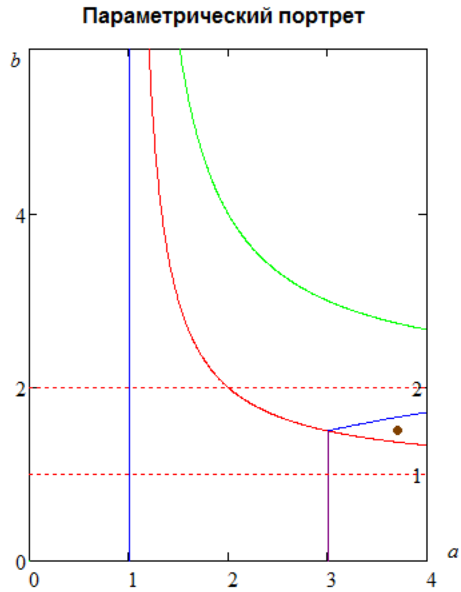


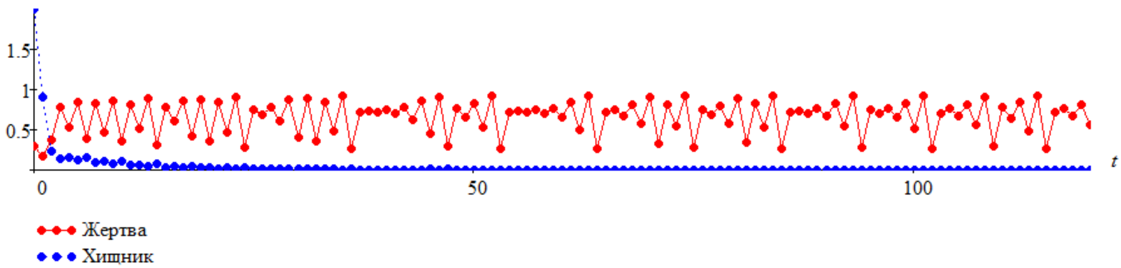




Нерегулярное изменение численности жертвы и хищника.







Вырождение популяции хищника. Нерегулярное изменение численности жертвы.