ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»

Существование и устойчивость положений равновесия

Математическая модель

$$\begin{cases} X(t+1) = A \cdot X(t) \cdot e^{-\alpha X(t) - \beta Y(t)}, \\ Y(t+1) = B \cdot Y(t) \cdot e^{\gamma X(t) - \delta Y(t)}, \\ t = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (1)$$

$X(t)$ – численность «жертвы» в момент времени t,

$Y(t)$ – численность «хищника» в момент времени t,

A, B – постоянные коэффициенты прироста «жертвы» и «хищника» соответственно без учета взаимодействия видов, причем $A > 1,\ 0 < B < 1$;

α, δ – положительные постоянные, учитывающие внутривидовую конкуренцию в популяциях «жертвы» и «хищника» соответственно;

β, γ – положительные постоянные, учитывающие межвидовые взаимодействия.

Преобразование модели

Уменьшим размерность области параметров, выполнив замену

$$\mathrm{X}(t) = \frac{1}{\alpha} x(t), \quad \mathrm{Y}(t) = \frac{1}{\delta} y(t)$$

При этом система (1) примет вид

$$\begin{cases} x(t+1) = \mathrm{A} \cdot x(t) \cdot e^{-x(t)-by(t)}, \\ y(t+1) = \mathrm{B} \cdot y(t) \cdot e^{ax(t)-y(t)}, \\ t = 0,1,2,..., \end{cases} \qquad (2)$$

где $a = \frac{\gamma}{\alpha}, \;\; b = \frac{\beta}{\delta}.$

Допустимые значения параметров модели: $\mathrm{A} > 1, \;\; 0 < \mathrm{B} < 1, \; a > 0, \; b > 0.$

Положения равновесия

Найдем положения равновесия системы (2), решая систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \mathrm{A} \cdot x e^{-x-by}, \\ y = \mathrm{B} \cdot y e^{ax-y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \mathrm{A}e^{-x-by}) = 0, \\ y(1 - \mathrm{B}e^{ax-y}) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Положения равновесия:

1) $P_0(0;\, 0)$,

2) $P_1(\ln \mathrm{A};\, 0)$,

3) $P_2(x^*;\, y^*)$, где $x^* = \dfrac{\ln \mathrm{A} - b \ln \mathrm{B}}{\Delta}$, $y^* = \dfrac{a \ln \mathrm{A} + \ln \mathrm{B}}{\Delta}$, $\Delta = 1 + ab$.

Положение равновесия P_2 имеет смысл, если $a \ln \mathrm{A} + \ln \mathrm{B} > 0$.

Система (2) имеет два положения равновесия P_0 и P_1, если $a \ln \mathrm{A} + \ln \mathrm{B} \le 0$, иначе – три: P_0, P_1 и P_2.

1) Если $a \ln \mathrm{A} + \ln \mathrm{B} = 0$, то $P_1 = P_2$.
2) Решение $(0;\, \ln \mathrm{B})$ системы (3) не является положением равновесия системы (2), так как $\ln \mathrm{B} < 0$.

Линеаризованная система

Для системы (2) в окрестности произвольного положения равновесия $\mathrm{P}(\tilde{x};\tilde{y})$ соответствующая линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \xi(t+1) = \mathrm{A}(1-\tilde{x})e^{-\tilde{x}-b\tilde{y}}\xi(t) - \mathrm{A}b\tilde{x}e^{-\tilde{x}-b\tilde{y}}\eta(t), \\ \eta(t+1) = \mathrm{B}a\tilde{y}e^{a\tilde{x}-\tilde{y}}\xi(t) + \mathrm{B}(1-\tilde{y})e^{a\tilde{x}-\tilde{y}}\eta(t), \end{cases} \quad (4)$$

где $\xi(t) = x(t) - \tilde{x}, \quad \eta(t) = y(t) - \tilde{y}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$

Положение равновесия $\mathrm{P}(\tilde{x};\tilde{y})$ системы (2) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ_i матрицы линеаризованной системы (4) удовлетворяют условию $|\lambda_i| < 1$.

Анализ на устойчивость положений равновесия

Положение равновесия $P_0\ (0;\ 0)$

Для точки P_0 система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} \xi(t+1) = A\xi(t), \\ \eta(t+1) = B\eta(t). \end{cases}$$

Для собственных значений матрицы системы имеем:

$$\lambda_1 = A > 1,\ \lambda_2 = B < 1.$$

Следовательно, положение равновесия P_0 неустойчиво при всех допустимых значений параметров системы (2).

Анализ на устойчивость положений равновесия

Положение равновесия P_1 (ln A; 0)

Для точки P_1 система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} \xi(t+1) = (1-\ln A)\xi(t) - b\ln A\,\eta(t), \\ \eta(t+1) = BA^a \eta(t). \end{cases}$$

Собственные значения матрицы системы равны:

$$\lambda_1 = 1 - \ln A, \quad \lambda_2 = BA^a.$$

Положение равновесия P_1 будет асимптотически устойчиво, если параметры A, B и a удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} |1-\ln A| < 1, \\ BA^a < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < A < e^2, \\ \ln B + a\ln A < 0. \end{cases}$$

Заметим, что, если положение равновесия P_1 асимптотически устойчиво, то в системе (2) нет* положения равновесия P_2.

* Нарушается условие существования точки P_2: $a \ln A + \ln B > 0$.

Анализ на устойчивость положений равновесия

Положение равновесия $\mathrm{P}_2\,(x^*;\,y^*)$

Для точки P_2 система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} \xi(t+1) = (1-x^*)\xi(t) - bx^*\eta(t), \\ \eta(t+1) = ay^*\xi(t) + (1-y^*)\eta(t). \end{cases}$$

Собственные значения матрицы будут корнями уравнения:

$$\lambda^2 - (\,2 - x^* - y^*)\,\lambda + 1 - x^* - y^* + \Delta x^* y^* = 0.$$

Положение равновесия P_2 будет асимптотически устойчиво, если его координаты удовлетворяют условиям*:

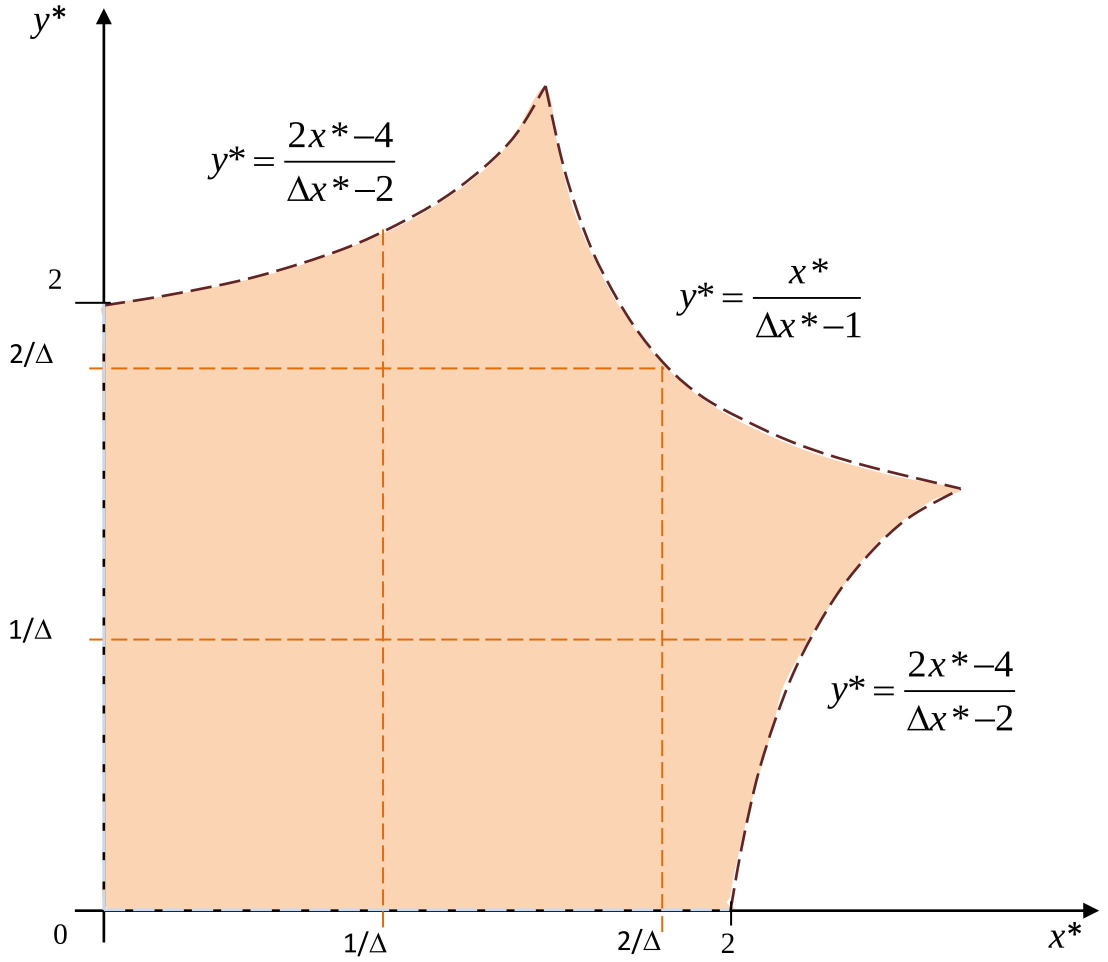
$$\begin{cases} \Delta\, y^* x^* - x^* - y^* < 0, \\ 4 - 2(x^* + y^*) + \Delta\, x^* y^* > 0. \end{cases}$$

* Все корни уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ будут по модулю меньше единицы, если коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям: $1 + a_1 + a_2 > 0,\ \ 1 - a_1 + a_2 > 0,\ \ a_2 < 1.$

Существование и устойчивость положений равновесия

Положения равновесия	Условия существования	Характер устойчивости
$P_0(0;0)$		неустойчиво
$P_1(\ln A;\ 0)$		Асимптотически устойчиво, если $a\ln B + \ln A < 0,\ \ 1 < A < e^2$
$P_2(x^*;\ y^*)$ $x^* = \dfrac{\ln A - b\ln B}{\Delta},$ $y^* = \dfrac{a\ln A + \ln B}{\Delta},$ $\Delta = 1 + ab$	$a\ln A + \ln B > 0$	Асимптотически устойчиво, если $\Delta y^* x^* - x^* - y^* < 0,$ $4 - 2(x^* + y^*) + \Delta x^* y^* > 0$

Область устойчивости $P_2(x^*;\ y^*)$



Динамика численности «жертвы» в отсутствии «хищника»

В отсутствии «хищника» ($y(\mathrm{t}) = 0 \quad \forall \mathrm{t} \geq 0$) динамика численности «жертвы» описывается моделью Риккера*:

$$x(t+1) = \mathrm{A} \cdot x(t) \cdot e^{-x(t)}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Свойства решений уравнения (5):

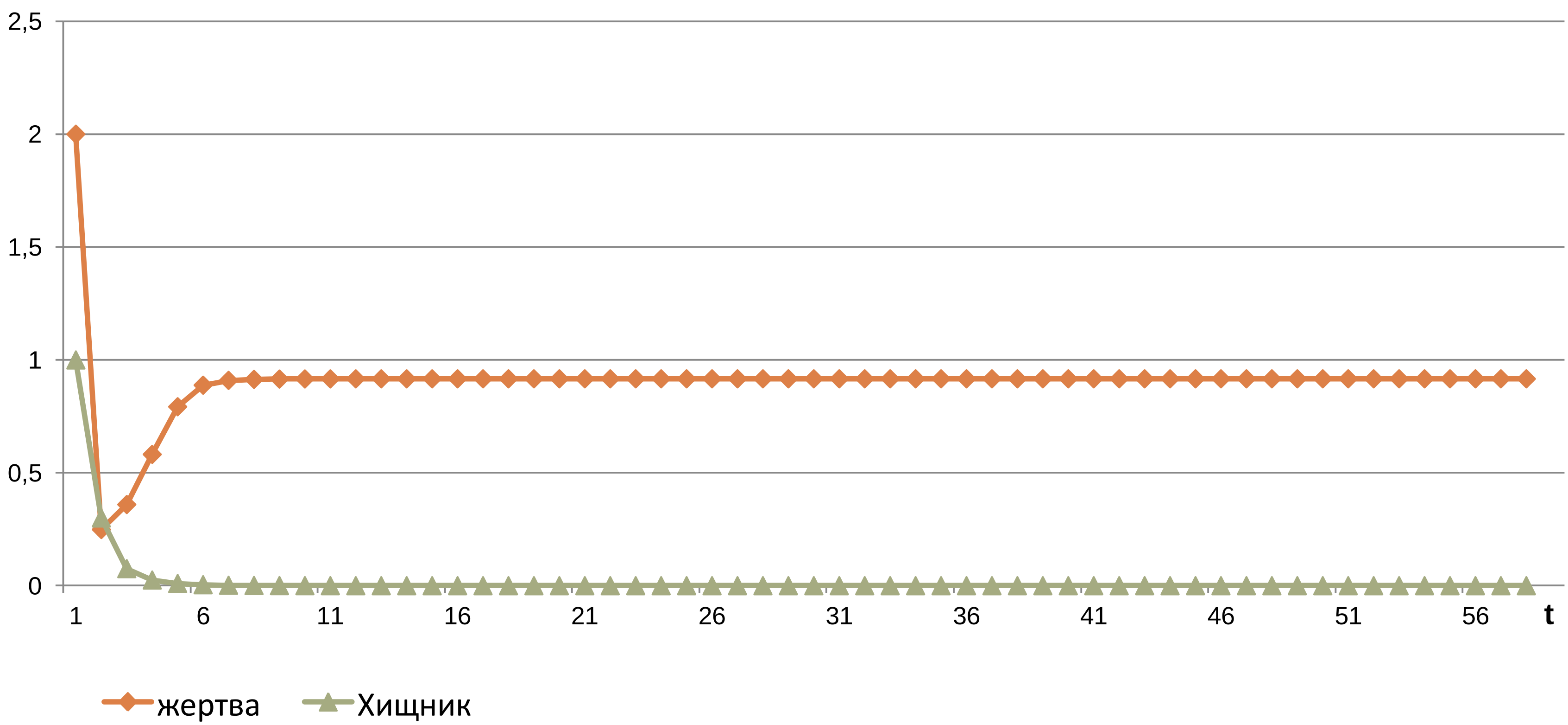
1. Существует два положения равновесия $\mathrm{P}_0(0)$ и $\mathrm{P}_1(\ln \mathrm{A})$.
2. Если $1 < \mathrm{A} \leq \mathrm{e}^2$, то положение равновесия P_1 асимптотически устойчиво.
3. Если $\mathrm{A} > \mathrm{e}^2$, то оба положения равновесия P_0 и P_1 неустойчивы, но существует цикл длины 2, который является устойчивым (притягивающим), если $\mathrm{A} \leq \mathrm{e}^{\varepsilon^*}$, где $\varepsilon^* \approx 2{,}526$.
4. Если $\mathrm{A} > \mathrm{e}^{\varepsilon^*}$, то среди решений уравнения (5) есть цикл длины 4, для которого существует критическое значение A^* параметра A такое, что при $\mathrm{A} < \mathrm{A}^*$ цикл длины 4 будет устойчивым. При дальнейшем возрастании значений параметра A встречаются устойчивые циклы длины 8, 16, … , 2^k (k – любое натуральное число).

* Подробное исследование динамики модели (5) дано в [1].

Динамика видов. Пример № 1

A	B	a	b	$x(0)$	$y(0)$
2,5	0,3	0,5	1	**2**	**1**

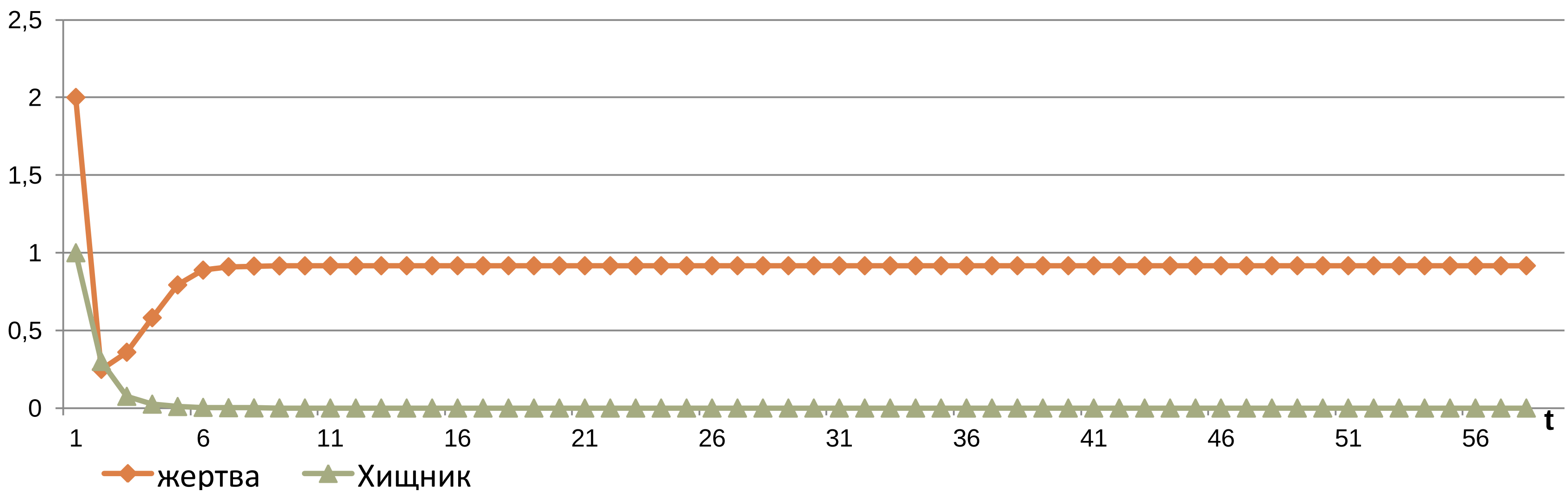
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(0,916; 0)	------
Неуст.	устойчиво	------



Динамика видов. Пример № 1

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
2,5	0,3	0,5	1	**2**	**1**

P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(0,916; 0)	------
Неуст.	устойчиво	------

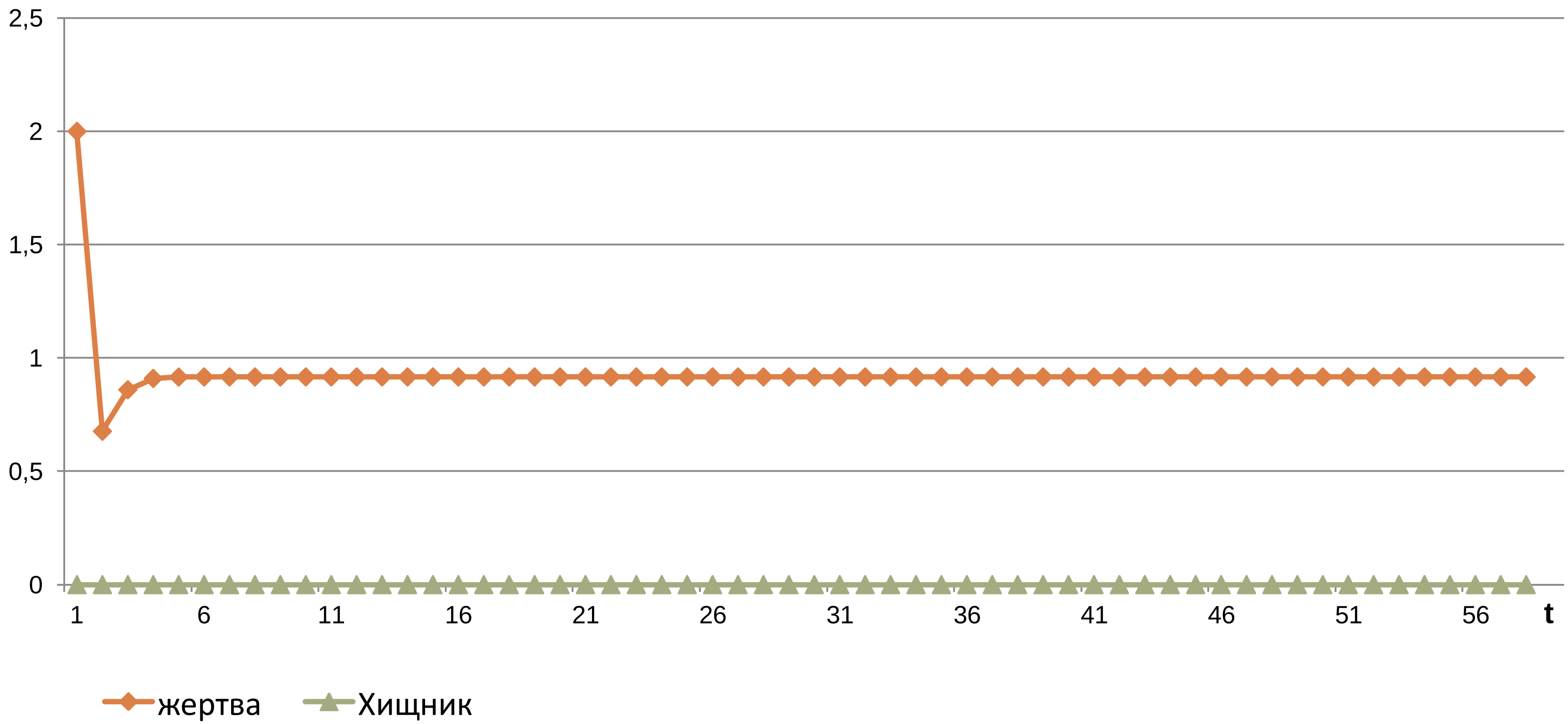


При любой ненулевой начальной численности жертвы и хищника наблюдается вырождение хищника при $t \to +\infty$. Численность жертвы стабилизируется на равновесном уровне $\ln A$ ($A < e$, монотонное затухание отклонений).

Динамика видов. Пример № 2

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
2,5	0,7	0,5	1	**2**	**0**

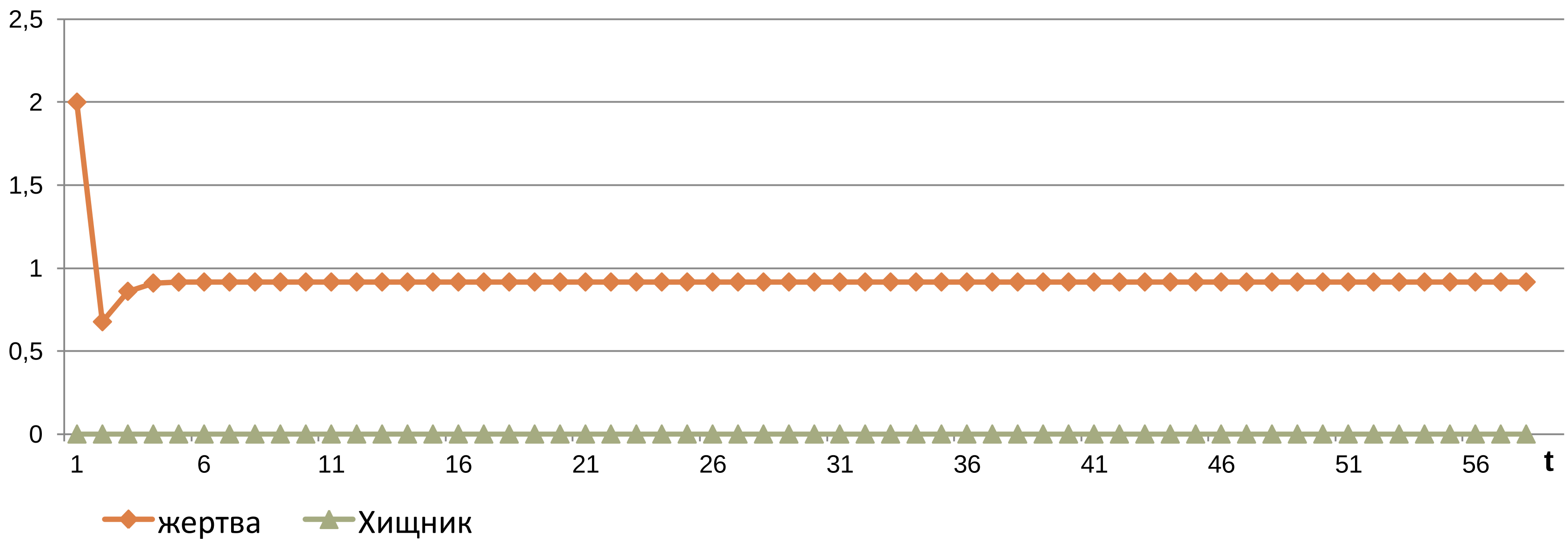
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(0,916; 0)	(0,849; 0,068)
Неуст.	Неуст.	устойчиво



Динамика видов. Пример № 2

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
2,5	0,7	0,5	1	**2**	**0**

P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(0,916; 0)	(0,849; 0,068)
Неуст.	Неуст.	устойчиво

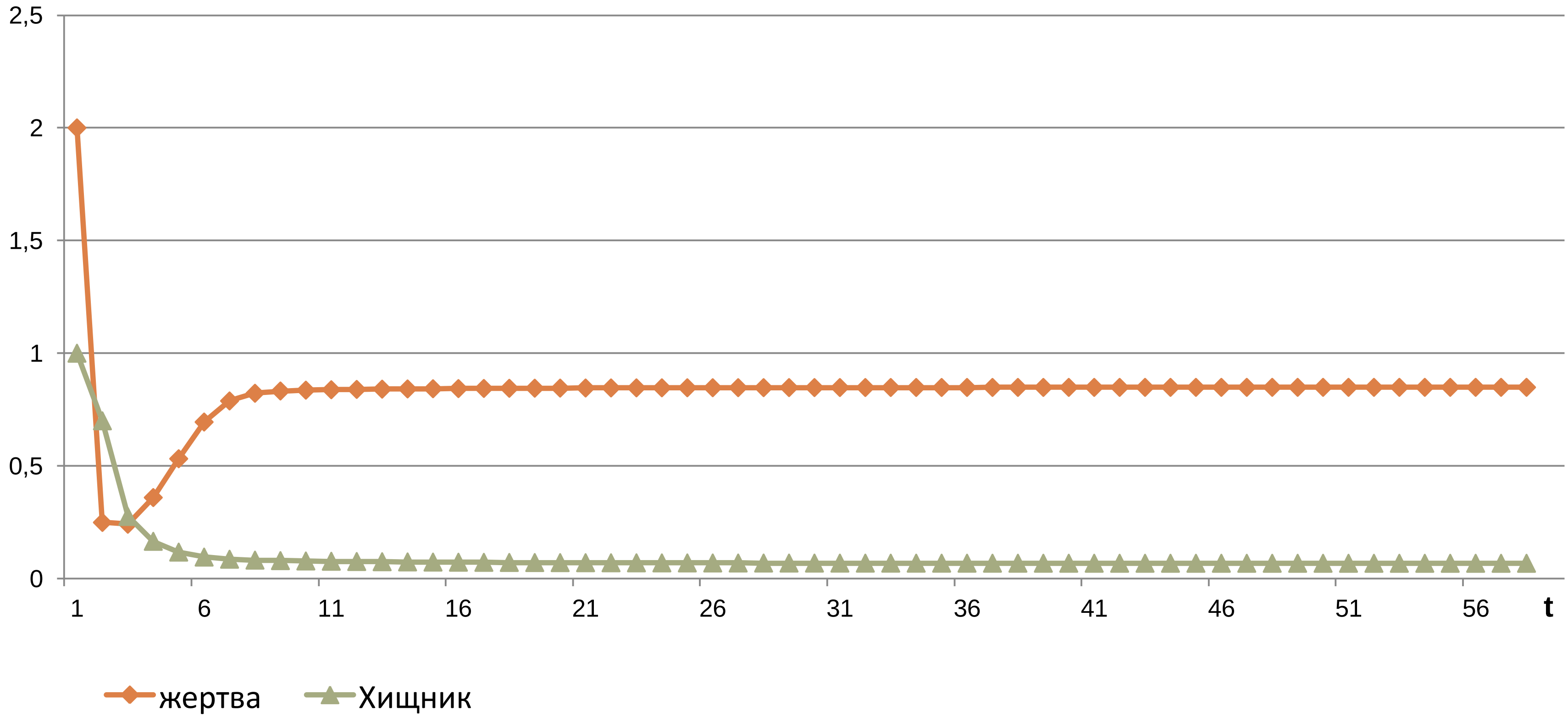


При любой ненулевой начальной численности жертвы <u>в отсутствии хищника</u> при $t \to +\infty$ численность жертвы стабилизируется на равновесном уровне $\ln A$ ($A < e$, монотонное затухание отклонений).

Динамика видов. Пример № 3

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
2,5	0,7	0,5	1	**2**	**1**

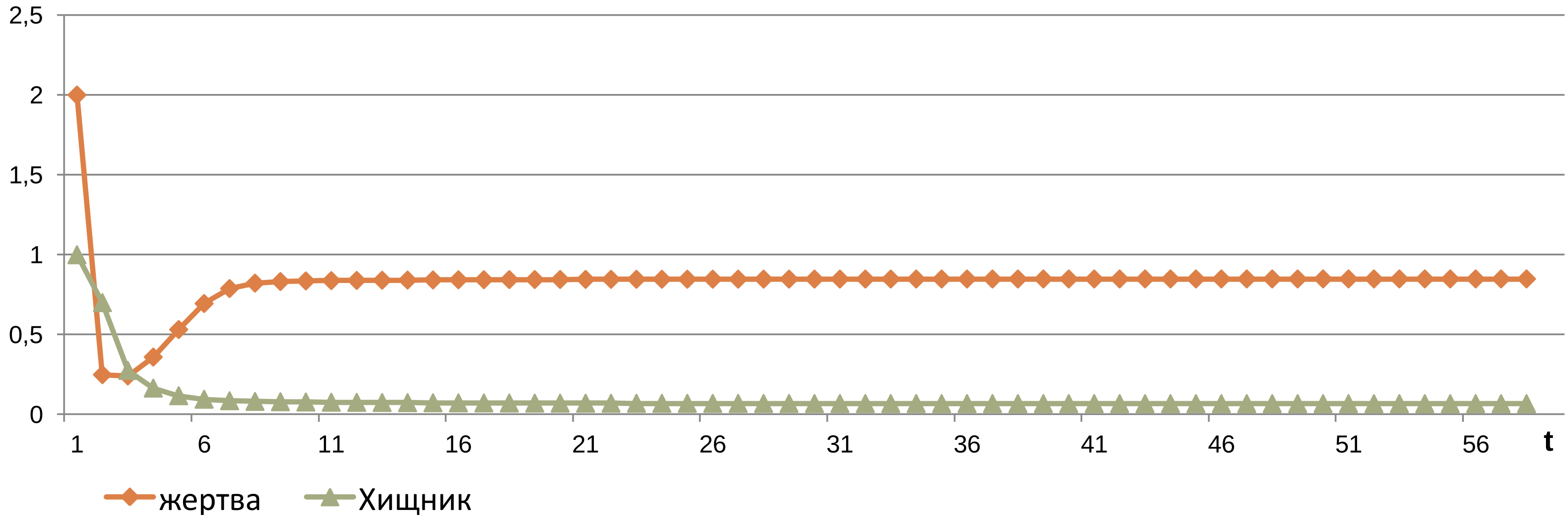
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(0,916; 0)	(0,849; 0,068)
Неуст.	Неуст.	устойчиво



Динамика видов. Пример № 3

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
2,5	0,7	0,5	1	**2**	**1**

P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(0,916; 0)	(0,849; 0,068)
Неуст.	Неуст.	устойчиво

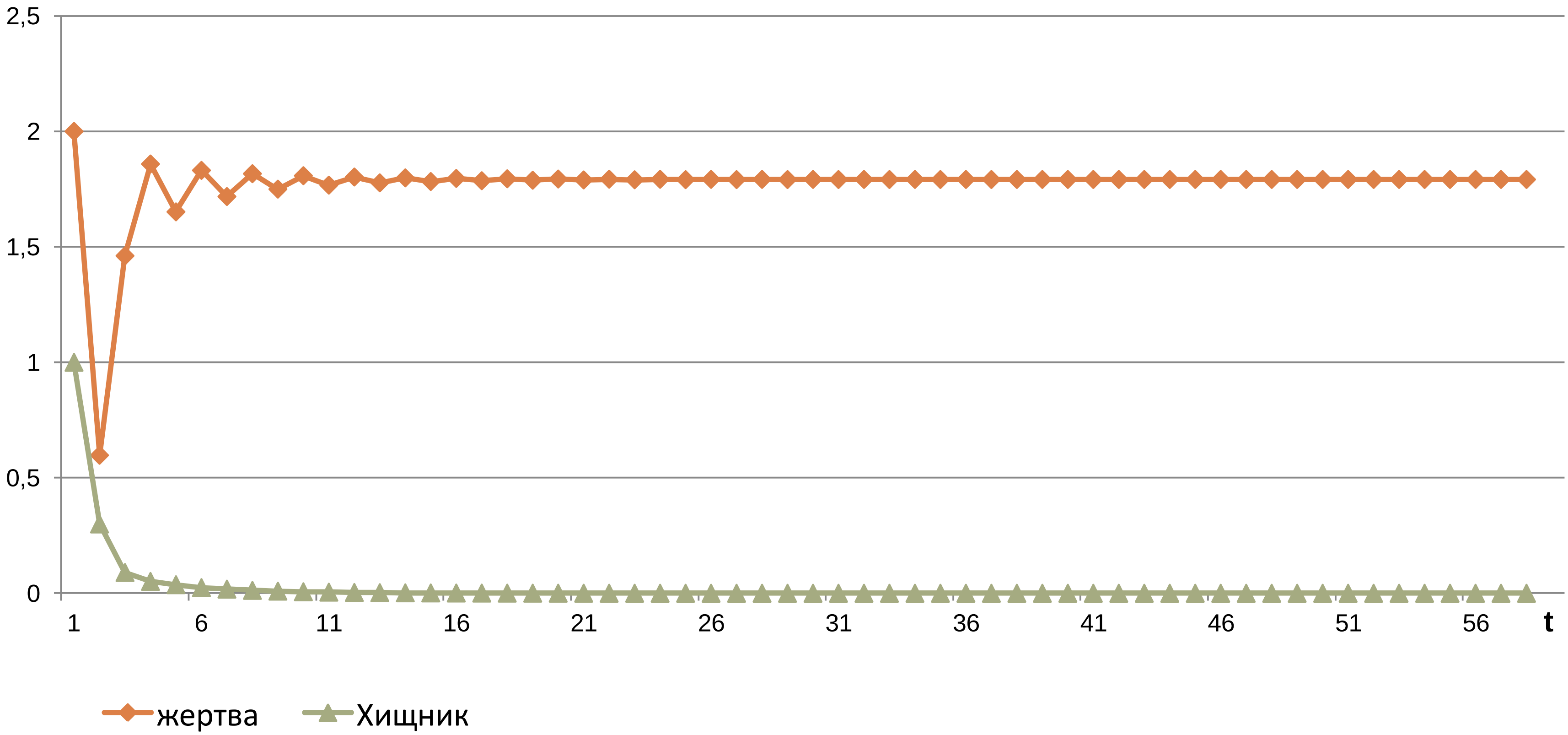


При любой ненулевой начальной численности жертвы и хищника при $t \to +\infty$ наблюдается стабилизация численности обоих видов на равновесном уровне. ($A < e$, монотонное затухание отклонений).

Динамика видов. Пример № 4

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
6	0,3	0,5	1	**2**	**1**

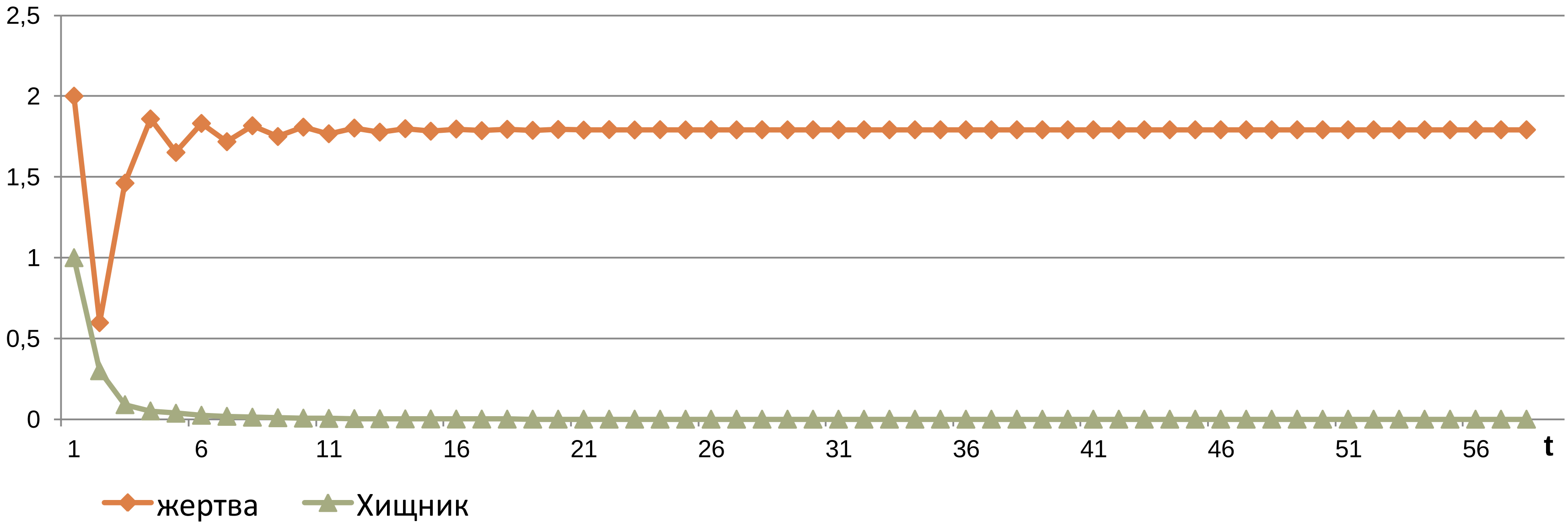
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(1,792; 0)	------
Неуст.	устойчиво	------



Динамика видов. Пример № 4

A	B	a	b	$x(0)$	$y(0)$
6	0,3	0,5	1	**2**	**1**

P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(1,792; 0)	------
Неуст.	устойчиво	------

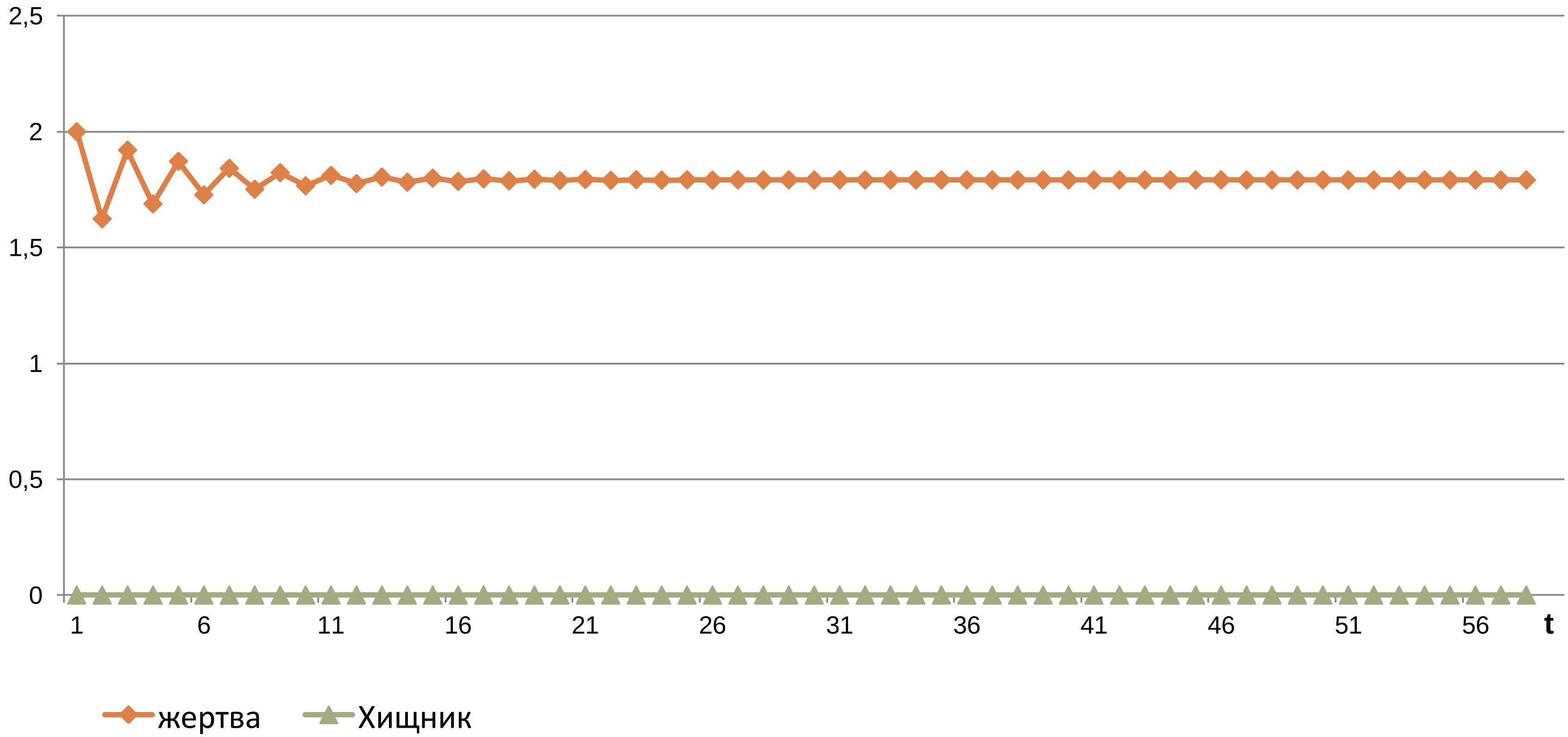


При любой ненулевой начальной численности жертвы и хищника наблюдается вырождение хищника при $t \to +\infty$. Численность жертвы стабилизируется на равновесном уровне $\ln A$ ($e < A \le e^2$, затухающие колебания).

Динамика видов. Пример № 5

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
6	0,7	0,5	1	**2**	**0**

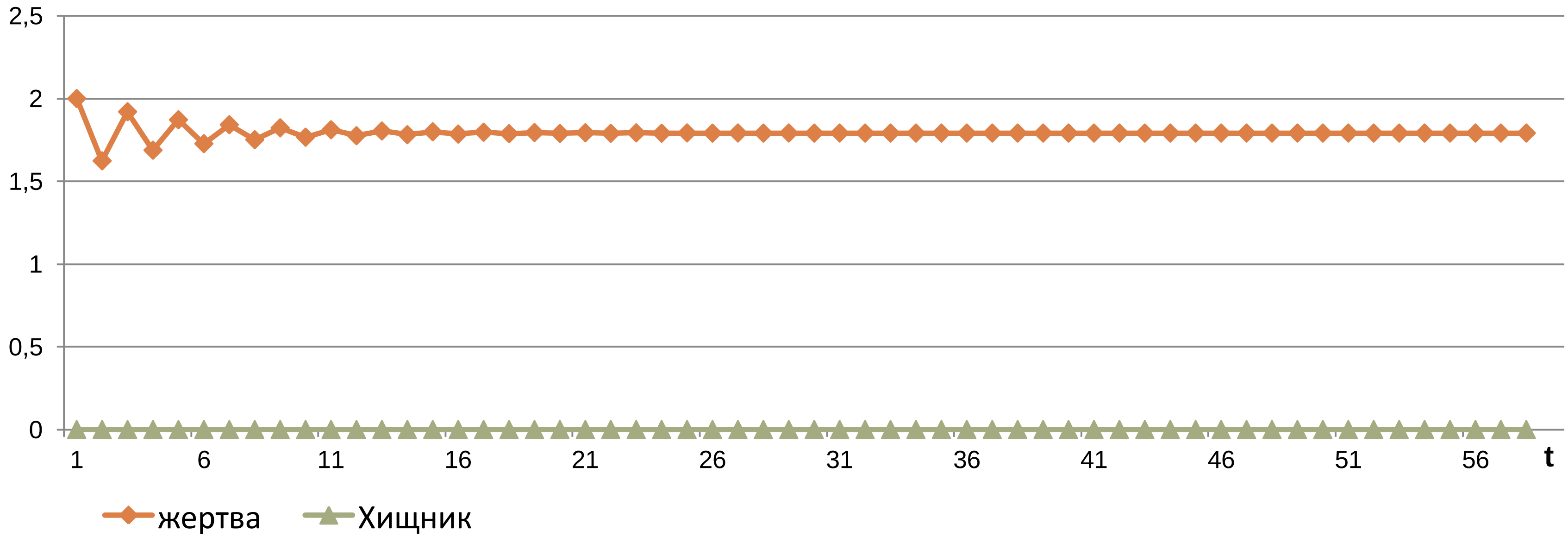
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(1,792; 0)	1,432; 0,359)
Неуст.	Неуст.	устойчиво



Динамика видов. Пример № 5

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
6	0,7	0,5	1	**2**	**0**

P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(1,792; 0)	1,432; 0,359)
Неуст.	Неуст.	устойчиво

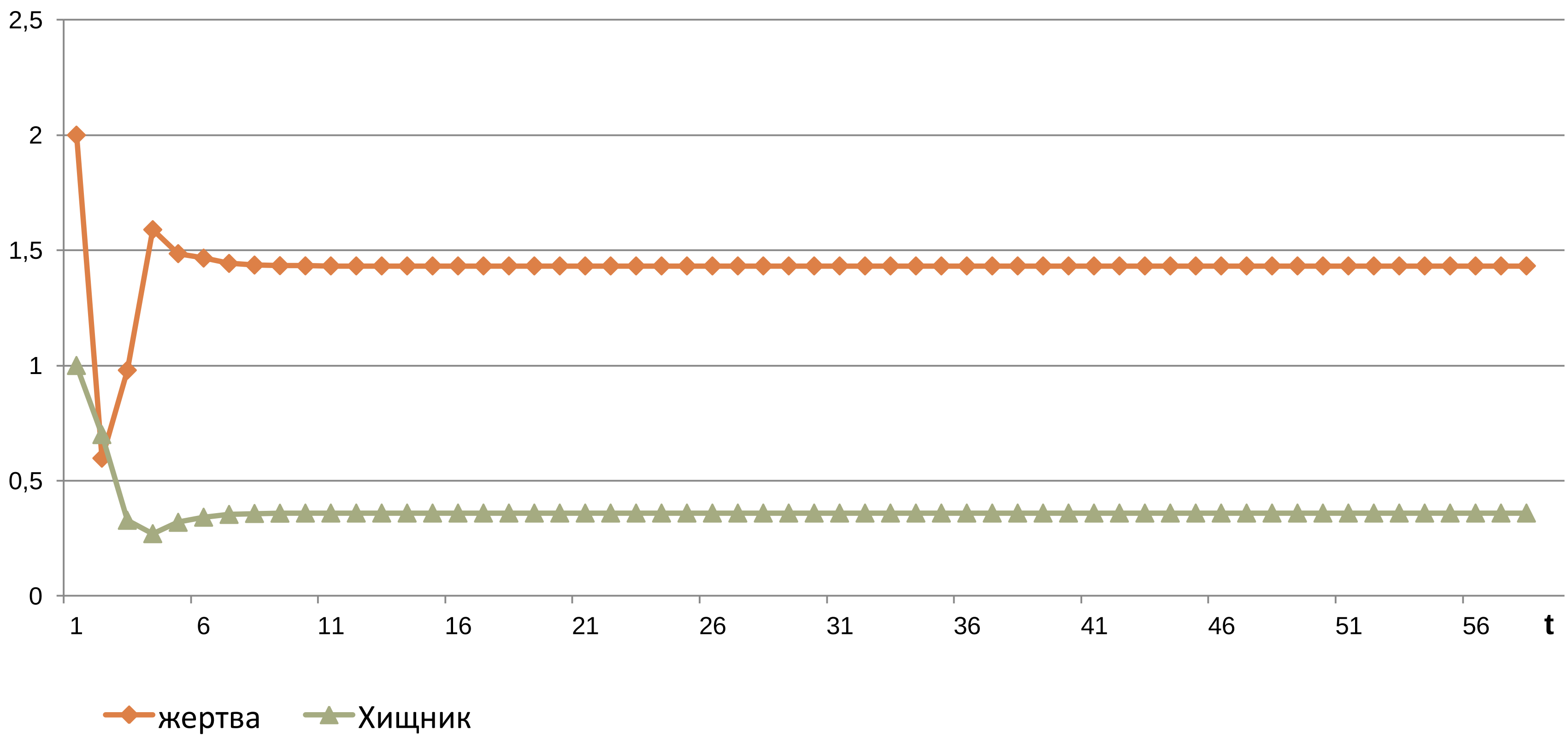


При любой ненулевой начальной численности жертвы <u>в отсутствии хищника</u> при $t \to +\infty$ численность жертвы стабилизируется на равновесном уровне $\ln A$ ($e < A \le e^2$, затухающие колебания).

Динамика видов. Пример № 6

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
6	0,7	0,5	1	**2**	**1**

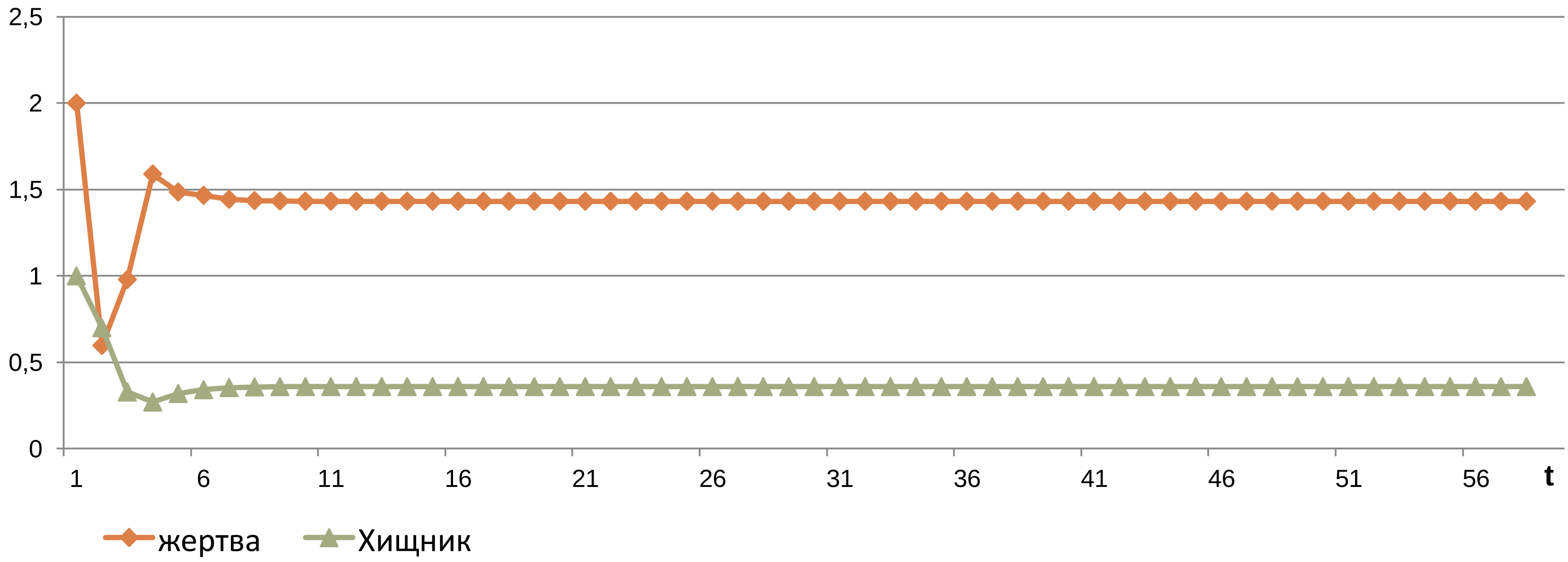
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(1,792; 0)	1,432; 0,359)
Неуст.	Неуст.	устойчиво



Динамика видов. Пример № 6

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
6	0,7	0,5	1	**2**	**1**

P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(1,792; 0)	1,432; 0,359)
Неуст.	Неуст.	устойчиво

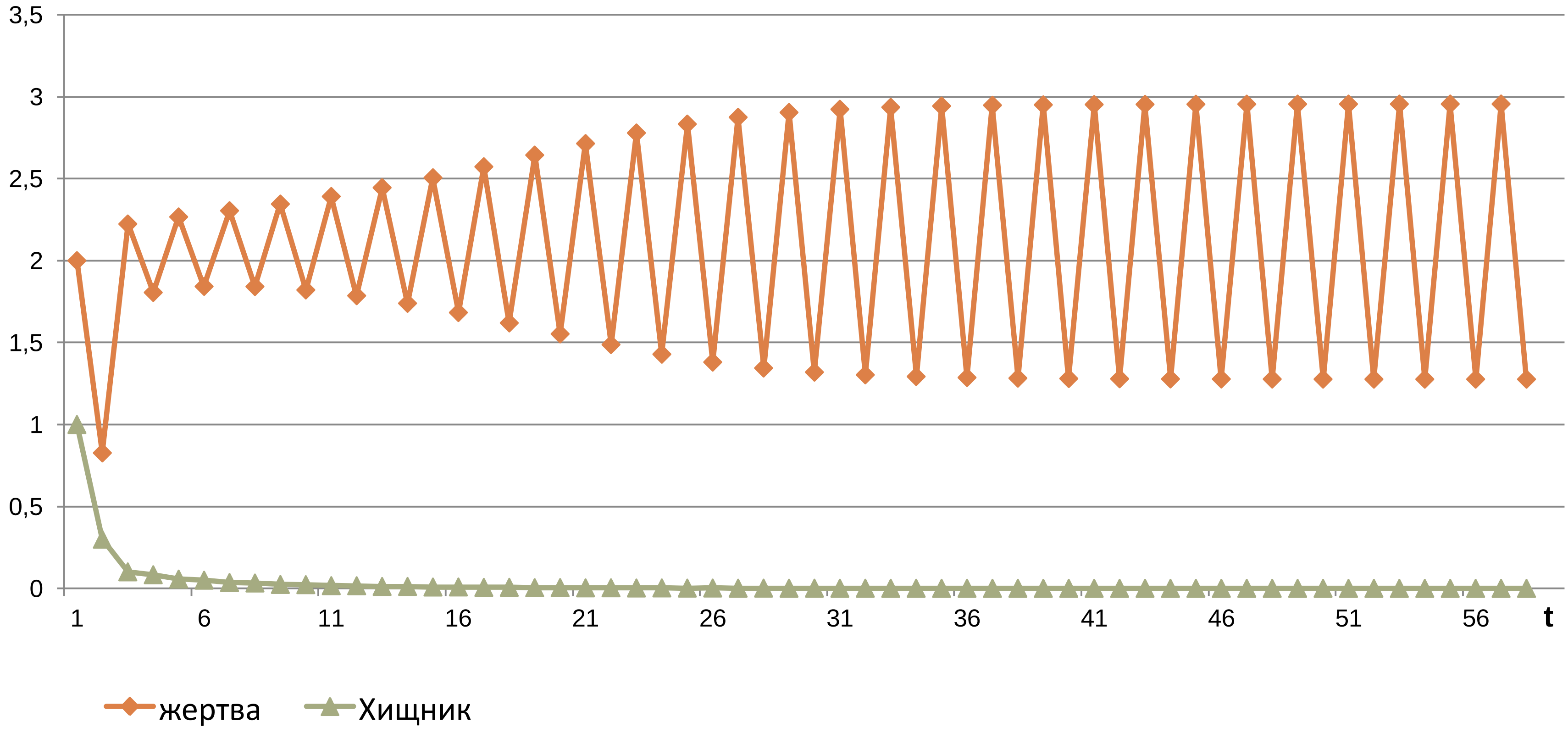


При любой ненулевой начальной численности жертвы и хищника при $t \to +\infty$ наблюдается стабилизация численности обоих видов на равновесном уровне.

Динамика видов. Пример № 7

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
8,3	0,3	0,5	1	**2**	**1**

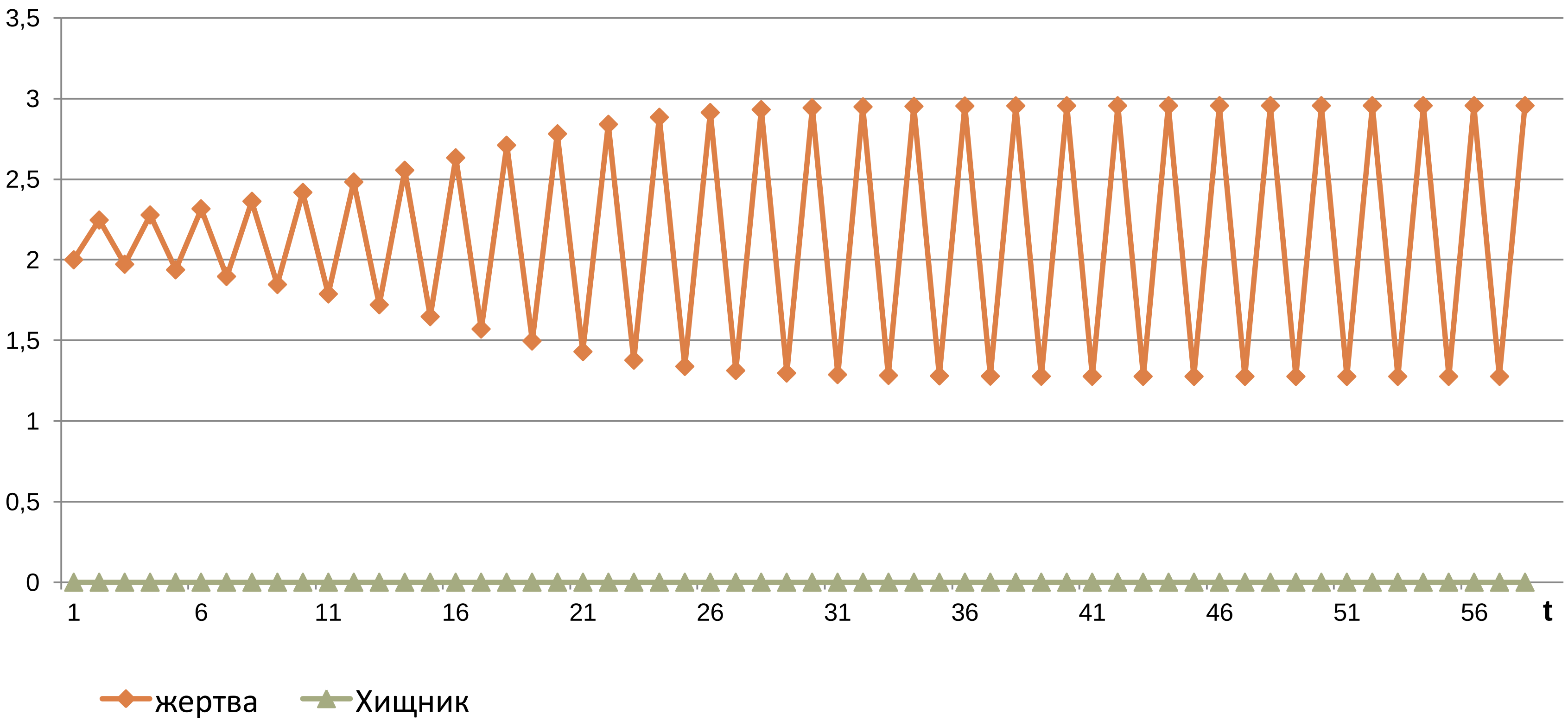
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(2,116; 0)	------
Неуст.	Неуст.	------



Динамика видов. Пример № 8

A	B	a	b	$x(0)$	$y(0)$
8,3	0,9	0,5	1	**2**	**0**

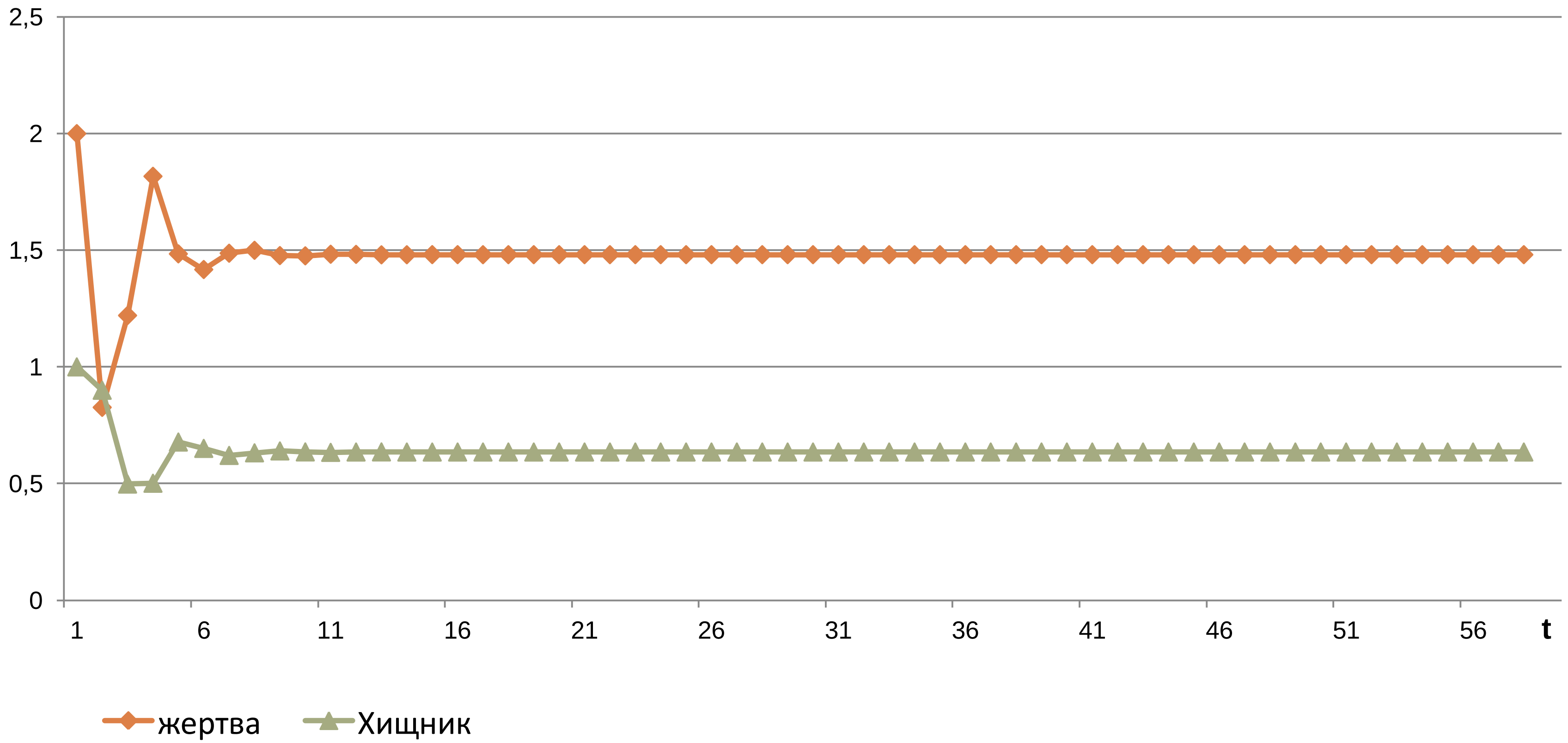
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(2,116; 0)	(1,481; 0,635)
Неуст.	Неуст.	устойчиво



Динамика видов. Пример № 9

A	B	a	b	$x(0)$	$y(0)$
8,3	0,9	0,5	1	**2**	**1**

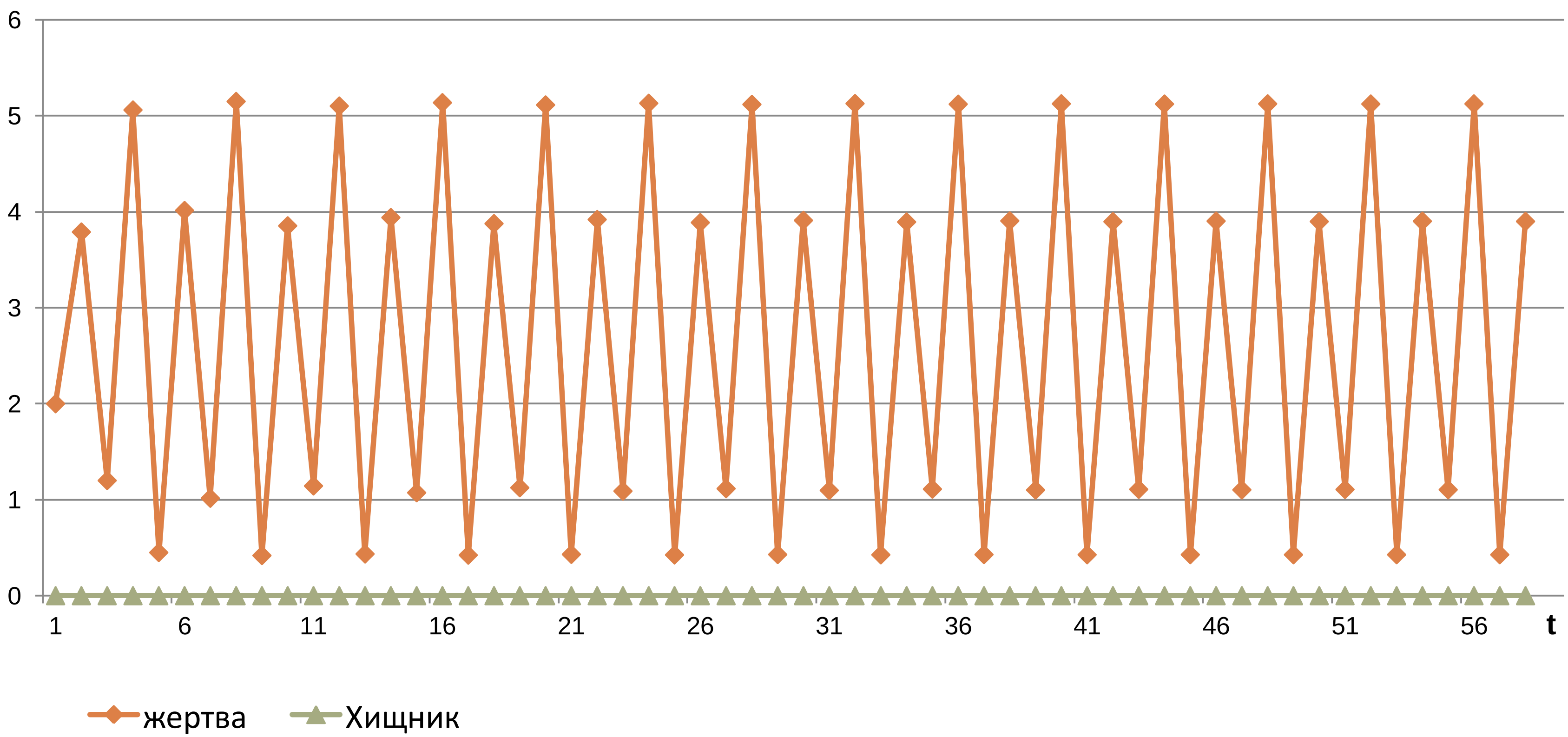
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(2,116; 0)	(1,481; 0,635)
Неуст.	Неуст.	устойчиво



Динамика видов. Пример № 10

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
14	0,2	0,5	1	**2**	**0**

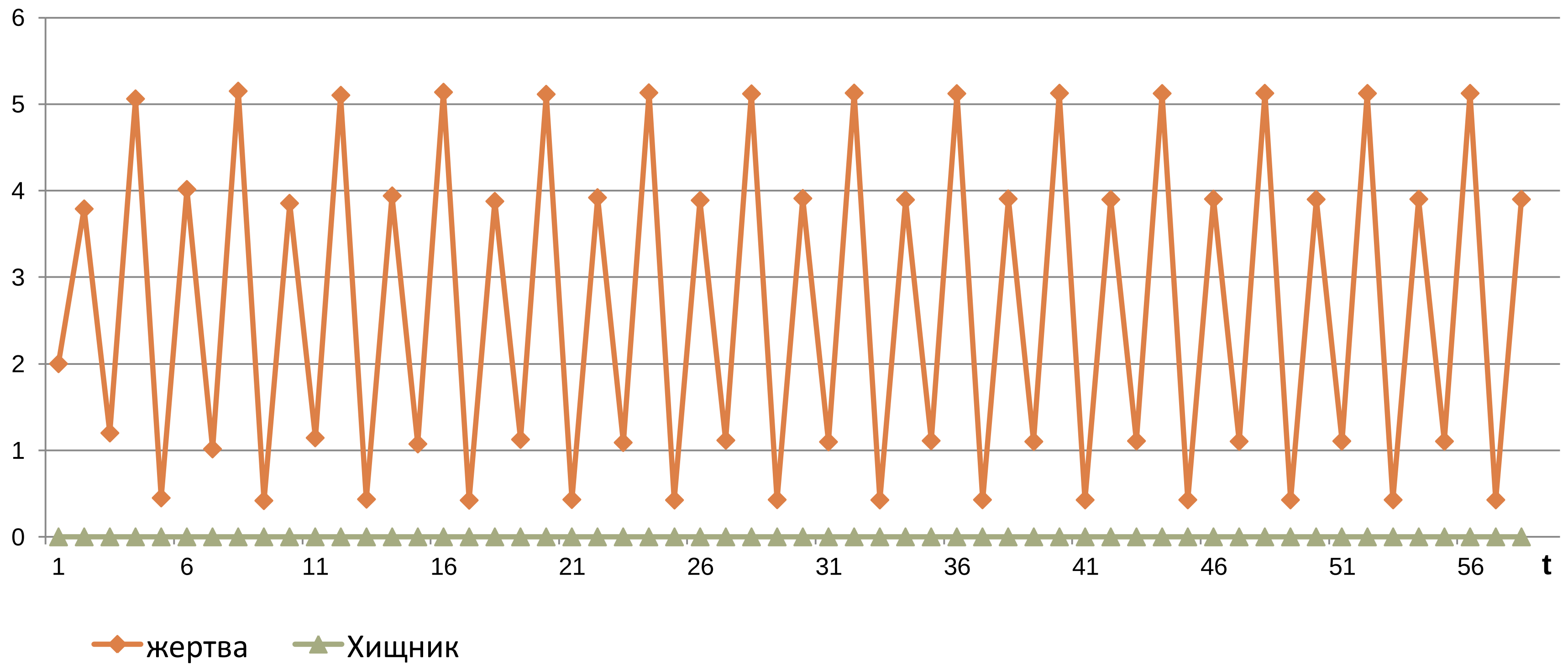
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(2,639; 0)	------
Неуст.	Неуст.	------



Динамика видов. Пример № 11

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
14	0,5	0,5	1	**2**	**0**

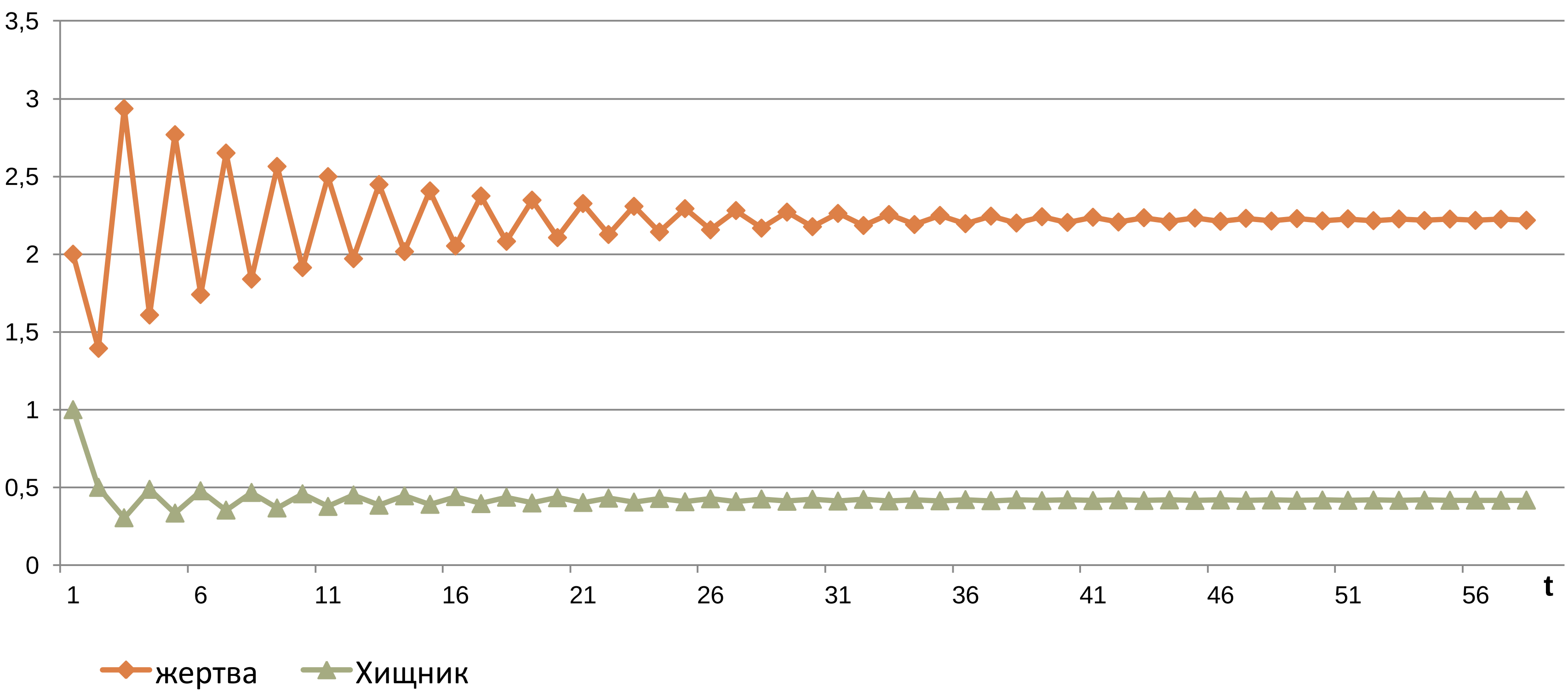
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(2,639; 0)	(2,221; 0,418)
Неуст.	Неуст.	устойчиво



Динамика видов. Пример № 12

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
14	0,5	0,5	1	**2**	**1**

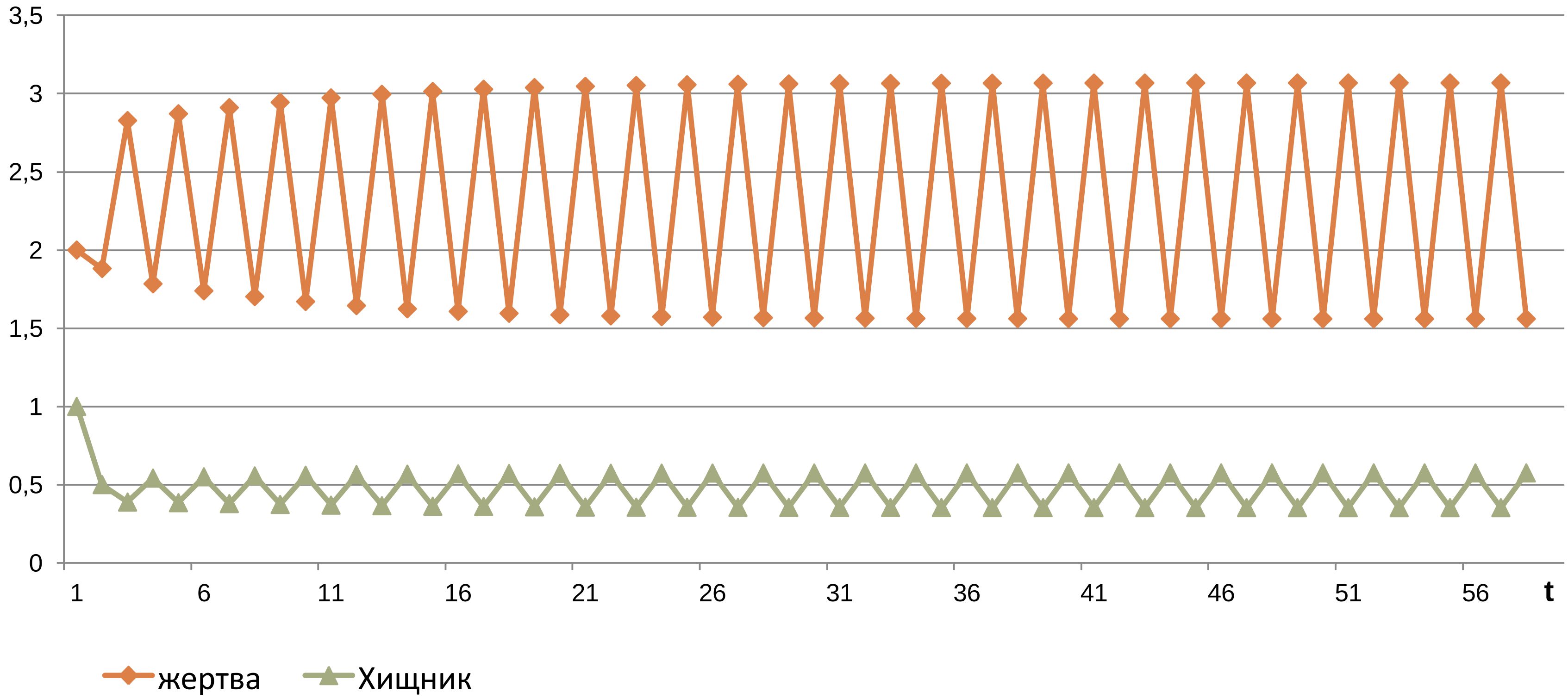
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(2,639; 0)	(2,221; 0,418)
Неуст.	Неуст.	устойчиво



Динамика видов. Пример № 13

A	B	*a*	*b*	*x*(0)	*y*(0)
14	0,5	0,5	0,7	**2**	**1**

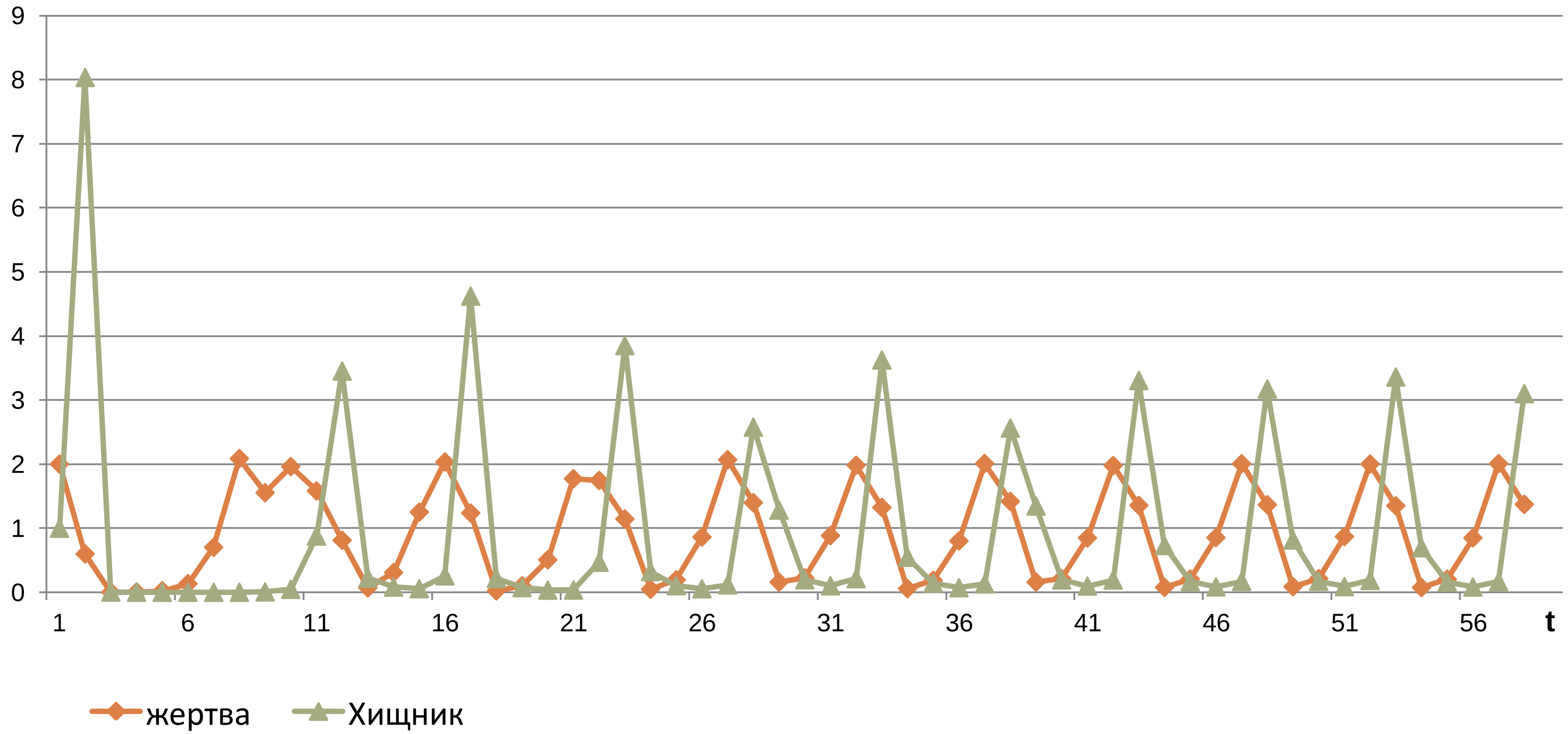
P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(2,639; 0)	(2,314; 0,464)
Неуст.	Неуст.	неустойчиво



Динамика видов. Пример № 14

A	B	a	b	$x(0)$	$y(0)$
6	0,4	2	1	**2**	**1**

P_0	P_1	P_2
(0; 0)	(1,792; 0)	(0,903; 0,889)
Неуст.	Неуст.	Неуст.



Литература

1. Якобсон М.В. О свойствах динамических систем, порождаемых отображениями вида $x \to \mathrm{A}x\mathrm{e}^{-\beta x}$ / Моделирование биологических сообществ. Владивосток, 1975, с. 141 –162.
2. Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983.