Математические методы в экологии: Сборник задач и упражнений / Сост. Е.Е. Семенова, Е.В. Кудрявцева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2005.

Модель «хищник-жертва» Лотки-Вольтерры

№ 86 (построение уравнения для нахождения максимальной численности жертвы в общем виде)

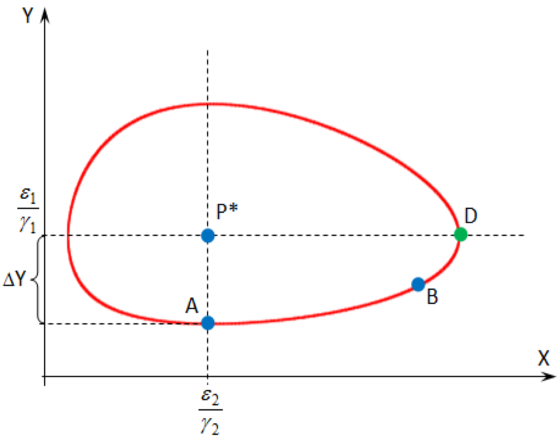
Динамика численности хищника Y(t) и жертвы X(t) описывается системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 Y)X, \\ \dfrac{dY}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 X)Y \end{cases} \qquad (1)$$

Первый интеграл системы (1)

$$\varepsilon_1 \ln Y + \varepsilon_2 \ln X - \gamma_1 Y - \gamma_2 X = C \qquad (2)$$

описывает семейство фазовых траекторий системы (1), соответствующих ненулевым начальным условиям.



$P^*=(X^*, Y^*)$, $A=(X^*, Y_1)$, $B=(X_2, Y_2)$, $D=(X_{max}, Y^*)$

Дано: X^*, Y^*, ΔY, X_2, Y_2

Найти: X_{max}

Точки A, B и D лежат на одной фазовой траектории. Следовательно, их координаты удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \ln Y_1 + \varepsilon_2 \ln X^* - \gamma_1 Y_1 - \gamma_2 X^* = C, \\ \varepsilon_1 \ln Y_2 + \varepsilon_2 \ln X_2 - \gamma_1 Y_2 - \gamma_2 X_2 = C, \\ \varepsilon_1 \ln Y^* + \varepsilon_2 \ln X_{\max} - \gamma_1 Y^* - \gamma_2 X_{\max} = C. \end{cases} \tag{3}$$

Так как $X^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$, $Y^* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$, то, решая систему (3), построим уравнение для нахождения X_{max}:

$$\frac{X^* \ln \dfrac{X_{\max}}{X^*} - X_{\max} + X^*}{X^* \ln \dfrac{X_2}{X^*} - X_2 + X^*} = \frac{Y^* \ln \dfrac{Y_1}{Y^*} - Y_1 + Y^*}{Y^* \ln \dfrac{Y_1}{Y_2} - Y_1 + Y_2}. \tag{4}$$

Заметим, что, решая уравнение (4), можно найти не только максимальную, но и минимальную численность жертвы.

Домашнее задание

№ 86 – численное решение задачи. При решении уравнения (4) следует учитывать, что $X_{max} > X^*$.

$X^* = 75\,000$, $Y^* = 100\,000$, $\Delta Y = 50\,000$, $X_2 = 112\,500$, $Y_2 = 80\,000$