Математические методы в экологии: Сборник задач и упражнений / Сост. Е.Е. Семенова, Е.В. Кудрявцева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2005.

23.04.2020

Занятие № 18. Качественный анализ модели конкурентного взаимодействия двух «видов-близнецов»

Тема 5.2. № 81

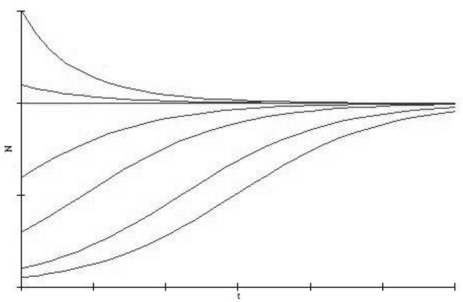
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\varepsilon - \alpha x - \beta y)\,x, \\ \dfrac{dy}{dt} = (\varepsilon - \beta x - \alpha y)\,y \end{cases} \qquad (1)$$

Обсуждаемые вопросы и задания:

1. Как изменяется численность первого вида в отсутствии второго?

Свойства решений логистического уравнения $\dfrac{dx}{dt} = (\varepsilon - \alpha x)\,x$

При любой ненулевой начальной численности происходит стабилизация численности на равновесном уровне ε/α.



2. Докажите, что, если $x(0)\begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix}y(0)$, то $x(\tau)\begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix}y(\tau) \quad \forall \tau \ge 0.$

Для функции $z(t) = x(t) - y(t)$ имеем

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon z - \alpha z(x+y), \qquad z(t) = Ce^{\varepsilon t - \alpha \int_0^t (x(\xi)+y(\xi))d\xi}.$$

Так как $C = z(0)$, то

$$z(0) \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(t) \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} 0.$$

3. **Уменьшение размерности области параметров**.

   С помощью преобразования (масштабирование)

$$x = \frac{\varepsilon}{\alpha} u, \quad y = \frac{\varepsilon}{\alpha} v, \quad t = \frac{1}{\varepsilon}\tau$$

   система (1) приводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = (1 - u - Bv)u, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = (1 - v - Bu)v, \end{cases}$$

   где $B = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

4. **Существование и устойчивость положений равновесия**

   1) Поиск положений равновесия $\Leftrightarrow$ поиск неотрицательных решений системы:

$$\begin{cases} \left(1 - u - Bv\right) u = 0, \\ \left(1 - Bu - v\right) v = 0. \end{cases}$$

   А) если $B \neq 1$: $P_0(0;0)$, $P_1(1;0)$, $P_2(0;1)$, $P_3\left(\frac{1}{B+1}, \frac{1}{B+1}\right)$;

   Б) если $B=1$: $\left\{(u;1-u),\ u \in [0;1]\right\} \cup \left\{(0;0)\right\}$.

2) Линеаризованная система в окрестности точки $P(u^*, v^*)$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = (1 - 2u^* - Bv^*)\xi - Bu^*\eta, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = -Bv^*\xi + (1 - Bu^* - 2v^*)\eta. \end{cases} \qquad (2)$$

Асимптотическая устойчивость положения равновесия $P(u^*, v^*) \Leftrightarrow$ асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия линеаризованной системы в окрестности точки $P(u^*, v^*)$.

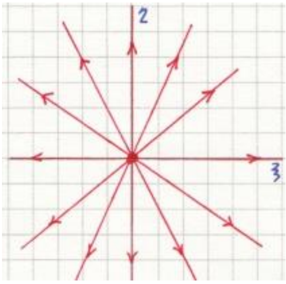
$P(u^*, v^*)$ – асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ_i матрицы системы (2) имеют отрицательную вещественную часть.

	Матрица линеаризованной системы	λ_i	$B > 1$	$B < 1$	$B = 1$
$P_0(0;\,0)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1=\lambda_2=1$	Неустойчивый узел		
$P_1(1;0)$	$\begin{pmatrix} -1 & -B \\ 0 & 1-B \end{pmatrix}$	$\lambda_1= -1$, $\lambda_2= 1-B$	Устойчивый узел	седло	
$P_2(0;\,1)$	$\begin{pmatrix} 1-B & 0 \\ -B & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1= -1$, $\lambda_2= 1-B$	Устойчивый узел	седло	
$P_3(\frac{1}{B+1};\frac{1}{B+1})$ $u^*=v^*=\frac{1}{B+1}$	$\begin{pmatrix} -u^* & -Bu^* \\ -Bu^* & -u^* \end{pmatrix}$	$\lambda_1= u^*(B-1)$, $\lambda_2= -u^*(B+1)$	седло	Устойчи-вый узел	

5. Построение фазовых портретов линеаризованных систем

1) Построение фазового портрета линеаризованной системы в окрестности точки P_0

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \xi, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = \eta \end{cases}$$



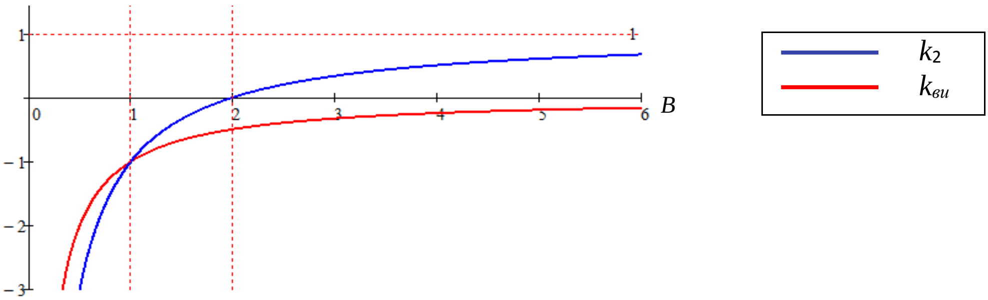
Семейство фазовых траекторий описывает уравнение $\eta = C\xi$, $\forall C$. Точка P0 - дикритический узел.

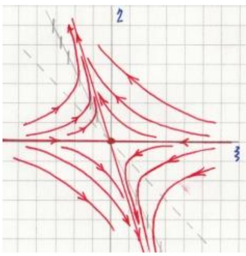
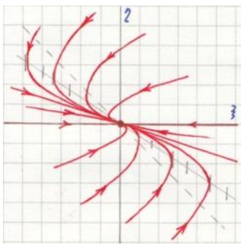
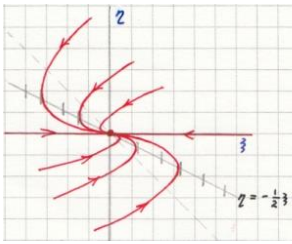
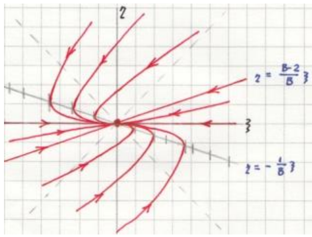
2) Построение фазового портрета линеаризованной системы в окрестности точки $P_1(1,0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = -\xi - B\eta, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = (1-B)\eta. \end{cases}$$

Главные изоклины		Уравнения прямых $\eta = k\xi$ (сепаратрисы для седла)
вертикальная	горизонтальная	
$\eta = -\frac{1}{B}\xi$, $k_{ви} = -\frac{1}{B}$,	$\eta = 0$	$k = \frac{(1-B)k}{-1-Bk}$, $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{B-2}{B}$

Множество значений коэффициентов $k_{ви}$ и k_2 в зависимости от параметра B и их соотношение можно определить, анализируя графики:

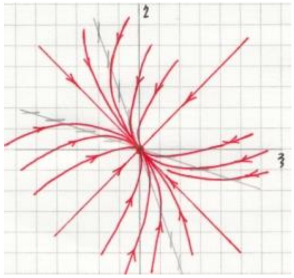
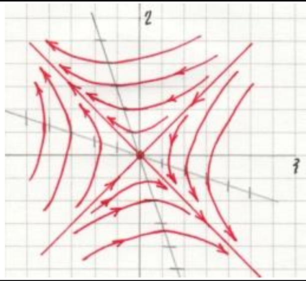


0<B<1	1<B<2	B=2	B>2
$k_2 < k_{ви} < -1$	$-1 < k_{ви} < k_2 < 0$ $-1 < k_{ви} < -1/2$	$k_{ви} = -1/2$, $k_2 = 0$	$-1/2 < k_{ви} < 0 < k_2 < 1$
			

Построение фазового портрета линеаризованной системы в окрестности точки P_3

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = -u^*\xi - Bu^*\eta, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = -Bu^*\xi - u^*\eta, \end{cases}$$

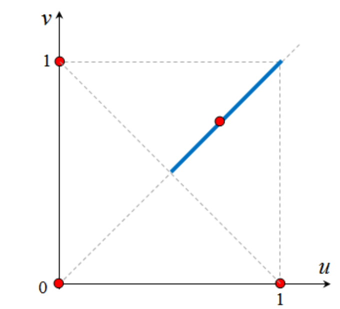
$$u^* = \frac{1}{B+1}$$

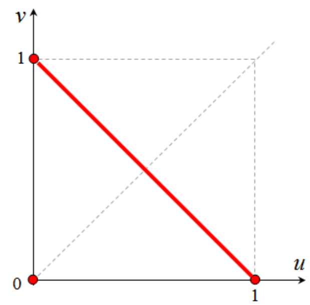
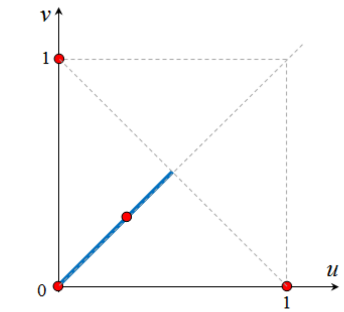
0<B<1	B>1
	

6. Построение фазовых портретов нелинейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = (1 - u - Bv)u, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = (1 - Bu - v)v, \qquad \text{где } B = \dfrac{\beta}{\alpha}. \end{cases} \tag{3}$$

Геометрическое место точек P_i

<table>
<tr><th>0 < B < 1</th><th>B = 1</th><th>B > 1</th></tr>
<tr>
<td>

Выделенный отрезок – геометрическое место точек $P_3\left(\frac{1}{B+1};\frac{1}{B+1}\right)$</td>
<td>
</td>
<td>

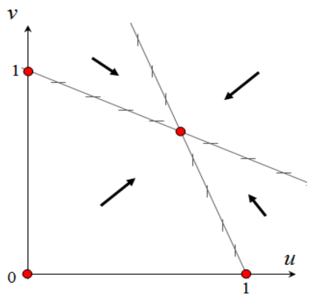
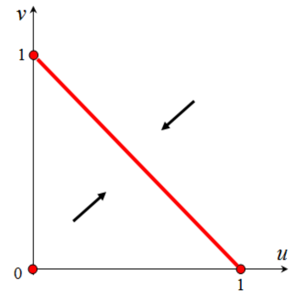
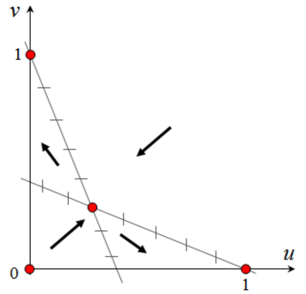
Выделенный отрезок – геометрическое место точек $P_3\left(\frac{1}{B+1};\frac{1}{B+1}\right)$</td>
</tr>
</table>

Главные изоклины:

Вертикальные: $(1 - u - Bv)u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u = 0, \\ 1 - u - Bv = 0; \end{array}\right.$

Горизонтальные: $(1-Bu-v)v=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} v=0, \\ 1-Bu-v=0. \end{array}\right.$

Области возрастания и убывания функций $u(\tau)$ и $v(\tau)$:

0 < B < 1	B = 1	B > 1
		
↗ *u*, *v* – возрастают; ↙ *u*, *v* – убывают; ↘ *u* – возрастает, а *v* – убывает; ↖ *u* – убывает, а *v* - возрастает		

Выпуклость/вогнутость фазовой траектории относительно оси 0u

Так как в силу системы (3)

$$\frac{dv}{du}=\frac{(1-v-Bu)v}{(1-u-Bv)u},$$

то

$$\frac{d^2v}{du^2}=\frac{uv(u-v)(1-B)\left(2+B(u^2+v^2)-(B+2)(u+v)+2uv\right)}{u^3(1-u-Bv)^3}$$

Границы областей знакопостоянства производной v'':

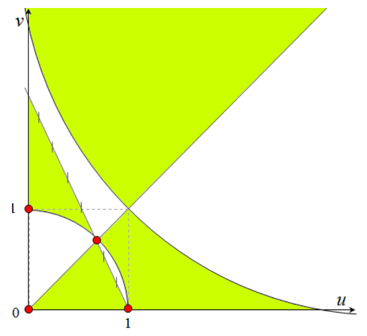
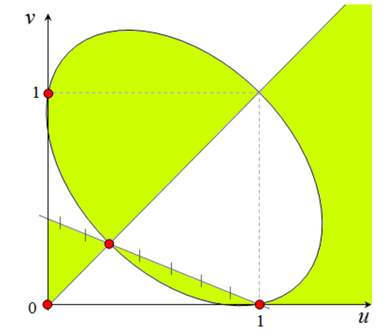
прямые: $u = 0$, $v = 0$, $1 - u - \mathrm{B}v = 0$;

линия 2-го порядка: $B(u^2 + v^2) - (\mathrm{B}+2)(u + v) + 2uv + 2 = 0$ –

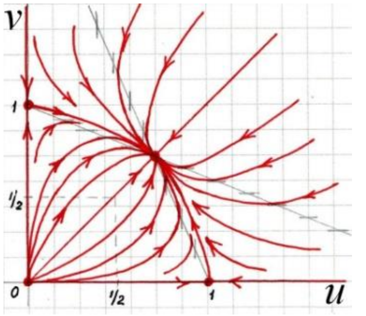
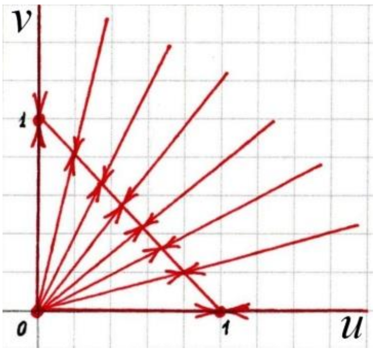
гипербола, если $0 < \mathrm{B} < 1$,

эллипс, если $\mathrm{B} > 1$.

Области знакопостоянства производной v'':

$0 < B < 1$	$B > 1$	Пояснение
		В закрашенных областях фазовые траектории имеют выпуклость вниз по отношению к оси $0u$

Фазовые портреты

$0 < B < 1$ ($\beta < \alpha$ - сильнее выражена внутривидовая конкуренция) При ненулевых начальных численностях обоих видов наблюдается стабилизация их численности на равновесном уровне, равном $\frac{1}{B+1}$. При нулевой численности одного вида численность второго стремится к равновесной, равной 1.	
$B = 1$ ($\beta = \alpha$ - нет доминирования одного вида над другим). С течением времени наблюдается стабилизация на равновесном уровне. Численности видов в равновесии зависят от начальных, но суммарная численность обоих видов в равновесии равна 1.	

B > 1 ($\beta > \alpha$ - сильнее выражена межвидовая конкуренция). При разных начальных численностях видов выживает тот вид, у которого начальная численность больше. Численность этого вида стабилизируется на равновесном уровне, равном 1. Но при одинаковых начальных численностях видов наблюдается с течением времени стабилизация их численностей на одном и том же уровне, равном $\frac{1}{B+1}$.