



17.02.2020

Занятие № 4. Качественное исследование динамической системы

вида $\frac{dN}{dt} = f(N)$

№ 17. Выполнить качественное исследование уравнения:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \frac{\beta N^2}{\beta + \tau N} - \gamma N - \delta N^2, \quad \alpha, \beta, \tau, \gamma, \delta - const > 0. \quad (1)$$

1. Уменьшение размерности области параметров.

Результат: с помощью линейного преобразования

$$N = \frac{\beta}{\tau} u, \quad t = \frac{\tau}{\beta \alpha} v$$

уравнение (1) приводится к виду:

$$\frac{du}{dv} = \frac{u^2}{1+u} - Au - Bu^2, \quad A, B > 0. \quad (2)$$

где $A = \frac{\gamma\tau}{\beta\alpha}$, $B = \frac{\sigma}{\alpha}$,

2. Поиск положений равновесия уравнения (2).

Рекомендация: найти неотрицательные корни уравнения $f(u) = 0$, где

$$f(u) = \frac{u^2}{1+u} - Au - Bu^2.$$

$$\begin{cases} f(u) = 0, \\ u \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0, \\ \frac{u}{1+u} - A - Bu = 0, \\ u \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0, \\ Bu^2 + (A+B-1)u + A = 0, \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Результат:

1) Уравнение (2) имеет 3 положения равновесия:

$$u_1 = 0, \quad u_{2,3} = \frac{1-A-B \pm \sqrt{D}}{2B}, \quad u_2 < u_3, \quad D = (1-A-B)^2 - 4AB,$$

если $\begin{cases} D > 0, \\ A + B - 1 < 0. \end{cases}$ (3)

2) Уравнение (2) имеет 2 положения равновесия:

$$u_1 = 0, \quad u_{2,3} = \frac{1-A-B}{2B}, \quad \text{если } \begin{cases} D = 0, \\ A + B - 1 < 0. \end{cases}$$
 (4)

3) Уравнение (2) имеет одно положение равновесия $u_1 = 0$, если

$$\begin{cases} D < 0, \\ A + B - 1 \geq 0. \end{cases}$$
 (5)

Условия (5), (4), (3) определяют в пространстве значений параметров (A, B) области существования одного, двух и трех положений равновесия, которые обозначим соответственно D_1 , D_2 и D_3 .

3. Анализ на устойчивость положений равновесия уравнения (2).

Правила:

- Если $f'(u^*) < 0$, то положение равновесия u^* асимптотически устойчиво.
- Если $f'(u^*) > 0$, то положение равновесия u^* неустойчиво.
- Если $f'(u^*) = 0$ и $f''(u^*) \neq 0$, то положение равновесия u^* неустойчиво (точнее полуустойчиво).

Пусть $g(u) = \left(\frac{u}{1+u} - A - Bu \right)$, тогда

$$f'(u) = g(u) + ug'(u), \quad f''(u) = 2g'(u) + g''(u)u$$

и

$$g'(u) = \frac{1}{(1+u)^2} - B, \quad g''(u) = -\frac{2}{(1+u)^3}.$$

Результат:

- 1) Положения равновесия $u_1 = 0$ асимптотически устойчиво при любых допустимых значениях параметров А и В.
- 2) Положение равновесия u_2 полуустойчиво в области D_2 и неустойчиво в области D_3 .

Замечание.

Область D_2 :

А) Так как u_2 – корень уравнения

$$Bu^2 - (1 - A - B)u + A = 0 \Leftrightarrow g(u) \equiv \frac{u}{1+u} - A - Bu = 0$$

кратности 2, то $g(u_2) = 0$ и $g'(u_2) = 0$. Следовательно, $f'(u_2) = 0$.

Б) $f''(u_2) = g''(u_2)u_2 = -2u_2(1+u_2)^{-3} \neq 0$.

Область D_3 :

Так как u_2 и u_3 – корни уравнения ($u_2 < u_3$)

$$Bu^2 - (1 - A - B)u + A = 0 \Leftrightarrow g(u) \equiv \frac{u}{1+u} - A - Bu = 0,$$

то имеем:

$$g(u_2) = 0,$$

$$f'(u_2) = g(u_2) + u_2 g'(u_2) = u_2 g'(u_2) = u_2 \left(\frac{1}{(1+u_2)^2} - B \right),$$

$$(1+u_2)^2 = 1 + 2u_2 + u_2^2 < 1 + u_2 + u_3 + u_2 u_3 = 1 + \frac{1-A-B}{B} + \frac{A}{B} = \frac{1}{B} \cdot u,$$

следовательно, $f'(u_2) > 0$.

- 3) Положение равновесия u_3 асимптотически устойчиво.

Область D_3 :

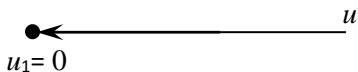
Так как u_2 и u_3 – корни уравнения $Bu^2 - (1 - A - B)u + A = 0$ и $u_2 < u_3$, то

$$(1 + u_3)^2 = 1 + 2u_3 + u_3^2 > 1 + u_2 + u_3 + u_2u_3 = 1 + \frac{1 - A - B}{B} + \frac{A}{B} = \frac{1}{B}.$$

и, следовательно, $f'(u_3) < 0$.

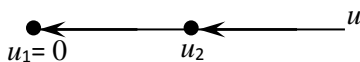
4. Фазовые портреты уравнения (2)

1) $(A, B) \in D_1$



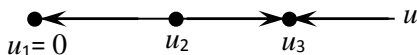
Интерпретация: при любой начальной численности популяции наблюдается ее вырождение ($u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$).

2) $(A, B) \in D_2$



Интерпретация: если начальная численность меньше u_2 , то наблюдается вырождение популяции, если начальная численность больше u_2 , то наблюдается стабилизация численности на равновесном уровне u_2 .

3) $(A, B) \in D_3$



Интерпретация: если начальная численность меньше u_2 , то наблюдается вырождение популяции, если начальная численность больше u_2 , то наблюдается стабилизация численности на равновесном уровне u_3 .



Домашнее задание

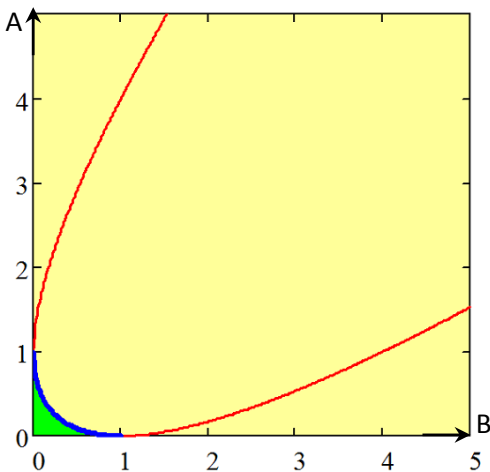
К № 17. В первой четверти плоскости (A, B) построить области существования одного (D_1), двух (D_2) и трех положений равновесия (D_3).


Построение областей существования трех положений равновесия, двух положений равновесия и одного положения равновесия (параметрический портрет уравнения (2))

Результат:

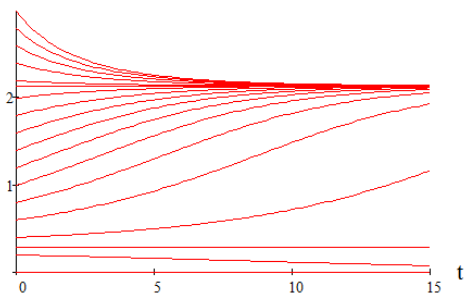
Уравнение параболы:

$$(1 - A - B)^2 - 4AB = 0 \Leftrightarrow (A - B)^2 - 2(A + B) + 1 = 0$$

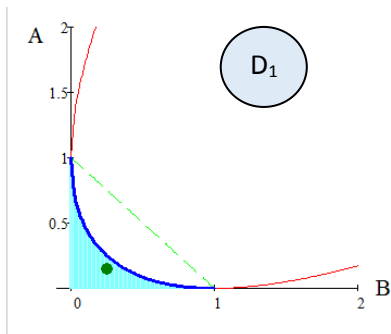


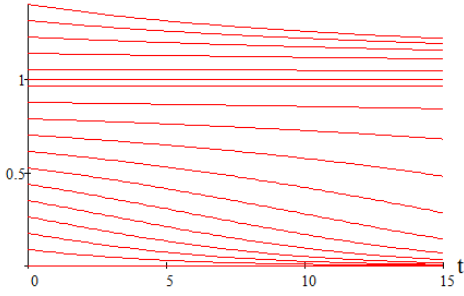
D_3		Три положения равновесия
D_2		Два положения равновесия
D_1		Одно положение равновесия

Интегральные кривые уравнения (2), соответствующие различным областям параметрического пространства

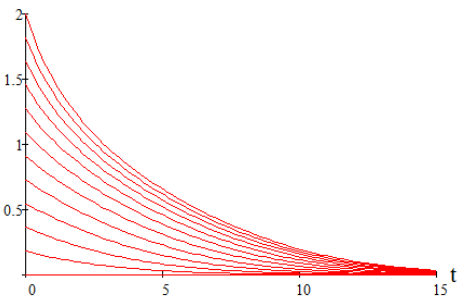
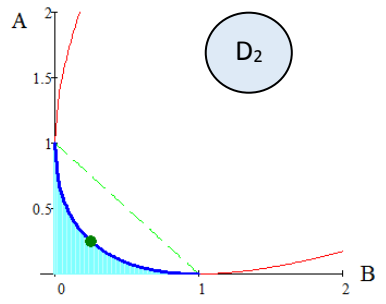


$A = 0.15$
 $B = 0.25$





$A = 0.25$
 $B = 0.25$



$A = 0.4$
 $B = 0.3$

