# Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа (операционный метод)[1]

**Операционное исчисление** — один из наиболее экономичных методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и пользуется большой популярностью у инженеров. Метод был предложен известным американским электротехником и физиком О. Хевисайдом (1892 г.). Он предложил формальные правила обращения с оператором $\frac{d}{dx}$ и некоторыми функциями от этого оператора, используя которые решил ряд важнейших задач электродинамики. Однако операционное исчисление не получило в трудах О. Хевисайда математического обоснования («его математика возникала в физическом контексте, из которого ее нелегко было выделить» [1, с. 118]), многие его результаты оставались недоказанными. Лишь в 20-е годы XX века метод получил обоснование в работах Бромвича (T. J. I'A. Bromwich) и Карсона (J. R. Carson)[2].

## 1. Понятие оригинала и изображения по Лапласу

Определение 1. **Функцией-оригиналом** *называется любая комплекснозначная функция $f(x)$ действительного аргумента $x$, удовлетворяющая условиям:*

1) *$f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, за исключением, быть может, конечного числа точек точек разрыва 1-го рода;*

2) *для всех $x < 0 \quad f(x) = 0$;*

3) *существуют такие постоянные $M > 0$ и $a > 0$, при которых*

$$|f(x)| \leqslant M \cdot e^{ax} \ \text{ для } \ \forall x. \qquad (\star)$$

[1] **Дифференциальные и интегральные уравнения** : учебное пособие для студентов физико-технического факультета : в 3 ч. Часть 2 / сост. : Н. Ю. Светова, Е. Е. Семёнова. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014.

[2] Попытки строгого обоснования и «математически приемлемого» изложения исчисления напоминали «общий штурм» – английский математик Бромвич (1916), американский инженер Карсон (1925), голландский инженер-электрик Ван-дер-Поль (1929–1932) привлекли результаты различных теорий, связали исчисление Хевисайда с преобразованием Лапласа, с теорией функций комплексной переменной [1].

Точная нижняя грань $a_0$ всех чисел $a$, для которых справедливо неравенство ($\star$), называется *показателем роста функции* $f(x)$. Заметим, что для любой ограниченной функции показатель роста $a_0 = 0$. Простейшим оригиналом является **функция Хевисайда**

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, для любой функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x) \cdot \chi(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ x \geqslant 0, \\ 0, \ x < 0. \end{cases}$$

Если при $x \geqslant 0$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 3 определения 1, то функция $\varphi(x)\chi(x)$ является оригиналом. В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, записывать $\varphi(x)$ вместо $\varphi(x)\chi(x)$, считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных значений аргумента $x$.

Определение 2. *Функция $F(p)$ комплексного переменного $p$ ($p \in \mathbb{C}$), определяемая интегралом*

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx, \tag{1}$$

*называется* **преобразованием Лапласа**, *или* **изображением по Лапласу**[3], *функции $f(x)$.*

Для указания соответствия между оригиналом и изображением будем использовать следующую запись[4]:

$$f(x) \risingdotseq F(p).$$

[3] В мемуарах П. Лапласа (1782–1812) современные *оригинал* и *изображение* именуются *fonction determinant* и *fonction generatrice* – «определяющая функция» и «производящая». Эти названия, хотя и признанные неудачными, сохранились до XX в. Хевисайд употреблял названия «подоператорная функция» (1892). Оператор он обозначал буквой $p$, которая употребляется в современном исчислении [1].

[4] Названия original и image и знак $\risingdotseq$ предложил Ван дер Поль в статьях 1929–1932 гг. В русской литературе термин *изображение* и символ $\risingdotseq$, по-видимому, впервые появились в книге харьковских математиков А. М. Эфроса и А. М. Данилевского «Операционное исчисление и контурные интегралы» (1937), а термин *оригинал* – только в 1953 г. [1]. Используются и другие варианты записи соответствия между оригиналами и изображениями. Например, $f(x) \leftrightarrow F(p)$ или $L\{f(x)\} = F(p)$.

Для любого оригинала $f(x)$ его изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a_0$ ($a_0$ показатель роста функции $f(x)$), где несобственный интеграл (1) сходится.

Пример 1. Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(x) = \sin 3x.$$

*Решение.* Для функции $f(x) = \sin 3x$ имеем $a_0 = 0$. Поэтому изображение $F(p)$ будет определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Применим формулу (1) к заданной функции, используя при выполнении преобразований правило интегрирования по частям и ограничение на множество значений переменной $p$, обеспечивающее сходимость интеграла:

$$\begin{aligned}
F(p) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-px} \sin 3x\, dx = \\
&= -\frac{1}{p} e^{-px} \sin 3x \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \frac{3}{p} \int\limits_0^{+\infty} e^{-px} \cos 3x\, dx = \\
&= \frac{3}{p} \left\{ -\frac{1}{p} e^{-px} \cos 3x \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{3}{p} \int\limits_0^{+\infty} e^{-px} \sin 3x\, dx \right\} = \\
&= \frac{3}{p^2} - \frac{9}{p^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-px} \sin 3x\, dx = \frac{3}{p^2} - \frac{9}{p^2} F(p).
\end{aligned}$$

Получили равенство:

$$F(p) = \frac{3}{p^2} - \frac{9}{p^2} F(p).$$

Откуда находим

$$F(p) = \frac{3}{p^2 + 9}.$$

Таким образом, справедливо следующее соответствие:

$$\sin 3x \risingdotseq \frac{3}{p^2 + 9}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

□

## 2. Свойства преобразования Лапласа

На практике при построении изображений используются различные приемы, основанные на свойствах преобразования Лапласа. Перечислим основные свойства, справедливость которых легко установить с помощью определений изображения и оригинала.

1. **Свойство линейности**. Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, $g(x) \risingdotseq G(p)$, то для любых $\alpha$, $\beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p), \quad \operatorname{Re} p > \max(a_0, b_0).$$

Здесь и далее $a_0$, $b_0$ – показатели роста функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

2. **Теорема подобия**. Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\alpha > 0$

$$f(\alpha x) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha a_0.$$

3. **Теорема смещения**. Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$e^{\lambda x} f(x) \risingdotseq F(p - \lambda), \quad \operatorname{Re} p > a_0 + \operatorname{Re} \lambda.$$

4. **Дифференцирование оригинала.** Пусть функция $f(x)$ $n$ раз дифференцируема. Тогда

$$\begin{aligned}
&f'(x) \risingdotseq pF(p) - f(+0),\\
&f''(x) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(x) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - \ldots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0),
\end{aligned}$$

где $f^{(k)}(+0) = \lim\limits_{x \to +0} f^{(k)}(x)$, $k = \overline{0,\, n-1}$.

*Замечание.* При построении изображений производных непрерывных в нуле функций в записи аргумента функции и ее производных знак "плюс"опускается.

5. **Дифференцирование изображения.** Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-x)^n f(x), \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

В частности, при $n = 1$ имеем

$$F'(p) \risingdotseq -x f(x).$$

6. **Интегрирование оригинала**. Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^x f(\xi)\,d\xi \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

7. **Интегрирование изображения**. Если интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp$ сходится и $F(p) \risingdotseq f(x)$, то

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \risingdotseq \frac{f(x)}{x}, \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

8. **Теорема об умножении изображений (теорема о свертке)** Если $f(x) \risingdotseq F(p),\ g(x) \risingdotseq G(p)$, то

$$F(p)G(p) \risingdotseq \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt,$$

когда $\operatorname{Re} p > \max(a_0, b_0)$. Интегралы в правой части соответствия называют *сверткой функций* $f(x)$ и $g(x)$.

9. **Теорема запаздывания**. Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\xi > 0$

$$f(x-\xi)\chi(x-\xi) \risingdotseq e^{-\xi p}F(p), \qquad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

Оригинал по изображению восстанавливается единственным образом, с точностью до значений в точках разрыва. На практике обычно используют готовые таблицы оригиналов и изображений[5]. В таблице 1 перечислены основные оригиналы и изображения, часто встречающиеся в приложениях.

Пример 2. Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу основных оригиналов и изображений, найти изображения следующих функций:

1) $f(x) = e^{-4x}\sin 3x \cos 2x$;

2) $f(x) = e^{(x-2)}\sin(x-2)$;

3) $f(x) = x^2 e^{3x}$;

4) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$.

[5]Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., 1965.

Таблица 1. Основные оригиналы и изображения

| Оригинал | Изображение | Оригинал | Изображение |
|---|---|---|---|
| $1$ | $\dfrac{1}{p}$ | $\cos\omega x$ | $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ |
| $x^n$ | $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ | $\sin\omega x$ | $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |
| $e^{-\lambda x}$ | $\dfrac{1}{p+\lambda}$ | $x\cos\omega x$ | $\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$ |
| $x^n e^{-\lambda x}$ | $\dfrac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$ | $x\sin\omega x$ | $\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$ |

*Решение.* 1) Преобразуем выражение для функции $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = e^{-4x}\sin 3x\cos 2x = \frac{1}{2}e^{-4x}(\sin 5x + \sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-4x}\sin 5x + \frac{1}{2}e^{-4x}\sin x.$$

Так как

$$\sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1} \quad \text{и} \quad \sin 5x \risingdotseq \frac{5}{p^2+25},$$

то, используя свойство линейности и теорему смещения, для изображения функции $f(x)$ будем иметь:

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{(p+4)^2+25} + \frac{1}{(p+4)^2+1}\right).$$

2) Так как

$$\sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \quad e^x\sin x \risingdotseq \frac{1}{(p-1)^2+1},$$

то, используя теорему запаздывания, будем иметь

$$f(x) = e^{x-2}\sin(x-2) \risingdotseq F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p-1)^2+1}.$$

3) Так как $x^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$, то по теореме смещения имеем:

$$f(x) = x^2e^{3x} \risingdotseq F(p) = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

Приведем для сравнения способ построения изображения функции $f(x) = x^2e^{3x}$ с применением свойства дифференцирования изображения:

$$e^{3x} \risingdotseq \frac{1}{p-3};$$

$$xe^{3x} \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-3}\right) = \frac{1}{(p-3)^2};$$

$$x^2e^{3x} \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{(p-3)^2}\right) = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

Получили тот же результат.

4) Так как

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \;\risingdotseq\; \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4},$$

то, используя свойство интегрирования изображения, будем иметь:

$$\frac{\sin^2 x}{x} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty}\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}\right)dp =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln p^2 - \frac{1}{4}\ln(p^2+4)\right)\Bigg|_p^{\infty} = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2}{p^2+4}\Bigg|_p^{\infty} = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4}{p^2}.$$

□

## 3. Восстановление оригинала по изображению

Пусть изображение $Y(p)$ представляет собой правильную рациональную дробь (является рациональной функцией).

Если дробь разложить на сумму простейших (элементарных) дробей, то для каждой из них соответствующий оригинал можно найти, используя свойства преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и их изображений.

Действительно,

$$\frac{A}{p-a} \risingdotseq A\cdot e^{ax}; \qquad \frac{A}{(p-a)^n} \risingdotseq \frac{A}{(n-1)!}x^{n-1}\cdot e^{ax}.$$

Выполнив преобразования дроби

$$\frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2} = \frac{A(p-a)+aA+B}{(p-a)^2+b^2} = \frac{A(p-a)}{(p-a)^2+b^2} + \frac{aA+B}{(p-a)^2+b^2},$$

получим

$$\frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2} \risingdotseq A\,e^{ax}\cos bx + \frac{aA+B}{b}\;e^{ax}\sin bx.$$

Для построения оригинала, соответствующего дроби

$$\frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^n},$$

можно воспользоваться теоремой умножения. Например, при $n=2$ имеем

$$\frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^2} = \frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2}\cdot\frac{1}{(p-a)^2+b^2}.$$

Так как

$$\frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2} \risingdotseq A\,e^{ax}\cos bx + \frac{aA+B}{b}\;e^{ax}\sin bx = h_1(x)$$

и

$$\frac{1}{(p-a)^2+b^2} \risingdotseq \frac{1}{b}\;e^{ax}\sin bx = g(x),$$

то

$$\frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^2} = \int\limits_0^x g(x-t)\,h_1(t)\;dt = h_2(t).$$

При $n=3$:

$$\frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^2}\cdot\frac{1}{(p-a)^2+b^2} \risingdotseq \int\limits_0^x g(x-t)\,h_2(t)\;dt,$$

Аналогично можно рассматривать восстановление оригиналов и при $n>3$.

Знаменатель рациональной функции $Y(p)$ есть многочлен порядка $k$. Если он имеет $k$ различных нулей $p_i,\ i=\overline{1,\,k}$, то, разложив знаменатель на множители $(p - p_i)$, соответствующий оригинал для $Y(p)$ можно найти по формуле:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(Y(p)(p - p_i)e^{px}\right)\Big|_{p=p_i}. \qquad (2)$$

Произведение $Y(p)(p - p_i)$ дает рациональную функцию, знаменатель которой не содержит множителя $(p - p_i)$, и вычисленное при $p = p_i$ определяет коэффициент, с которым дробь $\dfrac{1}{p - p_i}$ входит в разложение функции $Y(p)$ на сумму элементарных дробей.

Пример 3. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$Y(p) = \frac{1}{p^3 - p}.$$

*Решение.* Разложив заданное изображение на сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{p^3 - p} = \frac{1}{p(p-1)(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+1)},$$

найдем оригинал

$$y(x) = -1 + \tfrac{1}{2}e^{x} + \tfrac{1}{2}e^{-x} = -1 + \operatorname{ch} x.$$

*Ответ:* $y(x) = -1 + \operatorname{ch} x$. □

Пример 4. Найти оригинал для изображения:

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}.$$

*Решение.* Так как $\dfrac{1}{p^2 + 1} \risingdotseq \sin x$, то, применяя свойство интегрирования оригинала, получим:

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} \risingdotseq \int\limits_0^x \sin t\, dt = -\cos t\Big|_0^x = 1 - \cos x.$$

*Ответ:* $y(x) = 1 - \cos x$.

Пример 5. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 4)^2}.$$

*Решение.* Применяя свойство изображения свертки, будем иметь:

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2+4)^2} = \frac{1}{p^2+4} \cdot \frac{1}{p^2+4} \risingdotseq \frac{1}{4}\int\limits_0^x \sin 2(x-t) \cdot \sin 2t \, dt.$$

Вычислив интеграл, получим искомое выражение для оригинала.

*Ответ:* $y(x) = \dfrac{1}{16}\sin 2x - \dfrac{1}{8} x \cos 2x.$ □

Пример 6. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$Y(p) = \frac{p^2+2}{p^3-p^2-6p}.$$

*Решение.* Так как $p^3 - p^2 - 6p = p(p-3)(p+2)$, то знаменатель дроби $Y(p)$ имеет три простых корня: $p_1 = 0$, $p_2 = 3$ и $p_3 = -2$. Построим соответствующий оригинал с помощью формулы (2):

$$y(x) = \left.\frac{(p^2+2)e^{px}}{(p-3)(p+2)}\right|_{p=0} + \left.\frac{(p^2+2)e^{px}}{p(p+2)}\right|_{p=3} + \left.\frac{(p^2+2)e^{px}}{p(p-3)}\right|_{p=-2} =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{11}{15}e^{3x} + \frac{3}{5}e^{-2x}.$$

□

Пример 7. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$Y(p) = \frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p^2+4)}.$$

*Решение.* Представим дробь, входящую в выражение в виде простейших дробей:

$$\frac{1}{p(p+1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Применяя к разложению метод неопределенных коэффициентов, получим:

$$A = \frac{1}{4};\ B = D = -\frac{1}{5};\ C = -\frac{1}{20}.$$

Изображение примет вид:

$$Y(p) = \frac{1}{4}\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p} - \frac{1}{5}\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p+1} - \frac{1}{20}\frac{pe^{-\frac{p}{2}}}{p^2+4} - \frac{1}{5}\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p^2+4}. \qquad \text{(a)}$$

Используя соотношения:

$$\frac{1}{p} \risingdotseq \chi(x), \quad \frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-x}\chi(x),$$

$$\frac{p}{p^2+4} \risingdotseq \cos 2x\ \chi(x), \quad \frac{1}{p^2+4} \risingdotseq \frac{1}{2}\sin 2x\ \chi(x)$$

и учитывая теорему запаздывания, получим для изображения (а) искомый оригинал.

*Ответ:*

$$y(x) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{20}\cos(2x-1) - \frac{1}{10}\sin(2x-1)\right)\cdot\chi\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

□

## 4. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Метод решения различных классов уравнений с помощью преобразования Лапласа получил название *операционного метода*. Свойство преобразования Лапласа – дифференцирование оригинала – позволяет сводить решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к решению алгебраических уравнений.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \tag{4}$$

Пусть для функции $f(x)$ и искомого решения выполнены условия существования преобразования Лапласа.

Обозначим через $Y(p)$ изображение неизвестной функции (оригинала) $y(x)$, а через $F(p)$ – изображение правой части $f(x)$:

$$y(x) \risingdotseq Y(p), \quad f(x) \risingdotseq F(p).$$

По правилу дифференцирования оригинала имеем

$$\begin{aligned}
&y'(x) \risingdotseq pY(p) - y_0,\\
&y''(x) \risingdotseq p^2Y(p) - py_0 - y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n)}(x) \risingdotseq p^nY(p) - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_1 - \ldots - y_{n-1}.
\end{aligned}$$

Тогда в силу свойства линейности преобразования Лапласа после его применения к левой и правой частям уравнения (3) получим операторное уравнение

$$M(p)Y(p) - N(p) = F(p), \tag{5}$$

где $M(p)$ – характеристический многочлен уравнения (3):

$$M(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n y,$$

$N(p)$ – многочлен, содержащий начальные данные задачи Коши (обращается в нуль при нулевых начальных данных):

$$N(p) = y_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + \\ + y_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + y_{n-2}(p + a_1) + y_{n-1},$$

$F(p)$ – изображение функции $f(x)$.

Разрешая операторное уравнение (5), получаем изображение Лапласа $Y(p)$ искомого решения $y(x)$ в виде

$$Y(p) = \frac{F(p) + N(p)}{M(p)}.$$

Восстанавливая оригинал для $Y(p)$, находим решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (4).

Пример 8. Найти решение дифференциального уравнения:

$$y'(x) + y(x) = e^{-x},$$

удовлетворяющее условию: $y(0) = 1$.

*Решение.* Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как

$$\begin{aligned} y'(x) &\risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1, \\ e^{-x} &\risingdotseq \frac{1}{p+1}, \end{aligned}$$

то, применив к заданному уравнению преобразование Лапласа, используя свойство линейности, получим алгебраическое уравнение относительно $Y(p)$:

$$pY(p) - 1 + Y(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Откуда находим выражение для $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}.$$

Так как

$$\frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-x}, \quad \frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq xe^{-x},$$

то имеем

$$Y(p) \risingdotseq y(x) = e^{-x} \cdot x + e^{-x}.$$

*Проверка:* Покажем, что найденная функция действительно является решением задачи Коши. Подставляем выражение для функции $y(x)$ и ее производной

$$y'(x) = -e^{-x} \cdot x + e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x} \cdot x$$

в заданное уравнение:

$$-e^{-x} \cdot x + e^{-x} \cdot x + e^{-x} = e^{-x}.$$

После приведения подобных слагаемых в левой части уравнения получаем верное тождество: $e^{-x} \equiv e^{-x}$. Таким образом, построенная функция является решением уравнения.
Проверим, удовлетворяет ли она начальному условию $y(0) = 1$:

$$y(0) = e^{-0} + e^{-0} \cdot 0 = 1.$$

Следовательно, найденная функция является решением задачи Коши.

*Ответ:* $y(x) = e^{-x} \cdot x + e^{-x}$. □

Пример 9. Решить задачу Коши $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

*Решение.* Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как

$$y''(x) \risingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0), \quad 1 \risingdotseq 1/p,$$

то, применив к уравнению преобразование Лапласа, с учетом начальных условий получим

$$(p^2+1)Y(p) = \frac{1}{p} \Longrightarrow Y(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

Разложим дробь на простейшие дроби:

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}.$$

По таблице 1 найдем $y(x) = 1 - \cos x$.

Восстановить оригинал по изображению можно и применив свойство интегрирования оригинала (см. пример 4).

*Ответ:* $y(x) = 1 - \cos x$. $\square$

Пример 10. Решить задачу Коши $y'' + 3y' = e^{-3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

*Решение.* Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как

$$y' \risingdotseq pY(p) - y(0), \quad y''(x) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0), \quad \text{и} \quad e^{-3x} \risingdotseq \frac{1}{p+3},$$

то, учитывая начальные условия, получим операторное уравнение

$$(p^2 + 3p)Y(p) + 1 = \frac{1}{p+3} \Longrightarrow Y(p) = -\frac{p+2}{(p+3)^2 p}.$$

Разложим рациональную функцию на простейшие дроби:

$$-\frac{p+2}{(p+3)^2 p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{(p+3)^2} = \frac{A(p^2 + 6p + 9) + B(p^2 + 3p) + Cp}{p(p+3)^2}.$$

Составим систему уравнений для нахождения коэффициентов $A, B$ и $C$:

$$A + B = 0, \quad 6A + 3B + C = -1, \quad 9A = -2,$$

решая которую найдем $A = -2/9$, $B = 2/9$, $C = -1/3$. Следовательно,

$$Y(p) = -\frac{2}{9}\frac{1}{p} + \frac{2}{9}\frac{1}{p+3} - \frac{1}{3}\frac{1}{(p+3)^2}.$$

Используя таблицу 1 получим ответ.

*Ответ:* $y(x) = -\frac{2}{9} + \frac{2}{9}e^{-3x} - \frac{1}{3}xe^{-3x}$. $\square$

Пример 11. Найти решение дифференциального уравнения:

$$y'''(x) + 2y''(x) + 5y'(x) = 0,$$

удовлетворяющее условиям: $y(0) = -1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0$.

*Решение.* Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как, учитывая заданные условия, имеем

$$\begin{aligned}
y'(x) &\risingdotseq p \cdot Y(p) - y(0) = pY(p) - (-1) = pY(p) + 1, \\
y''(x) &\risingdotseq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = \\
&= p^2Y(p) - p \cdot (-1) - 2 = p^2Y(p) + p - 2, \\
y'''(x) &\risingdotseq p^3 \cdot Y(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - y''(0) = \\
&= p^3Y(p) - p^2 \cdot (-1) - p \cdot 2 - 0 = p^3Y(p) + p^2 - 2p,
\end{aligned}$$

то после применения к заданному уравнению преобразования Лапласа получим следующее операторное уравнение:

$$p^3Y(p) + p^2 - 2p + 2p^2Y(p) + 2p - 4 + 5pY(p) + 5 = 0$$

или после преобразований:

$$Y(p) \cdot (p^3 + 2p^2 + 5p) = -p^2 - 1.$$

Решая это уравнение относительно $Y(p)$, получим

$$Y(p) = \frac{-p^2 - 1}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Полученное выражение разложим на простые дроби:

$$\frac{-p^2 - 1}{p(p^2 + 2p + 5)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 5}.$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов найдем $A, B, C$. Для этого приведем дроби к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при равных степенях $p$:

$$\frac{-p^2 - 1}{p(p^2 + 2p + 5)} = \frac{Ap^2 + 2Ap + 5A + Bp^2 + Cp}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Получим систему алгебраических уравнений относительно $A, B, C$:

$$A + B = -1, \quad 2A + C = 0, \quad 5A = -1,$$

решением которой будут:

$$A = -\tfrac{1}{5}, \quad B = -\tfrac{4}{5}, \quad C = \tfrac{2}{5}.$$

Тогда

$$Y(p) = -\frac{1}{5p} + \frac{1}{5} \cdot \frac{-4p + 2}{p^2 + 2p + 5}.$$

Чтобы найти оригинал второй дроби, выделим в ее знаменателе полный квадрат: $p^2 + 2p + 5 = (p + 1)^2 + 4$, тогда в числителе выделим слагаемое $p+1$: $\quad -4p+2 = -4(p+1)+6$ и разложим дробь на сумму двух дробей:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{-4p + 2}{p^2 + 2p + 5} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{(p + 1)^2 + 4}.$$

Далее, воспользовавшись теоремой смещения и таблицей соответствия изображений и оригиналов, получим решение исходного уравнения.

*Ответ:* $\quad y(x) = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}e^{-x}\cos 2x + \frac{3}{5}e^{-x}\sin 2x.$ □

Операционным методом может быть построено и общее решение уравнения (3). Для этого надо конкретные значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ начальных условий заменить на произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

## Список литературы


1. *Александрова Н. В.* История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.

2. *Васильева А. Б.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 432 с.

3. *Сидоров Ю. В.* Лекции по теории функций комплексного переменного /Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин.М.: Наука, 1989.