

Построение интегральных кривых и фазового портрета автономного уравнения

Имея график гладкой функции $f(u)$, можно схематично построить интегральные кривые уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(u). \quad (1)$$

Построение опирается на следующие утверждения:

1. Согласно свойству единственности решения задачи Коши, интегральные кривые, соответствующие различным начальным условиям

$$u(t_0) = u_0, \quad (2)$$

не пересекаются.

2. Так как $u'(t) = f(u)$, то монотонность функции $u(t)$ определяется знаком правой части $f(u)$ уравнения (1). Возможны следующие варианты поведения функции $u(t)$:

а) интегральная кривая, соответствующая начальному условию (2), когда $f(u_0) = 0$, лежит на прямой $u = u_0$. Такая кривая является графиком стационарного решения $u(t) = u_0$ уравнения (1).

б) интегральная кривая, соответствующая начальному условию (2), когда $f(u_0) > 0$, является графиком возрастающей функции. При этом либо $u(t) \rightarrow +\infty$, либо $u(t)$ стремится к стационарному решению.

в) Интегральная кривая, соответствующая начальному условию (2), когда $f(u_0) < 0$, является графиком убывающей функции. При этом $u(t)$ либо стремится к стационарному решению, либо неограниченно убывает¹.

3. Так как $u''(t) = f'(u)f(u)$, то, анализируя знак выражения $f'(u)f(u)$, можно установить наличие точек перегиба и характер выпуклости-вогнутости интегральных кривых. Точки экстремумов функции $f(u)$, отличные от положений равновесия, определяют прямые, на которых лежат точки перегиба интегральных кривых.

¹В случае, когда фазовое пространство системы $D = [0, +\infty)$, $u(t)$ либо стремится к стационарному решению, либо существует такое $t' < +\infty$, что $u(t') = 0$. Т. е. во втором случае интегральная кривая пересекает ось t (очевидно, это имеет место, если $f(0) < 0$).

4. Интегральная кривая $u = \varphi(t + C)$, $C > 0$, получается из интегральной кривой $u = \varphi(t)$ сдвигом по t в отрицательном направлении на величину C .
5. Плоскость (t, u) разбивается на области, каждая из которых в отдельности заполняется интегральными кривыми одного и того же вида.

На рис. 1. приведен пример построения интегральных кривых уравнения (1) по заданному графику его правой части, когда $D = [0, +\infty)$. Три точки пересечения графика функции $f(u)$ с осью u определяют три стационарных решения. Соответствующие им интегральные кривые разбивают первую четверть на три области. Интегральная кривая, которая соответствует наибольшему из трех положений равновесия (точка u_3), является притягивающей для всех траекторий с началом в точке $(0, u_0)$, $u_0 > u_2$. На пунктирных линиях, которые определяют точки экстремумов функции $f(u)$, лежат точки перегиба интегральных кривых. Возрастание или убывание, а также выпуклость-вогнутость интегральных кривых определяются соответственно по знаку функции $f(u)$ и выражения $f'(u)f(u)$.

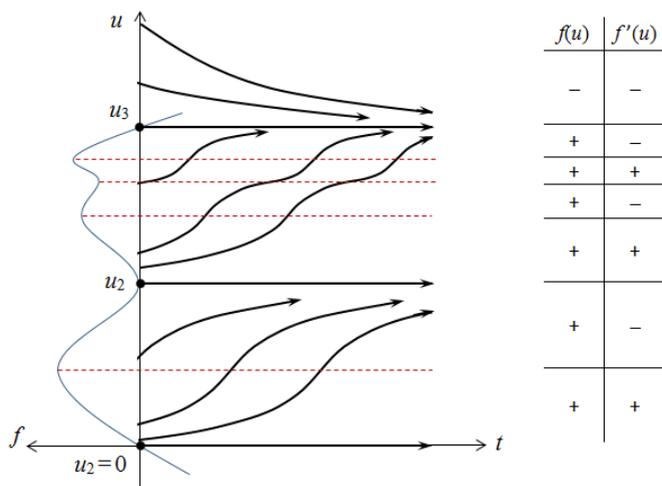


Рис. 1. Построение интегральных кривых по графику правой части уравнения (1)

✓ Для автономных уравнений (1) невозможно существование периодических решений.

Надо заметить, что для уравнения (1) могут существовать решения, которые неограниченно растут за конечное время t_f . Такие решения называют решениями, растущими в режиме с обострением². Им соответствуют интегральные кривые, имеющие вертикальные асимптоты $t = t_f$. Способ отличить неограниченно растущие за бесконечное время решения от решений, растущих в режиме с обострением, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. (Критерий Оsgуда³). *Чтобы решение задачи (1)-(2) существовало в течение конечного времени t_f , необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл*

$$\int_{u_0}^{+\infty} \frac{dz}{f(z)} < \infty.$$

Значение этого интеграла совпадает с t_f .

Действительно, разделив переменные в уравнении (1) и проинтегрировав полученное равенство по t от 0 до T , будем иметь:

$$\int_{u_0}^u \frac{dz}{f(z)} = \int_0^T dt = T.$$

Если существует предел интеграла при $u \rightarrow \infty$, равный t_f , то $T = t_f$. Время t_f называют *временем обострения*.

Например, для уравнения $u'(t) = u^2$ с условием $u(0) = u_0 > 0$ имеем:

$$\int_{u_0}^u \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} \Big|_{u_0}^u = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u}, \quad t_f = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} \right) = \frac{1}{u_0}.$$

Следовательно, имеет место неограниченный рост решения

²Режим с обострением – динамический закон, при котором одна или несколько моделируемых величин обращается в бесконечность за конечный промежуток времени. Режимы с обострением нашли обширные приложения в теории взрывных процессов, ударных волн, физике фазовых превращений. См., например, книгу: Режимы с обострением. Эволюция идеи /Под ред. Г. Г. Малинецкого. М.: Наука, 1999.

³Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: КомКнига, 2005. 312 с.

при $t \rightarrow t_f$ (см. рис. 2).

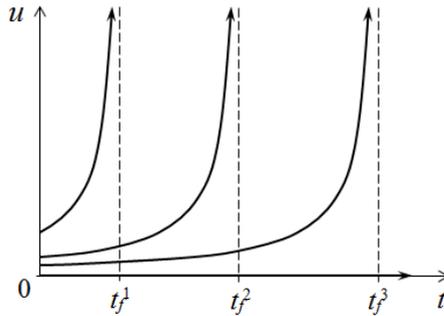


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения $u'(t) = u^2$

Если спроектировать интегральные кривые на фазовую прямую u , то получим фазовый портрет уравнения (1). Однако, если известен график функции $f(u)$, то и без построения интегральных кривых можно получить фазовый портрет уравнения (1), опираясь на следующие правила:

1. Все положения равновесия уравнения (1) есть точки пересечения графика функции $f(u)$ с осью u .
2. На участках оси u , в точках которых $f(u) > 0$, лежат фазовые траектории с направлением в сторону увеличения u .
3. На участках оси u , в точках которых $f(u) < 0$, лежат фазовые траектории с направлением, противоположным направлению увеличения u .

По фазовому портрету для любого положения равновесия можно сделать вывод о характере его устойчивости. При этом для уравнения (1) возможны три типа точек покоя:

- 1) асимптотически устойчивое положение равновесия, или аттрактор;
- 2) неустойчивое положение равновесия – репеллер;
- 3) полуустойчивое⁴ положение равновесия.

⁴Полуустойчивое положение равновесия иногда называют *шунтом*.

Все фазовые портреты, возможные для уравнения (1) в окрестности его изолированных положений равновесия, приведены на рис. 3.

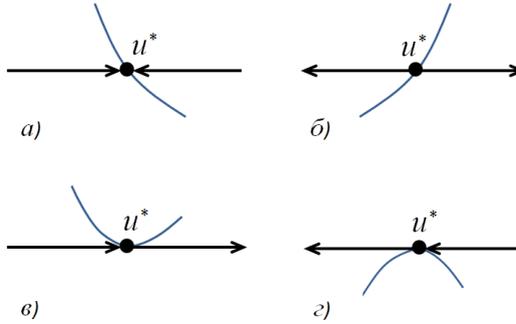


Рис. 3. Фазовые портреты для изолированных положений равновесия:
а) аттрактора, б) репеллера, в) и г) полуустойчивых положений равновесия

На рис. 4 приведен пример построения фазового портрета по заданной правой части уравнения (1).

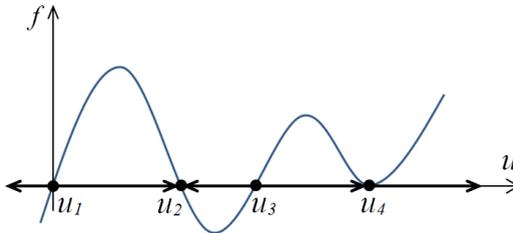


Рис. 4. Фазовый портрет.

Положения равновесия u_1 и u_2 – неустойчивы, u_3 – асимптотически устойчиво, u_4 – полуустойчиво.

Таким образом, имея фазовый портрет уравнения (1), для любого начального условия можно указать, каким будет асимптотическое поведение решения уравнения (1).